This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

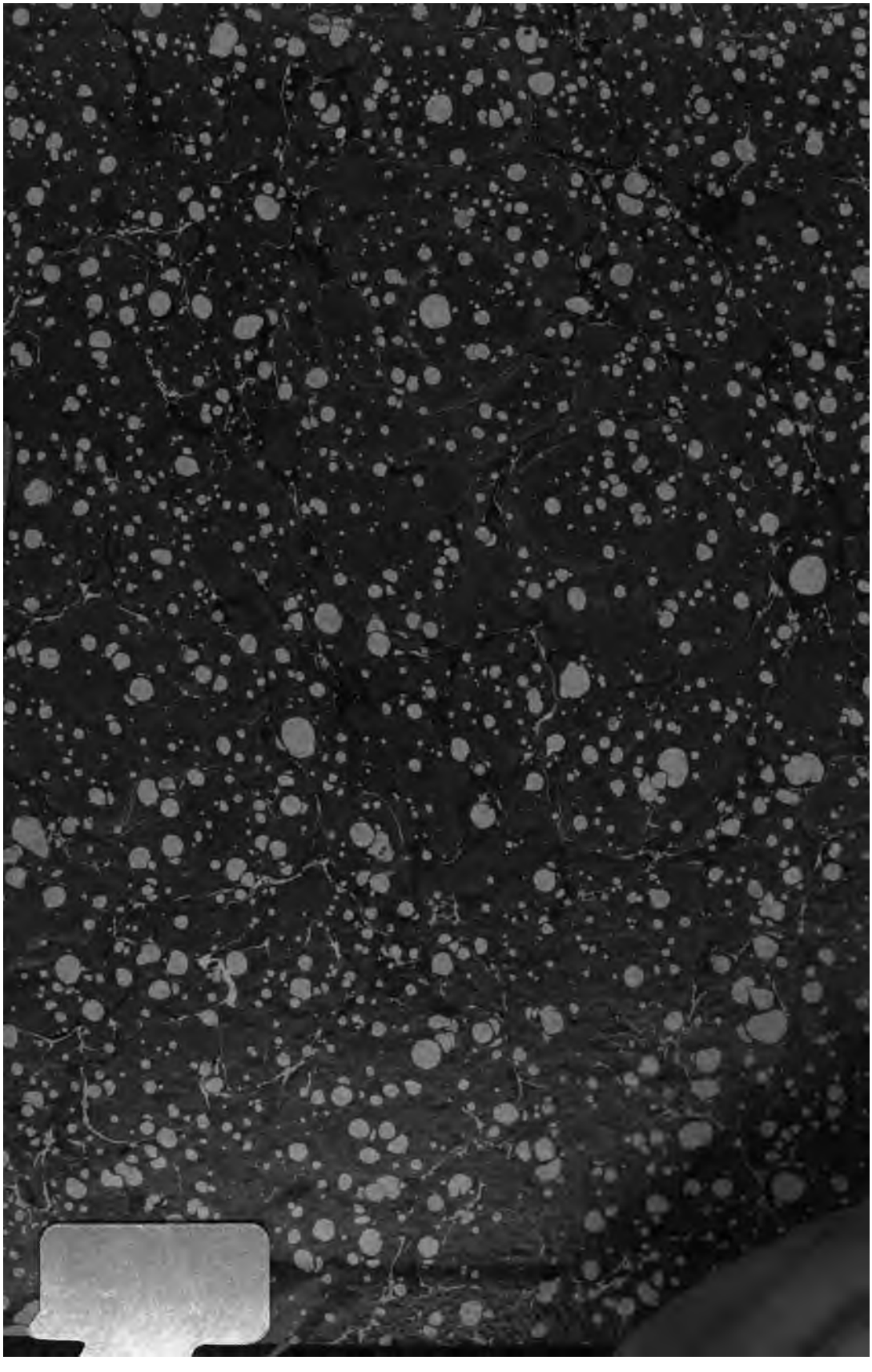
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Stanford University Libraries
3 6105 001 021 943



101 K.

MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, DAVID HILBERT, CARL NEUMANN, MAX NOETHER,
KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther Dyck
in München

Adolph Mayer
in Leipzig.

52. Band.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1899.

LIBRARY OF THE
LELAND STANFORD JR. UNIVERSITY.
a. 43943.
SEP 5 1900

Inhalt des zweiundfünfzigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Seite

Abraham, Max, in Berlin. Ueber einige, bei Schwingungsproblemen auftretende, Differentialgleichungen 81

Baur, L., in Darmstadt. Ueber die verschiedenen Wurzeln einer algebraischen Gleichung und deren Ordnungen 113

Brodén, T., in Lund. Ueber das Dirichlet'sche Integral 177

Burnside, W., in Greenwich. Note on the simple group of order 504 . . 174

Dickson, Leonard Eugene, in Austin, Texas. The Structure of the Linear Homogeneous Groups Defined by the Invariant $\lambda_1 \xi_1^r + \lambda_2 \xi_2^r + \cdots + \lambda_m \xi_m^r$ 561

Enriques, Federigo, in Bologna. Sopra le superficie algebriche che contengono un fascio di curve razionali 449

Franel, J., in Zürich. Sur la théorie des séries 529

Fricke, Robert, in Braunschweig. Ueber eine einfache Gruppe von 504 Operationen 321

Gordan, P., in Erlangen. Symmetrische Functionen 501

Greenhill, A. G., in Woolwich (England). The Elastic Curve, under uniform normal pressure 465

Hirsch, Arthur, in Zürich. Ueber bilineare Relationen zwischen hypergeometrischen Integralen höherer Ordnung 130

Horn, J., in Charlottenburg. Ueber eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einem willkürlichen Parameter 271

——— Ueber lineare Differentialgleichungen mit einem veränderlichen Parameter 340

Hoyer, P., in Burg b. Magdeburg. Die algebraische Lösung des Problems der Substitutionsgruppen 550

Juga, Georg, in Bukarest. Ueber die Constantenbestimmung bei einer cyklischen Minimalfläche 167

Kohn, Gustav, in Wien. Ueber die cubischen Raumcurven, welche die Tangentenfläche einer gegebenen cubischen Raumcurve in vier, fünf oder sechs Punkten berühren 293

Krazer, A., in Strassburg i. E. Ueber allgemeine Thetaformeln 369

Liebmann, H., in Leipzig. Kürzeste und geradeste Linien im Möbius'schen Nullsystem 120

Lilienthal, R. v., in Münster i. W. Ueber kürzeste Integralcurven einer Pfaff'schen Gleichung 417

Loewy, Alfred, in Freiburg i. Br. Ueber die Charakteristik einer reellen quadratischen Form von nicht verschwindender Determinante 588

Seite

Maschke, Heinrich, in Chicago. Beweis des Satzes, dass diejenigen endlichen linearen Substitutionsgruppen, in welchen einige durchgehends verschwindende Coefficienten auftreten, intransitiv sind 359

Nielsen, Niels, in Kopenhagen. Sur le produit de deux fonctions cylindriques 228

——— Sur le développemont du zéro en séries de fonctions cylindriques 582

Osgood, W. F., in Cambridge (Mass.). Note über analytische Functionen mehrerer Veränderlicher 462

Pasch, M., in Giessen. Ueber eine Invariante der trilinearen ternären Form 127

Preisaufgabe der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft. 317

Schwering, K., in Trier. Zur Theorie der Bernoulli'schen Zahlen 171

Scorza, G., in Pisa. Un nuovo teorema sopra le quartiche piane generali 457

Scott, Charlotte Angas, in Bryn Mawr. A proof of Noether's fundamental theorem 593

Stäckel, Paul, in Kiel. Die Entdeckung der einseitigen Flächen 598

Steinitz, Ernst, in Charlottenburg. Zur Theorie der Moduln 1

——— Stetigkeit und Differentialquotient 58

Sujet du prix de mathématiques à décerner en 1901, proposé par l'Académie des Sciences de Toulouse 319

Wellstein, J., in Strassburg i. E. Zur Functionen- und Invariantentheorie der binomischen Gebilde 70

— --- -- Zur Transformation der Querschnitte Riemann'scher Flächen . . 433

——— Zur Theorie der Functionenclasse $s^3 = (z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)$ . . 440

Wiman, A., in Lund. Ueber die Darstellung der symmetrischen und alternirenden Vertauschungsgruppen als Collineationsgruppen von möglichst geringer Dimensionenzahl 243

Zur Theorie der Moduln.

Von

Ernst Steinitz in Charlottenburg.

Die folgenden Untersuchungen beziehen sich auf diejenigen Moduln, deren Einführung in die Zahlentheorie man Dedekind verdankt. Im elften Supplement zu den von ihm herausgegebenen Dirichlet'schen Vorlesungen findet sich die Theorie der Moduln in ihren Grundzügen dargestellt. Ausserdem kommen hier noch zwei Arbeiten in Betracht: Frobenius: Theorie der linearen Formen mit ganzen Coefficienten; Frobenius und Stickelberger: Ueber Gruppen von vertauschbaren Elementen (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 86, 88). In der letzteren ist der Zusammenhang zwischen den Moduln und den Gruppen vertauschbarer Elemente klargelegt, und es ist hiernach ein Leichtes, die Resultate, welche in der einen Theorie gewonnen werden, auf die andere zu übertragen. Daher werde ich mich, obgleich es nahe läge, gruppentheoretische Fragen mit in Betracht zu ziehen, auf die Behandlung der Moduln beschränken.

Ich führe zunächst die wichtigsten hierher gehörigen Sätze von Dedekind und Frobenius an in der Form und mit den Bezeichnungen, deren ich mich in der Folge stets bedienen werde.

§ 1.

Rechteckige Systeme; ihre Eintheilung in Classen.

1. Rechteckige Systeme.

Mit grossen lateinischen Buchstaben werden im Folgenden Systeme von ganzen rationalen Zahlen*) bezeichnet, die nach Zeilen und Colonnen geordnet sind. Auf solche Systeme sollen die Operationen: Addition, Subtraction, Multiplication in der Weise angewandt werden, wie dies allgemein üblich ist. Die Ausführbarkeit der Addition und

*) An dieser Voraussetzung, dass die Elemente ganze rationale Zahlen sind, wird stets festgehalten werden.

Subtraction erfordert, dass die rechteckigen Systeme gleich viele Zeilen und gleich viele Colonnen enthalten, die Ausführbarkeit der Multiplication, dass die Anzahl der Colonnen eines jeden Factors gleich der Anzahl der Zeilen des folgenden ist, das Product hat dann so viele Zeilen wie sein erster und so viele Colonnen wie sein letzter Factor.

Die Anzahl der Colonnen eines rechteckigen Systems A heisse sein Grad. Ist derselbe gleich n und $0 < k \leqq n$, so heisst der grösste gemeinsame Divisor der Determinanten k^{ten} Grades in A „der k^{te} Determinantentheiler von A“. Dabei sei noch bemerkt, dass der grösste gemeinsame Theiler gegebener Zahlen positiv genommen und nur dann $= 0$ gesetzt werden soll, wenn die Zahlen sämmtlich gleich Null sind. Ist die Anzahl r der Zeilen von $A < n$, so sollen doch n Determinantentheiler gezählt werden, indem bestimmt wird, dass für $k > r$ der k^{te} Determinantentheiler $= 0$ zu setzen ist. Die Anzahl der von 0 verschiedenen Determinantentheiler eines Rechtecks heisst sein „Rang“.

Ist das System A quadratisch, so wird es Diagonalsystem genannt, wenn alle Elemente ausserhalb der Diagonale verschwinden. Sind $a_1, a_2, \ldots a_n$ die Diagonalelemente eines solchen Systems, so soll dasselbe auch mit $\mathrm{Dg}\,(a_1 | a_2 | \ldots a_n)$ bezeichnet werden. Dieses Diagonalsystem heisst ein „Hauptsystem“, wenn keines der Elemente a negativ und ein jedes Divisor des folgenden ist. Ein quadratisches System A heisst unimodular, wenn seine „Norm“ (Nm A) — d. h. der absolute Werth seiner Determinante — gleich 1 ist. Mit dem Buchstaben E sollen stets nur unimodulare Systeme, mit dem Symbol E_+ solche von der Determinante $+1$ bezeichnet werden. Ist E^0 das Diagonalsystem n^{ten} Grades, dessen sämmtliche Diagonalelemente gleich 1 sind, so bestehen für jedes quadratische System n^{ten} Grades A die Gleichungen $AE^0 = A$, $E^0 A = A$, und zu jedem unimodularen System E gehört ein zweites E^{-1}, für welches $EE^{-1} = E^{-1}E = E^0$ wird.

2. Eintheilung der quadratischen Systeme in Classen.

Wir wollen uns nun zunächst auf die Betrachtung quadratischer Systeme beschränken.

Definition 1. Sind A und B quadratische Systeme desselben Grades n, und lässt A sich darstellen als ein Product, in welchem B als Factor enthalten ist, so wird gesagt: „Die Classe des Systems A (Cl A) ist theilbar durch die Classe des Systems B“.

Ist Cl A theilbar durch Cl B, Cl B theilbar durch Cl C, so ist, wie man sofort erkennt, auch Cl A theilbar durch Cl C.

Definition 2. Zwei Classen heissen gleich, wenn jede durch die andere theilbar ist.

Man überzeugt sich leicht von der Zulässigkeit dieser Definitionen. — Die sämmtlichen quadratischen Systeme werden hiernach in

Classen eingetheilt, jede Classe ist durch ein einziges in ihr enthaltenes System vollständig bestimmt.

Es entstehen nun die Aufgaben: wenn zwei quadratische Systeme A und B gegeben sind, zu entscheiden, ob Cl A durch Cl B theilbar ist, bez. ob die Systeme A und B derselben Classe angehören. Diese Fragen werden durch zwei, wohl zuerst von Frobenius entwickelte im Folgenden als Fundamentalsatz I und II bezeichnete Theoreme entschieden.

Fundamentalsatz I. Damit zwei quadratische Systeme A und B derselben Classe angehören, ist nothwendig und hinreichend, dass sie dieselben Determinantentheiler besitzen. Ist diese Forderung erfüllt, so lässt sich A stets in der Form $A = EBE'$ und, wenn überdies die Determinanten von A und B auch dem Vorzeichen nach übereinstimmen, auch in der Form $A = E_+ B E'_+$ darstellen.

Zu diesem Satze gesellt sich ein zweiter, welcher zugleich eine wichtige Eigenschaft der Determinantentheiler erkennen lässt.

Ia. Jede Classe enthält ein und nur ein Hauptsystem.

Ist Dg $(e_1 | e_2 | \ldots e_n)$ ein Hauptsystem und sind $d_1, d_2, \ldots d_n$ seine Determinantentheiler, so ist $d_k = e_1 . e_2 \ldots e_k$. Sind daher $d_1, d_2, \ldots d_n$ die Determinantentheiler irgend eines quadratischen Systems, und sind die ersten r unter ihnen von 0 verschieden, so sind

$$e_1 = d_1, \; e_2 = \frac{d_2}{d_1}, \; \ldots \; e_r = \frac{d_r}{d_{r-1}}, \; e_{r+1} = 0, \; \ldots \; e_n = 0$$

die Elemente des Hauptsystems seiner Classe, also ist von den Quotienten $\frac{d_1}{1}, \frac{d_2}{d_1}, \ldots \frac{d_r}{d_{r-1}}$ jeder ein Divisor des folgenden.

Die Diagonalelemente des Hauptsystems heissen die „Elementartheiler" oder „Invarianten" seiner Classe oder auch eines jeden Systems dieser Classe. Classen werden im Folgenden durch grosse griechische Buchstaben oder auch durch Angabe ihrer Invarianten bezeichnet, indem, wenn $a_1, a_2, \ldots a_n$ die Invarianten von Cl $A = \mathsf{A}$ sind,

$$\mathsf{A} = \mathrm{Cl}\,(a_1 | a_2 | \ldots a_n)$$

gesetzt wird. Alle Systeme einer Classe A stimmen im Grade, Range, in der Norm und den Determinantentheilern überein, wesshalb auch vom Grade, Range u. s. w. der Classe A gesprochen werden kann.

Fundamentalsatz II. Die Classe A ist dann und nur dann durch die Classe B theilbar, wenn jede Invariante von A durch die entsprechende Invariante von B theilbar ist.

Es mögen nun zur Erleichterung der Ausdrucksweise noch einige einfache Bezeichnungen eingeführt werden. Der grösste gemeinsame Theiler von s Zahlen $a_1, a_2, \ldots a_s$ werde mit

$$(a_1, a_2, \ldots a_s)$$

bezeichnet, ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches mit

$$[a_1, a_2, \dots a_s].$$

Das letztere ist, sobald eine der Zahlen a verschwindet, $= 0$ zu setzen, sonst positiv zu nehmen. — Sind jetzt $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \dots \mathsf{A}_s$ Classen n^{ten} Grades, ist

$$\mathsf{A}_i = \mathrm{Cl}\,(a_{i1} \mid a_{i2} \mid \dots a_{in}) \quad (i = 1, \dots s)$$

und wird

$$(a_{1k}, a_{2k}, \dots a_{sk}) = d_k, \quad [a_{1k}, a_{2k}, \dots a_{sk}] = c_k \quad (k = 1, \dots n)$$

gesetzt, so bilden $d_1, d_2, \dots d_n$ das Invariantensystem einer gewissen Classe n^{ten} Grades, und dasselbe gilt von den Zahlen $c_1, c_2, \dots c_n$. Die erste dieser Classen sei mit

$$(\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \dots \mathsf{A}_s),$$

die zweite mit

$$[\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \dots \mathsf{A}_s]$$

bezeichnet. $(\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \dots \mathsf{A}_s)$ ist der grösste gemeinsame Divisor, $[\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \dots \mathsf{A}_s]$ das kleinste gemeinsame Vielfache der Classen $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \dots \mathsf{A}_s$, d. h. die sämmtlichen den Classen $\mathsf{A}_1, \dots \mathsf{A}_s$ gemeinsamen Divisoren sind die sämmtlichen Divisoren von $(\mathsf{A}_1, \dots \mathsf{A}_s)$, und die sämmtlichen den Classen $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \dots \mathsf{A}_s$ gemeinsamen Vielfachen sind die sämmtlichen Vielfachen von $[\mathsf{A}_1, \dots \mathsf{A}_s]$. — Die Classe n^{ten} Grades, deren Invarianten alle gleich 1 sind, welche daher ein Divisor jeder Classe n^{ten} Grades ist, werde mit $\mathsf{E}^{(n)}$ bezeichnet (bez. nur durch E, wenn der Grad aus dem Zusammenhange ersichtlich ist). — Zwei Classen A, B heissen relativ prim, wenn $(\mathsf{A}, \mathsf{B}) = \mathsf{E}$ ist.

3. Classen von positiver Norm.

Ist $\mathsf{A} = \mathrm{Cl}\,(a_1 \mid a_2 \mid \dots a_n)$ eine Classe von positiver Norm und $\mathrm{Nm}\,\mathsf{A} = a$ das Product der relativen Primzahlen a', a'', so hat A nur einen Divisor A' von der Norm a' und einen Divisor A'' von der Norm a''. Diese Classen

$$\mathsf{A}' = \mathrm{Cl}\,\big((a_1, a') \mid (a_2, a') \mid \dots (a_n, a')\big),$$

$$\mathsf{A}'' = \mathrm{Cl}\,\big((a_1, a'') \mid (a_2, a'') \dots (a_n, a'')\big)$$

heissen „Componenten“ von A, A ist in die Componenten A' und A'' „zerlegbar“. Charakteristisch für diese Zerlegbarkeit sind die Relationen

$$(\mathsf{A}', \mathsf{A}'') = \mathsf{E}, \quad [\mathsf{A}', \mathsf{A}''] = \mathsf{A}.$$

Die Zerlegung von A kann soweit fortgesetzt werden, bis man zu primären Classen gelangt, d. h. zu solchen Classen, deren Norm die Potenz einer Primzahl ist. Bezeichnet man allgemein, unter m eine

positive ganze Zahl, unter p eine Primzahl verstehend, mit m_p die höchste in m aufgehende Potenz von p, und setzt man dementsprechend

$$\mathsf{A}_p = \mathrm{Cl}\,(a_1 \mid a_2 \mid \ldots a_n),$$

so ist A_p die primäre Componente von A, welche der Primzahl p entspricht. Für Primzahlen p, die in Nm A nicht aufgehen, wird $\mathsf{A}_p = \mathsf{E}$. Jede Classe A von positiver Norm lässt sich nur auf eine Weise in primäre Componenten zerlegen und ist das kleinste gemeinsame Vielfache derselben. Ist A durch B teilbar, so ist für jede Primzahl p A_p durch B_p theilbar, und wenn für jede Primzahl p A_p durch B_p theilbar ist, so ist A durch B theilbar. Sind $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots \mathsf{A}_s, \Delta, \Gamma$ Classen von positiver Norm, so sind die Relationen

$$(\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots \mathsf{A}_s) = \Delta, \quad [\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots \mathsf{A}_s] = \Gamma$$

bez. äquivalent den Relationensystemen

$$(\mathsf{A}_{1p}, \mathsf{A}_{2p}, \ldots \mathsf{A}_{sp}) = \Delta_p, \quad [\mathsf{A}_{1p}, \mathsf{A}_{2p}, \ldots \mathsf{A}_{sp}] = \Gamma_p.$$

4. Eintheilung der rechteckigen Systeme in Classen.

Um nun auch alle rechteckigen Systeme in die Classen einzureihen, werde festgesetzt, dass jedes rechteckige System A der Classe angehören soll, welche dieselben Determinantentheiler besitzt wie A. Werden die Invarianten der Classe Cl A auch als Invarianten des Systems A bezeichnet, so gilt der Satz:

Sind A und B rechteckige Systeme, so ist, damit eine Gleichung von der Form

$$A = P.B.Q$$

möglich sei, nothwendig und hinreichend, dass $\mathrm{Rg}\,A \leqq \mathrm{Rg}\,B$ und jede positive Invariante von A durch die entsprechende Invariante von B theilbar ist.

Falls A und B gleichen Grad haben, kommt diese Bedingung darauf hinaus, dass Cl A durch Cl B theilbar sein muss. Haben die Rechtecke A und B gleichen Grad (n) und dieselbe Anzahl von Zeilen (r) und ist Cl A durch Cl B theilbar, so sind in einer Gleichung von der Form $A = P.B.Q$ P und Q quadratische Systeme, und wenn Cl A = Cl B ist, so kann man es stets so einrichten, dass P und Q unimodular werden.

§ 2.

Moduln.

Ein System von Zahlen heisst nach Dedekind ein „Modul", wenn die Differenz zweier beliebiger Zahlen des Systems wieder dem System angehört. Der Modul $\mathfrak{a}$ heisst theilbar durch den Modul $\mathfrak{b}$ (ein Vielfaches von $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}$ ein Divisor von $\mathfrak{a}$), wenn jede Zahl von $\mathfrak{a}$ auch in $\mathfrak{b}$ enthalten ist. Gehören die Zahlen

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$$

dem Modul $\mathfrak{a}$ an, so gilt dasselbe von jeder Zahl von der Form

$$\alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_r\alpha_r, \tag{1}$$

worin die Coefficienten c ganze rationale Zahlen bedeuten. Der Modul $\mathfrak{a}$ heisst ein endlicher, wenn man ihm eine endliche Anzahl von Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ entnehmen kann so, dass jede Zahl von $\mathfrak{a}$ in der Form (1) darstellbar ist. Von den Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ heisst es dann, dass sie eine Basis von $\mathfrak{a}$ bilden, und es werde dies gekennzeichnet, indem

$$\mathfrak{a} = \mathrm{Md}\,(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r)$$

gesetzt wird. Die Basis heisst eine reducirte, wenn der Ausdruck (1) nicht anders verschwinden kann, als indem alle Coefficienten verschwinden. Dann lässt sich jede Zahl α von $\mathfrak{a}$ nur auf eine Weise in die Form (1) bringen, jede Basis von $\mathfrak{a}$ besteht aus wenigstens r Zahlen, und der Modul $\mathfrak{a}$ wird ein r-gliedriger genannt. Jedes Vielfache eines r-gliedrigen Moduls ist höchstens r-gliedrig.

Hat man einen n-gliedrigen Modul

$$\mathfrak{e} = \mathrm{Md}\,(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n),$$

betrachtet man nur Zahlen dieses Moduls, und nimmt man mit diesen Zahlen keine anderen Operationen als Addition und Subtraction vor, so können die Basiselemente $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ als unbestimmte Grössen betrachtet werden. Es kommt dies darauf hinaus, an Stelle der in $\mathfrak{e}$ enthaltenen Zahlen

$$\eta = c_1\eta_1 + \cdots + c_n\eta_n$$

die Systeme der n Coefficienten

$$c_1, c_2, \ldots c_n,$$

vermöge deren sich die Zahlen η aus den Zahlen $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ zusammensetzen, zu betrachten. Ein solches Coefficientensystem denken wir uns stets in einer horizontalen Reihe angeordnet. Indem wir dies thun, im Uebrigen aber die bisher gebrauchten Bezeichnungen beibehalten, haben wir unter einem Modul eine Gesammtheit von Systemen oder „Zeilen" σ zu verstehen, welche sich durch Subtraction reproduciren.

Es sei nun

$$\mathfrak{a} = \mathrm{Md}\,(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r)$$

ein beliebiger Modul. Bildet man das Rechteck A, dessen Zeilen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ sind, so ist durch dasselbe der Modul $\mathfrak{a}$ vollständig bestimmt. Wir bezeichnen das Rechteck A als eine Basis des Moduls $\mathfrak{a}$ und setzen:

$$\mathfrak{a} = \mathrm{Md}\,A.$$

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass der Modul $\mathfrak{b} = \mathrm{Md}\,B$ durch den Modul $\mathfrak{a} = \mathrm{Md}\,A$ theilbar sei, besteht offenbar in der Existenz einer Gleichung von der Form

$$B = P\,.\,A.$$

Hieraus ergiebt sich, wenn man die in § 1 angegebenen Definitionen und Sätze berücksichtigt:

Sind die Rechtecke $A_1, A_2, \ldots$ Basen eines und desselben Moduls $\mathfrak{a}$, so gehören sie alle derselben Classe an. Diese Classe werden wir zweckmässig als die Classe des Moduls $\mathfrak{a}$ bezeichnen, sodass

$$\mathrm{Cl}\,A_1 = \mathrm{Cl}\,A_2 = \cdots = \mathrm{Cl}\,\mathfrak{a}$$

wird. Indem wir nun die früher eingeführten Begriffe von der Classe auf die ihr angehörigen Moduln übertragen, ergiebt sich von selbst, was wir unter dem Grade, dem Range, der Norm eines Moduls $\mathfrak{a}$ ($\mathrm{Gd}\,\mathfrak{a}$, $\mathrm{Rg}\,\mathfrak{a}$, $\mathrm{Nm}\,\mathfrak{a}$), seinen Determinantentheilern und Invarianten werden zu verstehen haben. Man erkennt, dass der Rang eines Moduls dasselbe ist, was früher als seine Gliedrigkeit bezeichnet wurde, dass also ein Modul vom Range r r-gliedrig ist. — Theilbarkeit kann natürlich nur zwischen Moduln desselben Grades stattfinden.

Ich führe nun einige wichtige Sätze aus der Theorie der Moduln an, von denen späterhin vielfach wird Gebrauch gemacht werden.

I. Ist $\mathrm{Rg}\,\mathfrak{a} = r$, so besitzt der Modul $\mathfrak{a}$ eine Basis von k Systemen dann und nur dann, wenn $k \geqq r$ ist. Da $\mathrm{Gd}\,\mathfrak{a} \geqq \mathrm{Rg}\,\mathfrak{a}$ ist, so besitzt jeder Modul n^{ten} Grades auch eine Basis von n Systemen (quadratische Basis).

II. Jeder Modul $\mathfrak{a}$ besitzt eine quadratische Basis von der Form AE, wo A das Hauptsystem von $\mathrm{Cl}\,\mathfrak{a}$ ist.

Die Classe $\mathsf{E}^{(n)}$ besitzt nur einen Modul, derselbe ist ein Divisor jedes Moduls n^{ten} Grades; er werde mit $\mathfrak{e}^{(n)}$ (bez. $\mathfrak{e}$) bezeichnet. Jedes unimodulare System n^{ten} Grades ist eine Basis von $\mathfrak{e}^{(n)}$. — Satz II kann nun auch so formulirt werden:

IIa. Ist $\mathrm{Cl}\,\mathfrak{a} = \mathsf{A} = \mathrm{Cl}\,(a_1 | a_2 | \ldots a_n)$, so kann man n Zeilen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ angeben von der Beschaffenheit, dass

$$\mathrm{Md}\,(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) = \mathfrak{e}, \quad \mathrm{Md}\,(a_1\,.\,\alpha_1, a_2\,.\,\alpha_2, \ldots a_n\,.\,\alpha_n) = \mathfrak{a}$$

wird. Ist $\mathrm{Rg}\,\mathfrak{a} = r$, so ist $\mathfrak{a}$ auch gleich $\mathrm{Md}\,(a_1\alpha_1, \ldots a_r\alpha_r)$.

III. Ist der Modul $\mathfrak{a}$ ein Vielfaches von $\mathfrak{b}$, so ist Cl $\mathfrak{a}$ ein Vielfaches von Cl $\mathfrak{b}$; und wenn die Classe A ein Vielfaches von B ist, so besitzt jeder Modul von A wenigstens einen Divisor innerhalb B und jeder Modul von B wenigstens ein Vielfaches innerhalb A.

IV. Ist $\mathfrak{a}$ ein Vielfaches von $\mathfrak{b}$, Cl $\mathfrak{a}$ ein Divisor von Cl $\mathfrak{b}$, so ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.

Sind $\mathfrak{a}_1 = \mathrm{Md}\, A_1$, $\mathfrak{a}_2 = \mathrm{Md}\, A_2$, $\ldots$ $\mathfrak{a}_s = \mathrm{Md}\, A_s$ Moduln desselben Grades n, so besitzen sie einen grössten gemeinsamen Divisor, d. h. es existirt ein bestimmter Modul $\mathfrak{b}$ von der Beschaffenheit, dass jeder den Moduln $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_s$ gemeinsame Divisor ein Divisor von $\mathfrak{b}$ ist, und umgekehrt. Das Rechteck, dessen Zeilen die sämmtlichen Zeilen der Rechtecke $A_1, A_2, \ldots A_s$ sind, ist eine Basis dieses Moduls. Die Moduln $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_s$ haben aber auch ein kleinstes gemeinsames Vielfaches, d. h. es existirt ein bestimmter Modul $\mathfrak{c}$ von der Beschaffenheit, dass jedes den Moduln $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_s$ gemeinsame Vielfache ein Vielfaches von $\mathfrak{c}$ ist, und umgekehrt. Einfache Ueberlegungen zeigen, wie man durch eine endliche Anzahl von Operationen eine Basis dieses Moduls $\mathfrak{c}$ finden kann auch in den Fällen, in welchen unter den Moduln $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_s$ solche von verschwindender Norm sich vorfinden. Es werde mit

$$(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_s), \quad [\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_s]^*)$$

der grösste gemeinsame Theiler bez. das kleinste gemeinsame Vielfache der Moduln $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_s$ bezeichnet.

Dass der Modul $\mathfrak{a}$ ein Vielfaches des Moduls $\mathfrak{b}$ ist, kann durch jede der Gleichungen

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{b}, \quad [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = \mathfrak{a}$$

ausgedrückt werden, aber auch, weil $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ jedenfalls Divisor von $\mathfrak{b}$ ist, (zufolge Satz IV) durch die Gleichung

$$\mathrm{Cl}\,(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \mathrm{Cl}\,\mathfrak{b}.$$

Hierin hat man ein einfaches Mittel, um zu erkennen, ob von zwei Moduln $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$, deren jeder durch eine Basis gegeben ist, der erste den zweiten zum Divisor hat. Da man nämlich dann auch eine Basis von $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ hat, so kann man sofort die Classe des Moduls $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ bestimmen, und hat nur zu sehen, ob dieselbe mit Cl $\mathfrak{b}$ identisch ist oder nicht.

V. Zwischen den Normen zweier Moduln $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$, ihres grössten gemeinsamen Theilers und ihres kleinsten gemeinsamen Vielfachen besteht die Beziehung:

$$\mathrm{Nm}\,\mathfrak{a} \,.\, \mathrm{Nm}\,\mathfrak{b} = \mathrm{Nm}\,(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \,.\, \mathrm{Nm}\,[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}].$$

Ist A das Hauptsystem der Classe A, so heisse der Modul Md A der „Hauptmodul" der Classe A. — Damit die Classe A durch B theilbar

*) Bei Dedekind $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \cdots + \mathfrak{a}_s$ bez. $\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_2 - \cdots - \mathfrak{a}_s$.

sei, ist nothwendig und hinreichend, dass der Hauptmodul von A durch den Hauptmodul von B theilbar ist. Der grösste gemeinsame Theiler (bez. das kleinste gemeinsame Vielfache) der Hauptmoduln der Classen $A_1, A_2, \ldots A_s$ ist der Hauptmodul der Classe $(A_1, A_2, \ldots A_s)$ (bez. $[A_1, A_2, \ldots A_s]$). Zwei Moduln $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ heissen relativ prim, wenn $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{e}$ ist.

2. Unimodulare Transformationen.

Sind A und B quadratische Systeme n^{ten} Grades, ist E ein unimodulares System desselben Grades und besteht zwischen A und B eine Gleichung von der Form

$$A = CB, \tag{2}$$

so folgt

$$AE = CBE. \tag{3}$$

Umgekehrt ist auch (2) eine Folge von (3). Dieses Resultat kann so ausgesprochen werden:

Ist Md A theilbar durch Md B, so ist Md AE theilbar durch Md BE, und umgekehrt. — Von den Beziehungen

$$\text{Md } A = \text{Md } B, \quad \text{Md } AE = \text{Md } BE \tag{4}$$

ist daher jede eine Folge der andern. Für jede quadratische Basis A eines bestimmten Moduls $\mathfrak{a}$ stellt also AE die Basis eines bestimmten zweiten Moduls $\mathfrak{a}'$ dar. Wir sagen deshalb:

„Der Modul $\mathfrak{a}$ wird durch die unimodulare Transformation $[E]$ in den Modul $\mathfrak{a}'$ übergeführt“

und setzen

$$\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}E.$$

Die inverse Transformation $[E^{-1}]$ führt $\mathfrak{a}'$ in $\mathfrak{a}$ zurück. —

Aus der Aequivalenz der Gleichungen (2), (3) folgt weiter:

VI. Ist der Modul $\mathfrak{a}$ durch den Modul $\mathfrak{b}$ theilbar, so ist $\mathfrak{a}E$ theilbar durch $\mathfrak{b}E$, und umgekehrt.

Durch einfache Ueberlegung schliesst man hieraus:

VII. Der grösste gemeinsame Divisor (das kleinste gemeinsame Vielfache) der Moduln $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_s$ wird durch die unimodulare Transformation $[E]$ in den grössten gem. Theiler (bez. das kleinste gem. Vielfache) der transformirten Moduln übergeführt; oder die Relationen

$$(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_s)E = (\mathfrak{a}_1 E, \mathfrak{a}_2 E, \ldots \mathfrak{a}_s E),$$
$$[\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_s]E = [\mathfrak{a}_1 E, \mathfrak{a}_2 E, \ldots \mathfrak{a}_s E]$$

bestehen identisch.

Ist A eine quadratische Basis des Moduls $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}E = \mathfrak{a}'$, so ist $\mathfrak{a}' = \text{Md } AE$, $\text{Cl } \mathfrak{a}' = \text{Cl } AE = \text{Cl } A = \text{Cl } \mathfrak{a}$. Ist umgekehrt $\mathfrak{a}' = \text{Md } A'$

ein Modul der Classe Cl $\mathfrak{a}$, A' quadratisch, so kann (Fundamentalsatz I) $A' = E_1 A E_2$ gesetzt werden, und es folgt

$$\mathfrak{a}' = \mathrm{Md}\, E_1 A E_2 = \mathrm{Md}\, A E_2 = \mathfrak{a} E_2 .$$

Also:

VIII. Ein Modul $\mathfrak{a}$ kann durch unimodulare Transformationen in jeden Modul seiner Classe aber in keinen weiteren Modul übergeführt werden.

Hierauf beruht es, dass alle wesentlichen Eigenschaften eines Moduls durch seine Classe bestimmt sind.

Eine der wichtigsten von uns zu lösenden Aufgaben soll in der Bestimmung der Anzahl von Moduln bestehen, welche zu derselben (durch ihr Invariantensystem gegebenen) Classe A gehören. Wir bezeichnen diese Anzahl, welche eine „Function von A" darstellt, mit

$$\psi(\mathsf{A}) .$$

Man erkennt leicht, dass für Classen, deren Norm verschwindet, $\psi(\mathsf{A}) = \infty$ wird, mit Ausnahme des Falles, dass alle Invarianten von A verschwinden, in welchem offenbar $\psi(\mathsf{A}) = 1$ zu setzen ist. Wir werden uns daher auf die Bestimmung der Function ψ für Classen von positiver Norm beschränken können.

3. Multiplication der Moduln mit einer Zahl.

Sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ Zeilen von je n ganzen Zahlen und ist m eine beliebige ganze Zahl, so besteht der Modul Md $(m\alpha_1, m\alpha_2, \ldots m\alpha_r)$ aus allen Zeilen, welche aus den Zeilen des Moduls Md $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ durch Multiplication mit m hervorgehen. Wir bezeichnen ihn mit „$m.\mathfrak{a}$" und wollen $m > 0$ voraussetzen. Ist alsdann $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{b}$ theilbar, so folgt, dass $m\mathfrak{a}$ durch $m\mathfrak{b}$ theilbar ist, und umgekehrt. Hat der Modul $\mathfrak{a}$ die Invarianten $a_1, a_2, \ldots a_n$, so hat $m\mathfrak{a}$ die Invarianten $ma_1, ma_2, \ldots ma_n$; hat andererseits ein Modul $\mathfrak{c}$ die Invarianten $ma_1, ma_2, \ldots ma_n$, so kann man $\mathfrak{c} = m\mathfrak{a}'$ setzen, und es sind dann $a_1, a_2, \ldots a_n$ die Invarianten von $\mathfrak{a}'$. Ist daher $\mathsf{A} = \mathrm{Cl}\,(a_1 | a_2 | \ldots a_n)$ eine beliebige Classe und wird Cl $(ma_1 | ma_2 | \ldots ma_n) = m\mathsf{A}$ gesetzt, so enthalten die Classen A und mA gleich viele Moduln, d. h. es ist

IX. $$\psi(m.\mathsf{A}) = \psi(\mathsf{A}) .$$

Die Classe E enthält nur den Modul $\mathfrak{e}$, mithin mE nur den einzigen Modul $m\mathfrak{e}$, so dass für jedes unimodulare System E $m\mathfrak{e}E = m\mathfrak{e}$ wird.

X. Damit der Modul $\mathfrak{a}$ Divisor bez. Vielfaches von $m\mathfrak{e}$ sei, ist nothwendig (Satz III) und hinreichend, dass Cl $\mathfrak{a} = \mathsf{A}$ Divisor bez. Vielfaches von mE ist.

Ist nämlich die angegebene Bedingung erfüllt, so ist der Hauptmodul $\mathfrak{a}'$ von A Divisor bez. Vielvaches von $m\mathfrak{e}$. Sodann kann (Satz VIII)

$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}' E$ gesetzt werden, woraus folgt, dass $\mathfrak{a}$ Divisor bez. Vielfaches von $m\mathfrak{e} E = m\mathfrak{e}$ ist. — Ganz ähnlich beweist man den Satz:

XI. Ist A eine beliebige Classe desselben Grades wie E, $\mathfrak{a}$ ein beliebiger Modul von A, so ist

$$\mathrm{Cl}\,(\mathfrak{a}, m\mathfrak{e}) = (\mathsf{A}, m\mathsf{E}), \quad \mathrm{Cl}\,[\mathfrak{a}, m\mathfrak{e}] = [\mathsf{A}, m\mathsf{E}].$$

4. Moduln von positiver Norm.

XII. Ist $\mathfrak{a}$ ein Modul der Classe A, $\mathrm{Nm}\,\mathfrak{a} = \mathrm{Nm}\,\mathsf{A} = a > 0$, a das Product der relativen Primzahlen a' und a'', und sind A′ und A″ die Componenten von A, deren Normen bez. a', a'' sind, so hat $\mathfrak{a}$ einen und nur einen Divisor $\mathfrak{a}'$ in der Classe A′ und ebenso einen und nur einen Divisor $\mathfrak{a}''$ in der Classe A″, und es ist

$$\mathfrak{a} = [\mathfrak{a}', \mathfrak{a}''].$$

XIII. Sind die Classen der Moduln $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{a}''$ relativ prim, so ist

$$\mathrm{Cl}\,[\mathfrak{a}', \mathfrak{a}''] = [\mathrm{Cl}\,\mathfrak{a}', \mathrm{Cl}\,\mathfrak{a}''].$$

Beweise: Dass unter den in XII angegebenen Voraussetzungen $\mathfrak{a}$ einen Divisor $\mathfrak{a}'$ in der Classe A′ hat, besagt schon Satz III. Wir wollen nun zeigen, dass $\mathfrak{a}$ ausser $\mathfrak{a}'$ überhaupt keinen Divisor von der Norm a' hat. Hätte man nämlich noch einen zweiten solchen Modul $\mathfrak{a}_1'$, so wären $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{a}_1'$ Divisoren von $\mathfrak{a}$ und (Satz X) von $a'.\mathfrak{e}$, mithin wäre $[\mathfrak{a}', \mathfrak{a}_1']$ ein Divisor von $(\mathfrak{a}, a'\mathfrak{e})$, $\mathrm{Cl}\,[\mathfrak{a}', \mathfrak{a}_1']$ ein Divisor von $\mathrm{Cl}\,(\mathfrak{a}, a'\mathfrak{e}) = (\mathsf{A}, a'\mathsf{E}) = \mathsf{A}' = \mathrm{Cl}\,\mathfrak{a}'$, und aus Satz IV würde folgen $[\mathfrak{a}', \mathfrak{a}_1'] = \mathfrak{a}'$, d. h.: $\mathfrak{a}_1'$ ist ein Divisor von $\mathfrak{a}'$. Da aber die Normen von $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{a}_1'$ positiv und gleich sind, so folgt $\mathfrak{a}_1' = \mathfrak{a}'$. Es hat daher $\mathfrak{a}$ nur einen Divisor $\mathfrak{a}'$ in A′ und ebenso nur einen Divisor $\mathfrak{a}''$ in A″. — Aus dem Umstande, dass die Classen $\mathsf{A}' = \mathrm{Cl}\,\mathfrak{a}'$, $\mathsf{A}'' = \mathrm{Cl}\,\mathfrak{a}''$ relativ prim sind, kann man schon schliessen, dass $[\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'']$ der Classe $\mathsf{A} = [\mathsf{A}', \mathsf{A}'']$ angehört. Setzt man nämlich $\mathrm{Cl}\,[\mathfrak{a}', \mathfrak{a}''] = \mathsf{A}_1$, so ist $\mathrm{Nm}\,\mathsf{A}_1 = \mathrm{Nm}\,[\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'']$ theilbar durch $[a', a''] = a$, andererseits ist (Satz V)

$$\mathrm{Nm}\,\mathsf{A}_1 = \mathrm{Nm}\,[\mathfrak{a}', \mathfrak{a}''] = \frac{a'.a''}{\mathrm{Nm}\,(\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'')} = \frac{a}{\mathrm{Nm}\,(\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'')}$$

ein Divisor von a, also $\mathrm{Nm}\,\mathsf{A}_1 = a$. Die Moduln $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$, welche nach dem Vorhergehenden dadurch eindeutig bestimmt sind, dass sie die Normen a', a'' haben und Divisoren von $[\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'']$ sind, müssen demnach den Componenten A_1', A_1'' von A_1 angehören, welche den Bedingungen $\mathrm{Nm}\,\mathsf{A}_1' = a'$, $\mathrm{Nm}\,\mathsf{A}_1'' = a''$ genügen, und diese können mit A′, A″ nur dann identisch sein, wenn auch $\mathsf{A}_1 = \mathsf{A}$ ist. — Da endlich $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$, also auch durch $[\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'']$ theilbar und $\mathrm{Cl}\,\mathfrak{a} = \mathrm{Cl}\,[\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'']$ ist, so folgt

$$\mathfrak{a} = [\mathfrak{a}', \mathfrak{a}''].$$

Hiermit sind die Sätze XII, XIII bewiesen.

XIV. Ist der Modul $\mathfrak{a}$ von der Norm a (> 0) theilbar durch den Modul $\mathfrak{b}$ von der Norm b, ist a das Product der relativen Primzahlen a' und a'' und sind $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$ die Divisoren von $\mathfrak{a}$, welche die Normen a', a'' haben, so haben die Moduln $\mathfrak{b}' = (\mathfrak{a}', \mathfrak{b})$, $\mathfrak{b}'' = (\mathfrak{a}'', \mathfrak{b})$ die Normen $b' = (a', b)$, $b'' = (a'', b)$, und ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches ist $\mathfrak{b}$.

Beweis: $\mathrm{Nm}\,[\mathfrak{a}', \mathfrak{b}] = \frac{a' \cdot b}{\mathrm{Nm}\,(\mathfrak{a}', \mathfrak{b})}$ ist Divisor von $a' \cdot b$ aber auch von $\mathrm{Nm}\,\mathfrak{a} = a = a' \cdot a''$, also auch von $a' \cdot (a'', b) = a' \cdot b''$. Mithin ist $\mathrm{Nm}\,\mathfrak{b}' = \mathrm{Nm}\,(\mathfrak{a}', \mathfrak{b}) = \frac{a' \cdot b}{\mathrm{Nm}\,[\mathfrak{a}', \mathfrak{b}]}$ theilbar durch $\frac{a' b}{a' b''} = \frac{b}{b''} = b'$. Andererseits ist $\mathrm{Nm}\,\mathfrak{b}'$ offenbar Divisor von $(a', b) = b'$. Somit wird $\mathrm{Nm}\,\mathfrak{b}' = b'$ und ebenso $\mathrm{Nm}\,\mathfrak{b}'' = b''$. Da b' und b'' relativ prim sind, so folgt nach XII und XIII: $\mathrm{Nm}\,[\mathfrak{b}', \mathfrak{b}''] = [b', b''] = \mathrm{Nm}\,\mathfrak{b}$, und da $\mathfrak{b}$ durch $[\mathfrak{b}', \mathfrak{b}'']$ theilbar ist, so muss jetzt $[\mathfrak{b}', \mathfrak{b}''] = \mathfrak{b}$ sein.

Ist $\mathfrak{a}'$ ein Divisor des Moduls $\mathfrak{a}$ und $\mathrm{Cl}\,\mathfrak{a}' = \mathsf{A}'$ eine Componente von $\mathrm{Cl}\,\mathfrak{a} = \mathsf{A}$, so nennen wir $\mathfrak{a}'$ eine „Componente von $\mathfrak{a}$“. Aus XII, XIII ergiebt sich, dass jeder Componente von A eine bestimmte Componente von $\mathfrak{a}$, jeder Zerlegung von A in zwei Componenten A', A'' eine Zerlegung von $\mathfrak{a}$ in zwei Componenten $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{a}''$ entspricht, so dass $[\mathfrak{a}', \mathfrak{a}''] = \mathfrak{a}$ ist. Setzt man für $\mathfrak{a}'$ jeden Modul von A', für $\mathfrak{a}''$ jeden Modul von A'', so stellt $[\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'']$ jeden Modul von A einmal dar, und mithin besteht die Relation

$$\psi(\mathsf{A}) = \psi(\mathsf{A}') \cdot \psi(\mathsf{A}''). \tag{5}$$

Die Zerlegung des Moduls $\mathfrak{a}$ kann fortgesetzt werden, bis man zu seinen primären Componenten gelangt, deren Normen Primzahlpotenzen sind. Wir bezeichnen mit $\underset{p}{\mathfrak{a}}$ die der Classe $\underset{p}{\mathsf{A}}$ angehörige Componente von $\mathfrak{a}$. Aus XIV ergiebt sich nun der Satz:

XV. Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Moduln von positiver Norm, so ist für die Theilbarkeit von $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{b}$ nothwendig und hinreichend, dass für jede Primzahl p $\underset{p}{\mathfrak{b}}$ Divisor von $\underset{p}{\mathfrak{a}}$ ist.

Hieraus folgt weiter

XVI. Sind $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_s$ Moduln von positiver Norm, so sind die Relationen

$$(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_s) = \mathfrak{b},$$
$$[\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_s] = \mathfrak{c}$$

bez. äquivalent den Relationensystemen

$$(\underset{p}{\mathfrak{a}_1}, \underset{p}{\mathfrak{a}_2}, \ldots \underset{p}{\mathfrak{a}_s}) = \underset{p}{\mathfrak{b}},$$
$$[\underset{p}{\mathfrak{a}_1}, \underset{p}{\mathfrak{a}_2}, \ldots \underset{p}{\mathfrak{a}_s}] = \underset{p}{\mathfrak{c}}.$$

Endlich gewinnt man aus (5) noch die Formel:

XVII. $$\psi(\mathfrak{A}) = \prod_{p} \psi(\mathfrak{A}_p),$$

in welcher das Product sich über alle Primzahlen oder auch nur über die in Nm $\mathfrak{A}$ aufgehenden erstreckt, da für die andern $\mathfrak{A}_p = \mathfrak{E}$, $\psi(\mathfrak{A}_p) = 1$ wird.

§ 3.

Congruenzen; die Functionen φ_r und φ.

Zwei Zeilen σ, σ' von je n Elementen heissen congruent nach dem Modul n^{ten} Grades $\mathfrak{a}$ —

$$\sigma \equiv \sigma' \pmod{\mathfrak{a}} —$$

wenn $\sigma - \sigma'$ dem Modul $\mathfrak{a}$ angehört. Sind R, R' Rechtecke n^{ten} Grades von je r Zeilen, so bedeutet

$$R \equiv R' \pmod{\mathfrak{a}},$$

dass jede Zeile von R der entsprechenden Zeile von R' congruent ist. Jede Zeile von n Elementen repräsentirt einen bestimmten Rest des Moduls $\mathfrak{a}$ in dem Sinne, dass congruente Zeilen als Repräsentanten desselben Restes angesehen werden. Ebenso repräsentirt ein Rechteck n^{ten} Grades von r Zeilen einen bestimmten r-zeiligen Rest von $\mathfrak{a}$. Aus der Congruenz

$$R \equiv R' \pmod{\mathfrak{a}}$$

folgt

$$RE \equiv R'E \pmod{\mathfrak{a}E},$$

wenn E ein beliebiges unimodulares System bezeichnet. Die unimodulare Transformation $[E]$, welche $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{a}E$ überführt, führt also gleichzeitig jeden Rest von $\mathfrak{a}$ in einen bestimmten Rest von $\mathfrak{a}.E$ über. Da die Transformation eindeutig umkehrbar ist, so wird durch dieselbe eine eindeutige Beziehung zwischen den Resten von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}E$ hergestellt. Hieraus und aus § 2, VIII folgt, dass für alle Moduln einer Classe die Anzahl der Reste von bestimmter Zeilenzahl gleich gross ist. Die Betrachtung des Hauptmoduls einer Classe $\mathfrak{A}$ zeigt, dass falls Nm $\mathfrak{A} \neq 0$ ist, die Anzahl der einzeiligen Reste eines Moduls von $\mathfrak{a}$ gleich Nm $\mathfrak{A}$ ist, und folglich ist die Anzahl der r-zeiligen Reste gleich $(\text{Nm}\,\mathfrak{A})^r$. Ist dagegen Nm $\mathfrak{A} = 0$, so ist offenbar die Anzahl der Reste unendlich gross.

Fügt man zu einer Basis des Moduls $\mathfrak{a}$ die Zeilen eines Rechtecks R hinzu, so entsteht eine Basis des Moduls

$$(\mathfrak{a}, \text{Md}\, R),$$

den wir der Kürze halber nur mit

$$(\mathfrak{a}, R)$$

bezeichnen wollen. $(\mathfrak{a}, R)$ ist Divisor von $\mathfrak{a}$. Ist $R \equiv R' \pmod{\mathfrak{a}}$ so wird

$$(\mathfrak{a}, R') = (\mathfrak{a}, R).$$

Es werde jetzt $\mathrm{Nm}\,\mathfrak{a} > 0$ vorausgesetzt und es stelle die Gleichung

$$\mathfrak{a} = [\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'']$$

eine Componentenzerlegung von $\mathfrak{a}$ dar, sodass $(\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'') = \mathfrak{e}$ ist. Jedem Reste R von $\mathfrak{a}$ entspricht alsdann ein bestimmter Rest R' von $\mathfrak{a}'$ und ein Rest R'' von $\mathfrak{a}''$, welche den Congruenzen

$$R \equiv R' \pmod{\mathfrak{a}'}, \quad R \equiv R'' \pmod{\mathfrak{a}''} \tag{1}$$

genügen. Umgekehrt ergiebt sich leicht, (indem man z. B. die Anzahlen der Reste der Moduln $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}', \mathfrak{a}''$ vergleicht,) dass zu jeder Combination aus einem Reste von $\mathfrak{a}'$ und einem Reste von $\mathfrak{a}''$ mit gleicher Zeilenanzahl ein Rest R von $\mathfrak{a}$ gehört, welcher durch die Congruenzen (1) bestimmt wird. — Wir beweisen nun den Satz:

I. Stellt die Gleichung

$$\mathfrak{a} = [\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'']$$

eine Componentenzerlegung von $\mathfrak{a}$ dar und bestehen zwischen den Resten R, R', R'' von $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}', \mathfrak{a}''$ die Congruenzen (1), so besteht zwischen den Moduln

$$\mathfrak{b} = (\mathfrak{a}, R), \quad \mathfrak{b}' = (\mathfrak{a}', R'), \quad \mathfrak{b}'' = (\mathfrak{a}'', R'')$$

die Gleichung

$$\mathfrak{b} = [\mathfrak{b}', \mathfrak{b}''].$$

Beweis: Es ist

$$\mathfrak{b}' = (\mathfrak{a}', R') = (\mathfrak{a}', R) = \big((\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'), R\big) = \big(\mathfrak{a}', (\mathfrak{a}, R)\big) = (\mathfrak{a}', \mathfrak{b}),$$

ebenso $\mathfrak{b}'' = (\mathfrak{a}'', \mathfrak{b})$, also (§ 2, XIV) $[\mathfrak{b}', \mathfrak{b}''] = \mathfrak{b}$.

Es bezeichne nun r eine positive ganze Zahl, und es werde die Anzahl der r-zeiligen Reste von $\mathfrak{a}$, für welche

$$(\mathfrak{a}, R) = \mathfrak{e}$$

wird, gleich

$$\varphi_r(\mathfrak{a})$$

gesetzt. Da für jeden Rest R und für jedes unimodulare System E die Relation

$$(\mathfrak{a}E, RE) = (\mathfrak{a}, R)E$$

besteht, so hat für alle Moduln derselben Classe die Function φ_r denselben Werth. Es ist also $\varphi_r(\mathfrak{a})$ allein eine Function der Classe von $\mathfrak{a}$; wir setzen deshalb, wenn $\mathrm{Cl}\,\mathfrak{a} = \mathsf{A}$ ist,

$$\varphi_r(\mathfrak{a}) = \varphi_r(\mathsf{A}).$$

Indem wir uns nun der Bestimmung der Function $\varphi_r(\mathsf{A})$ zuwenden, schliessen wir den Fall, dass $\mathrm{Nm}\,\mathsf{A} = 0$ ist, aus.

Stellt wieder

$$\mathfrak{a} = [\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'']$$

eine Componentenzerlegung von $\mathfrak{a}$ dar, und wird für R jeder r-zeilige Rest von $\mathfrak{a}$, für R', R'' jede Combination aus einem r-zeiligen Rest von $\mathfrak{a}'$ und einem ebensolchen von $\mathfrak{a}''$ gesetzt, so jedoch, dass R, R', R'' durch die Congruenzen (1) verbunden sind, so ergiebt sich aus I, dass die Gleichung

$$(\mathfrak{a}, R) = \mathfrak{e} \tag{2}$$

äquivalent ist dem Gleichungssystem

$$(\mathfrak{a}', R') = \mathfrak{e}, \quad (\mathfrak{a}'', R'') = \mathfrak{e}. \tag{3}$$

Da nun (2) durch $\varphi_r(\mathfrak{a})$ Reste R, (3) durch $\varphi_r(\mathfrak{a}') \cdot \varphi_r(\mathfrak{a}'')$ Combinationen R', R'' erfüllt wird, so folgt

$$\varphi_r(\mathfrak{a}) = \varphi_r(\mathfrak{a}') \cdot \varphi_r(\mathfrak{a}''),$$

oder, wenn $\mathrm{Cl}\,\mathfrak{a}' = \mathsf{A}'$, $\mathrm{Cl}\,\mathfrak{a}'' = \mathsf{A}''$ gesetzt wird,

$$\varphi_r(\mathsf{A}) = \varphi_r(\mathsf{A}') \cdot \varphi_r(\mathsf{A}'').$$

Durch Fortsetzung der Zerlegung von A bis auf primäre Componenten erhält man

$$\text{II.} \qquad \varphi_r(\mathsf{A}) = \prod_p \varphi_r(\underset{p}{\mathsf{A}}).$$

Somit können wir uns darauf beschränken die Function φ_r für primäre Classen zu bestimmen,

Es sei A das Hauptsystem der primären Classe $\mathsf{A} = \underset{p}{\mathsf{A}}$, also $\mathrm{Md}\,A = \mathfrak{a} = \underset{p}{\mathfrak{a}}$ ihr Hauptmodul. Wir wollen annehmen, dass von den Invarianten A nur die q letzten durch p theilbar, die $n - q$ ersten also gleich 1 seien. Soll für ein r-zeiliges Rechteck R $(\mathfrak{a}, R) = \mathfrak{e}$ werden, so müssen in dem aus den Zeilen von A und R gebildeten Rechteck die Determinanten n^{ten} Grades die Einheit zum grössten gemeinsamen Theiler haben. Offenbar ist dies nur möglich, wenn $r \geqq q$ ist. Für $r < q$ wird daher $\varphi_r(\mathsf{A}) = 0$. Wir setzen jetzt $r \geqq q$ voraus. Damit $(\mathfrak{a}, R) = \mathfrak{e}$ werde, ist nothwendig und hinreichend, dass die Determinanten q^{ten} Grades, welche man den letzten q Colonnen von R entnehmen kann, nicht sämmtlich durch p theilbar sind. — Der Modul $(\mathfrak{a}, p\mathfrak{e})$ ist der Hauptmodul der Classe $(\mathsf{A}, p\mathsf{E})$, deren erste $n - q$ Invarianten gleich 1, deren letzte q Invarianten gleich p sind. Genügt das Rechteck R der Bedingung $(\mathfrak{a}, R) = \mathfrak{e}$, so ist auch $(\mathfrak{a}, p\mathfrak{e}, R) = \mathfrak{e}$; umgekehrt folgt aus $(\mathfrak{a}, p\mathfrak{e}, R) = \mathfrak{e}$, dass $(\mathfrak{a}, R) = \mathfrak{e}$ sein muss. Bedenkt man ferner, dass unter den Repräsentanten eines bestimmten r-zeiligen Restes von $(\mathfrak{a}, p\mathfrak{e})$ genau $\left(\frac{\mathrm{Nm}\,\mathfrak{a}}{p^q}\right)^r$ nach dem Modul $\mathfrak{a}$ incongruente Reste sich befinden, so erhält man die Beziehung

$$\varphi_r(\mathfrak{a}) = \left(\frac{\mathrm{Nm}\,\mathfrak{a}}{p^q}\right)^r \cdot \varphi_r(\mathfrak{a}, p\mathfrak{e}). \tag{4}$$

Zwei Rechtecke R_1, R_2 sind modulo $(\mathfrak{a}, p\mathfrak{e})$ congruent, wenn die von ihren q letzten Colonnen gebildeten Recktecke R_1', R_2' modulo p congruent sind. (Die Bezeichnung, dass zwei Rechtecke von gleichem Grade und gleicher Zeilenanzahl nach einer Zahl als Modul congruent sind, drückt aus, dass je zwei entsprechende Elemente dieser Rechtecke nach dieser Zahl congruent sind.) Mithin stellt $\varphi_r(\mathfrak{a}, p\mathfrak{e})$ die Anzahl der mod. p incongruenten Rechtecke von r Zeilen und q ($\leq r$) Colonnen dar, in denen nicht alle Determinanten q^{ten} Grades durch p theilbar sind. Diese Anzahl ist aber, wie eine einfache Berechnung ergiebt*), gleich

$$p^{qr}\left(1-\frac{1}{p^r}\right)\left(1-\frac{1}{p^{r-1}}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p^{r-q+1}}\right)$$

und mithin wird unter Berücksichtigung von (4)

$$(5)\qquad \varphi_r(\mathsf{A}) = (\mathrm{Nm}\,\mathsf{A})^r\left(1-\frac{1}{p^r}\right)\left(1-\frac{1}{p^{r-1}}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p^{r-q+1}}\right).$$

Diese Gleichung bleibt auch für $q > r$ richtig, da in diesem Falle der Ausdruck auf der rechten Seite von (5) verschwindet.

Somit haben wir den folgenden Satz:

III. Ist $\mathsf{A} = \underset{p}{\mathsf{A}}$ eine primäre Classe und sind q ihrer Invarianten durch p theilbar, (die übrigen also gleich 1), so ist

$$\varphi_r(\mathsf{A}) = (\mathrm{Nm}\,\mathsf{A})^r\left(1-\frac{1}{p^r}\right)\left(1-\frac{1}{p^{r-1}}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p^{r-q+1}}\right).$$

Es ist bemerkenswerth, dass der Ausdruck für $\varphi_r(\mathsf{A})$ den Grad der Classe A gar nicht enthält. Wir wollen nun aber noch eine Function in die Rechnung einführen, bei welcher dieser Grad eine Rolle spielt: Ist n der Grad von A, so soll für $\varphi_n(\mathsf{A})$ auch kurzweg $\varphi(\mathsf{A})$ geschrieben werden. Für die Function φ gilt die Relation

$$\text{IIa.}\qquad \varphi(\mathsf{A}) = \prod_p \varphi(\underset{p}{\mathsf{A}}).$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\vartheta(p,k) = \left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\cdots\left(\frac{1}{p^k}\right) \qquad (k>0)$$
$$\vartheta(p,0) = 1,$$

so ergiebt sich aus Satz III der folgende:

IIIa. Ist $\mathsf{A} = \underset{p}{\mathsf{A}}$ eine primäre Classe n^{ten} Grades, und sind q ihrer Invarianten durch p theilbar (die ersten $n-q$ also gleich 1), so ist

$$\varphi(\mathsf{A}) = (\mathrm{Nm}\,\mathsf{A})^n \cdot \frac{\vartheta(p;n)}{\vartheta(p;n-q)}.$$

*) Vergl. C. Jordan. Traité des substitutions Nr. 123.

§ 4.

Isomorphismus; die Function χ.

Definition des Isomorphismus.

Lässt sich zwischen den Resten ϱ eines Moduls $\mathfrak{a}$ und den Resten ϱ' eines Moduls $\mathfrak{a}'$ eine solche eindeutige Beziehung herstellen, dass, wenn ϱ_i, ϱ_i' und ϱ_k, ϱ_k' zwei Paare zugeordneter Reste sind, stets $\varrho_i + \varrho_k$, $\varrho_i' + \varrho_k'$ ebenfalls ein Paar zugeordneter Reste bilden, so wird die getroffene Zuordnung eine „isomorphe" Beziehung zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ genannt. Zwei Moduln $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$, welche (wenigstens) eine isomorphe Beziehung zulassen, heissen „zu einander isomorph"*). Die Beziehung des Isomorphismus ist also stets eine wechselseitige.

Sind $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ die sämmtlichen Reste von $\mathfrak{a}$, $\varrho_1', \varrho_2', \ldots$ (in dieser Reihenfolge) die isomorph zugeordneten Reste von $\mathfrak{a}'$, so werde die vorliegende isomorphe Beziehung durch

$$\varrho_i \,||\, \varrho_i'$$

bezeichnet. Aus der Definition des Isomorphismus folgt leicht, dass allgemein

$$\sum_i c_i \varrho_i, \qquad \sum_i c_i \varrho_i'$$

entsprechende Reste von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ sind. Ist $\mathfrak{a}'$ isomorph zu $\mathfrak{a}''$ und stellt

$$\varrho_i' \,||\, \varrho_i''$$

eine isomorphe Beziehung zwischen $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{a}''$ dar, so ist

$$\varrho_i \,||\, \varrho_i''$$

eine isomorphe Beziehung zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}''$, welche „aus $\varrho_i \,||\, \varrho_i'$ und $\varrho_i' \,||\, \varrho_i''$ zusammengesetzt" heisst. Setzt man die isomorphe Beziehung $\varrho_i \,||\, \varrho_i'$ nach einander mit den sämmtlichen verschiedenen isomorphen Beziehungen von $\mathfrak{a}'$ zu $\mathfrak{a}''$ zusammen, so erhält man ebensoviele isomorphe Beziehungen zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}''$, und mit diesen sind alle erschöpft. Bezeichnet man demnach mit

$$\chi(\mathfrak{a} \,||\, \mathfrak{a}')$$

die Anzahl der zwischen zwei Moduln $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ bestehenden isomorphen Beziehungen, so gilt der Satz:

Ist $\mathfrak{a}$ isomorph zu $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}'$ isomorph zu $\mathfrak{a}''$, so ist $\mathfrak{a}$ isomorph zu $\mathfrak{a}'$ und

$$\chi(\mathfrak{a} \,||\, \mathfrak{a}'') = \chi(\mathfrak{a}' \,||\, \mathfrak{a}'') = \chi(\mathfrak{a} \,||\, \mathfrak{a}').$$

Die Moduln $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$ brauchen natürlich nicht alle verschieden zu sein. Nimmt man $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}''$ an, so erhält man — den Isomorphismus von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}''$ vorausgesetzt —

$$\chi(\mathfrak{a} \,||\, \mathfrak{a}') = \chi(\mathfrak{a} \,||\, \mathfrak{a}) = \chi(\mathfrak{a}' \,||\, \mathfrak{a}').$$

*) Die Bezeichnung isomorph ist der Gruppentheorie entnommen.

Eine isomorphe Beziehung eines Moduls $\mathfrak{a}$ auf sich selbst kann als eine Permutation unter seinen Resten gedeutet werden. Die so erhaltenen Permutationen bilden eine Gruppe; $\chi(\mathfrak{a}\,||\,\mathfrak{a})$, wofür wir auch einfach

$$\chi(\mathfrak{a})$$

schreiben, ist die Ordnung dieser Gruppe.

Es soll nun näher untersucht werden, unter welchen Bedingungen zwei Moduln $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ isomorph sind. Man sieht leicht ein, dass dies der Fall ist, wenn sie derselben Classe angehören. Ist nämlich alsdann $[E]$ eine unimodulare Transformation, welche $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{a}'$ überführt, so wird (§ 2) durch dieselbe auch jeder Rest von $\mathfrak{a}$ in einen Rest von $\mathfrak{a}'$ verwandelt und auf diese Weise eine eindeutige Beziehung zwischen den Resten von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ hergestellt, die man als eine isomorphe sofort erkennt.

Umgekehrt möge jetzt gezeigt werden, dass zwei isomorphe Moduln *desselben Grades* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ auch derselben Classe angehören müssen. Dabei kann auf Grund der vorangegangenen Betrachtungen, unbeschadet der Allgemeinheit des Beweises, vorausgesetzt werden, dass $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ innerhalb ihrer Classen die Hauptmoduln sind. Es möge ferner der Fall, dass die Normen von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ verschwinden, ausgeschlossen werden, da derselbe für unseren Zweck nicht in Betracht kommt. Bezeichnet

$$\varrho_i \,||\, \varrho_i'$$

eine isomorphe Beziehung zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$, ist m irgend eine ganze Zahl, und setzt man für ϱ_i, ϱ_i' successive alle Reste von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$, so gehört das System $m\varrho_i$ ebenso oft dem Modul $\mathfrak{a}$ an, als das System $m\varrho_i'$ dem Modul $\mathfrak{a}'$ angehört. Die Berechnung der gesuchten Anzahl gestaltet sich aber, wenn $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ als Hauptmoduln vorausgesetzt werden, besonders einfach. Sind $a_1, a_2, \ldots a_n$ die Invarianten von $\mathfrak{a}$, $a_1', a_2', \ldots a_n'$ diejenigen von $\mathfrak{a}'$, so erkennt man sogleich, dass die Anzahl der Reste ϱ_i, für welche $m\varrho_i$ in $\mathfrak{a}$ enthalten ist, gleich

$$(m, a_1) \cdot (m, a_2) \ldots (m, a_n)$$

wird, und ebenso ergiebt sich für die Anzahl der Reste ϱ_i', für welche $m.\varrho_i'$ dem Modul $\mathfrak{a}'$ angehört, der Ausdruck

$$(m, a_1') \cdot (m, a_2') \ldots (m, a_n').$$

Demnach muss für jede Zahl m die Gleichung

$$(m, a_1)(m, a_2) \ldots (m, a_n) = (m, a_1')(m, a_2') \ldots (m, a_n')$$

bestehen, und dies kann, wie eine einfache Ueberlegung zeigt, nur der Fall sein, wenn

$$a_1 = a_1',\ a_2 = a_2', \ldots a_n = a_n'$$

ist, wenn also $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ derselben Classe angehören.

Sehr wohl aber können zwei Moduln verschiedenen Grades isomorph sein; die Frage nach dem Isomorphismus zweier Moduln wird durch folgenden Satz erledigt.

I. Zwei Moduln sind dann und nur dann isomorph, wenn ihre Invariantensysteme nach Ausscheidung der Invarianten, welche sich auf 1 reduciren, identisch sind.

Um zu beweisen, dass die ausgesprochene Bedingung eine hinreichende ist, nehmen wir an, es habe der Modul $\mathfrak{a}$ die Invarianten

$$a_1 = 1, \ldots a_r = 1, \; a_{r+1}, \; a_{r+2}, \ldots a_n,$$

der Modul $\mathfrak{a}'$ die Invarianten

$$a_1' = a_{r+1}, \; a_2' = a_{r+2}, \ldots a_{n-r}' = a_n,$$

dann ist zu zeigen, dass $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ isomorph sind. Wir dürfen dabei $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ als Hauptmoduln voraussetzen, und unter dieser Annahme gestaltet sich der Beweis sehr einfach. Bilden nämlich jetzt

$$\varrho_1, \varrho_2, \ldots$$

ein vollständiges Restsystem in Bezug auf $\mathfrak{a}$, und wird unter ϱ_i' die Zeile verstanden, welche aus ϱ_i durch Fortlassung der ersten r Elemente hervorgeht, so ergiebt sich ohne Weiteres, dass

$$\varrho_1', \varrho_2', \ldots$$

ein vollständiges Restsystem von $\mathfrak{a}'$ bilden, und dass durch

$$\varrho_i \,||\, \varrho_i'$$

eine isomorphe Beziehung zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ dargestellt wird. Verbindet man das soeben erhaltene Resultat mit dem früheren, wonach Moduln gleichen Grades nur dann isomorph sind, wenn sie zu derselben Classe gehören, so wird die Nothwendigkeit der im Satze I ausgesprochenen Bedingung klar.

Für die Function χ können aus diesem Satze einige einfache Folgerungen gezogen werden. Zunächst zeigt es sich, dass für alle Moduln $\mathfrak{a}$ einer Classe A χ denselben Werth hat, sodass das Symbol $\chi(\mathfrak{a})$ zweckmässig wird durch

$$\chi(\mathsf{A})$$

ersetzt werden können. Sodann hat man den Satz:

II. Wenn die Invariantensysteme der Classen A und A' nach Ausscheidung der sich auf 1 reducirenden Invarianten identisch sind, so ist

$$\chi(\mathsf{A}) = \chi(\mathsf{A}').$$

§ 5.

Zusammenhang zwischen den Functionen φ, χ, ψ.

Die von uns betrachteten Functionen φ, χ, ψ stehen in einem sehr einfachen Zusammenhange, welcher durch die folgende Betrachtung klar wird.

Ist A eine Classe n^{ten} Grades, $\mathfrak{a}$ ein Modul von A, R ein r-zeiliger Rest von $\mathfrak{a}$, so besteht, wie eine einfache Ueberlegung zeigt, der Satz: Damit

$$(\mathfrak{a}, R) = \mathfrak{e} \tag{1}$$

sei, ist nothwendig und hinreichend, dass man zu jeder Zeile ϱ von n Elementen eine Zeile σ von r Elementen finden könne, welche der Congruenz

$$\sigma R \equiv \varrho \pmod{\mathfrak{a}} \tag{2}$$

genügt. — Nehmen wir nun an, die Gleichung (1) sei erfüllt und es sei $r = n$, dann bilden die sämmtlichen σ, für welche σR in $\mathfrak{a}$ enthalten ist, einen Modul $\mathfrak{a}'$ vom Grade n, die sämmtlichen σ, welche einer Congruenz von der Form (2), worin ϱ als gegeben zu betrachten ist, genügen, sind Repräsentanten eines bestimmten Restes von $\mathfrak{a}'$, und umgekehrt: für alle Repräsentanten eines bestimmten Restes von $\mathfrak{a}'$ stellt σR einen und denselben Rest von $\mathfrak{a}$ dar. Man erhält daher eine eindeutige Beziehung zwischen den Resten von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$, indem man jedem Rest σ von $\mathfrak{a}'$ den Rest σR von $\mathfrak{a}$ entsprechen lässt, und diese Beziehung ist, wie man leicht sieht, eine isomorphe. Daraus folgt, dass der Modul $\mathfrak{a}'$ der Classe A angehört (§ 4, I). Wir wollen sagen, der Rest R von $\mathfrak{a}$ gehöre zum Modul $\mathfrak{a}'$ und wollen die durch R vermittelte isomorphe Beziehung mit $[R]$ bezeichnen.

Ist R' ebenfalls ein n-zeiliger der Bedingung (1) genügender Rest von $\mathfrak{a}$, aber von R verschieden, so kann R' wohl zu demselben Modul $\mathfrak{a}$ gehören, aber die isomorphe Beziehung $[R']$ ist von $[R]$ verschieden. Anderenfalls nämlich müsste für jede Zeile σ die Congruenz

$$\sigma R \equiv \sigma R' \pmod{\mathfrak{a}}$$

bestehen, und hieraus würde man, indem man für σ nach einander die Zeilen des Systems

$$E^0 = \begin{pmatrix} 1\,0\,0 \ldots 0 \\ 0\,1\,0 \ldots 0 \\ 0\,0\,1 \ldots 0 \\ \vdots \\ 0\,0\,0 \ldots 1 \end{pmatrix}$$

setzt, die Congruenz

$$R' \equiv R \pmod{\mathfrak{a}}$$

folgern.

Andererseits lässt sich leicht zeigen, dass, wenn man für R jeden n-zeiligen der Bedingung (1) genügenden Rest von $\mathfrak{a}$ setzt, durch das Symbol $[R]$ jede zwischen $\mathfrak{a}$ und irgend einem Modul $\mathfrak{a}'$ von A mögliche isomorphe Beziehung einmal dargestellt wird. Ist nämlich eine solche Beziehung zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ gegeben, werden durch dieselbe den durch die n Zeilen von E^0 repräsentirten Resten von $\mathfrak{a}'$ die Reste $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$ von $\mathfrak{a}$ zugeordnet und ist R der von diesen gebildete n-zeilige Rest, so ergiebt die Definition des Isomorphismus, dass dem Rest σ von $\mathfrak{a}'$ der Rest σR von $\mathfrak{a}$ entsprechen muss. Da somit jeder Rest von $\mathfrak{a}$ in der Form σR darstellbar ist, so ergiebt sich zunächst, dass R der Bedingung

$$(\mathfrak{a}, R) = \mathfrak{e}$$

genügt, und sodann weiter, dass die vorliegende isomorphe Beziehung mit der durch das Symbol $[R]$ bezeichneten identisch ist.

Das Resultat dieser Betrachtungen ist, dass jeder der Reste R, deren Anzahl gleich $\varphi(\mathsf{A})$ ist, zu einem bestimmten der $\psi(\mathsf{A})$ Moduln der Classe A gehört, und dass zu jedem Modul $\mathfrak{a}'$ von A $\chi(\mathsf{A})$ Reste R gehören, so viele nämlich, als isomorphe Beziehungen zwischen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ existiren. So gelangt man zu der wichtigen Relation

I. $$\varphi(\mathsf{A}) = \chi(\mathsf{A}) \cdot \psi(\mathsf{A}).$$

Aus dieser und den Formeln (§ 3, II; § 2, XVII) erhält man noch die Beziehung

$$\chi(\mathsf{A}) = \prod_p \chi(\mathsf{A}_p),$$

welche sich natürlich auch leicht direct nachweisen liesse.

§ 6.

Bestimmung der Functionen ψ und χ.

Auf Grund der Sätze § 2, IX; § 4, II; § 5, I ist es nun leicht, die Functionen ψ und χ zunächst als Quotienten aus Producten von φ-Functionen darzustellen.

Ist $\mathsf{A} = \mathrm{Cl}\,(a_1 \,|\, a_2 \,|\, \ldots\, a_n)$ irgend eine Classe n^{ten} Grades von positiver Norm, und setzt man

$$\mathsf{A}' = \mathrm{Cl}\left(1 \,\middle|\, \frac{a_2}{a_1} \,\middle|\, \frac{a_3}{a_1} \,\middle|\, \ldots \frac{a_n}{a_1}\right),$$

$$\mathsf{A}_i = \mathrm{Cl}\left(\frac{a_{i+1}}{a_i} \,\middle|\, \frac{a_{i+2}}{a_i} \,\middle|\, \ldots \frac{a_n}{a_i}\right) \qquad (i = 1, 2, \ldots n-1)$$

$$\mathsf{A}_i' = \mathrm{Cl}\left(1 \,\middle|\, \frac{a_{i+2}}{a_{i+1}} \,\middle|\, \frac{a_{i+3}}{a_{i+1}} \,\middle|\, \ldots \frac{a_n}{a_{i+1}}\right),$$

sodass A_i, A_i' Classen vom Grade $n - i$ sind, so wird

$$A = a_1 . A', \qquad A_i = \frac{a_{i+1}}{a_i} \cdot A_i',$$

$$\psi(A) = \psi(A'), \qquad \psi(A_i) = \psi(A_i'), \qquad (\S\ 2, \text{IX}),$$

$$\psi(A') = \frac{\varphi(A')}{\chi(A')}, \qquad \psi(A_i') = \frac{\varphi(A_i')}{\chi(A_i')}, \qquad (\S\ 5, \text{I}),$$

$$\chi(A') = \chi(A_1), \qquad \chi(A_i') = \chi(A_{i+1}), \qquad (\S\ 4, \text{II}),$$

$$\chi(A_1) = \frac{\varphi(A_1)}{\psi(A_1)}, \qquad \chi(A_{i+1}) = \frac{\varphi(A_{i+1})}{\psi(A_{i+1})}, \qquad (\S\ 5, \text{I}),$$

mithin

$$\psi(A) = \frac{\varphi(A')}{\varphi(A_1)}\,\psi(A_1), \qquad \psi(A_i) = \frac{\varphi(A_i')}{\varphi(A_{i+1})}\,\psi(A_{i+1}).$$

Da $\psi(A_{n-1}) = 1$ ist, so folgt aus diesen Relationen

I. $$\psi(A) = \frac{\varphi(A')\,\varphi(A_1')\cdots\varphi(A_{n-2}')}{\varphi(A_1)\,\varphi(A_2)\cdots\varphi(A_{n-1})},$$

II. $$\chi(A) = \frac{\varphi(A)\,\varphi(A_1)\cdots\varphi(A_{n-1})}{\varphi(A')\,\varphi(A_1')\cdots\varphi(A_{n-2}')}.$$

Die weitere Ausrechnung, welche wir nur für die Function ψ durchführen wollen, erfordert, zunächst den Fall der primären Classe zu erledigen. Es sei also

$$\text{Cl}\,(a_1|a_2|\ldots a_n) = A = \underset{p}{A} = \text{Cl}\left(p^{r_1}\middle|p^{r_2}\middle|\ldots p^{r_n}\right)$$

und somit

$$r_1 \leqq r_2 \leqq \cdots \leqq r_n.$$

Mit $e_1, e_2, \ldots e_k$ seien die verschiedenen unter den Exponenten r in ihrer natürlichen Reihenfolge bezeichnet. Kommt e_1 s_1 mal, e_2 s_2 mal, $\ldots e_k$ s_k mal unter den Exponenten r vor, so ist

(1) $$s_1 + s_2 + \cdots + s_k = n.$$

Unter den Differenzen $r_m - r_l$, in denen $m > l$ ist, ist die Differenz $e_i - e_h$ $(i > h)$ $s_h . s_i$ mal enthalten. Somit ist

(2) $$\sum_{i>h} (e_i - e_h) s_i \,.\, s_h = \sum_{m>l} r_m - r_l$$

$$= (1-n)r_1 + (3-n)r_2 + (5-n)r_3 + \cdots + (n-3)r_{n-1} + (n-1)r_n.$$

Setzt man nun

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_i = t_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots k)$$

$$A' = \text{Cl}\left(\frac{a_1}{a_1}\middle|\frac{a_2}{a_2}\middle|\ldots\frac{a_{t_1}}{a_{t_1}}\middle|\frac{a_{t_1+1}}{a_{t_1}}\middle|\ldots\frac{a_n}{a_{t_1}}\right),$$

$$A_i = \text{Cl}\left(\frac{a_{t_i+1}}{a_{t_i}}\middle|\frac{a_{t_i+2}}{a_{t_i}}\middle|\ldots\frac{a_n}{a_{t_i}}\right),$$

$$A_i' = \text{Cl}\left(\frac{a_{t_i+1}}{a_{t_i+1}}\middle|\ldots\frac{a_{t_{i+1}}}{a_{t_{i+1}}}\middle|\frac{a_{t_{i+1}+1}}{a_{t_{i+1}}}\middle|\ldots\frac{a_n}{a_{t_{i+1}}}\right)$$

so folgt aus

$$(3)\qquad \begin{aligned} p^{e_1} &= a_1 = a_2 = \cdots = a_{t_1},\\ p^{e_2} &= a_{t_1+1} \quad = \cdots = a_{t_2},\\ &\vdots\\ p^{e_k} &= a_{t_{k-1}+1} = \cdots = a_{t_k}, \end{aligned}$$

dass

$$\psi(\mathsf{A}) = \psi(\mathsf{A}') = \frac{\varphi(\mathsf{A}')}{\chi(\mathsf{A}')} = \frac{\varphi(\mathsf{A}')}{\varphi(\mathsf{A}_1)}\psi(\mathsf{A}_1),$$

$$\psi(\mathsf{A}_i) = \psi(\mathsf{A}_i') = \frac{\varphi(\mathsf{A}_i')}{\chi(\mathsf{A}_i')} = \frac{\varphi(\mathsf{A}_i')}{\varphi(\mathsf{A}_{i+1})}\psi(\mathsf{A}_{i+1})$$

wird. Berücksichtigt man, dass $\psi(\mathsf{A}_{k-1}) = 1$ ist, so erhält man

$$(4)\qquad \psi(\mathsf{A}) = \frac{\varphi(\mathsf{A}')\cdot\varphi(\mathsf{A}_1')\cdots\varphi(\mathsf{A}_{k-2}')}{\varphi(\mathsf{A}_1)\cdot\varphi(\mathsf{A}_2)\cdots\varphi(\mathsf{A}_{k-1})}.$$

Es haben aber die Classen A', A_i, A_i' bez. die Grade n, $n-t_i$, $n-t_i$, während die Anzahlen ihrer durch p theilbaren Invarianten bez. gleich $n-t_1$, $n-t_i$, $n-t_{i+1}$ sind; folglich ist (§ 3, III a)

$$\varphi(\mathsf{A}') = (\mathrm{Nm}\,\mathsf{A}')^n \frac{\vartheta(p;n)}{\vartheta(p;t_1)} = (\mathrm{Nm}\,\mathsf{A}')^n \frac{\vartheta(p;n)}{\vartheta(p;s_1)},$$

$$\varphi(\mathsf{A}_i) = (\mathrm{Nm}\,\mathsf{A}_i)^{n-t_i}\vartheta(p;n-t_i)$$

$$\varphi(\mathsf{A}_i') = (\mathrm{Nm}\,\mathsf{A}_i')^{n-t_i}\frac{\vartheta(p;n-t_i)}{\vartheta(p;t_{i+1}-t_i)} = (\mathrm{Nm}\,\mathsf{A}_i')^{n-t_i}\frac{\vartheta(p;n-t_i)}{\vartheta(p;s_{i+1})}$$

also nach (4)

$$(5)\qquad \psi(\mathsf{A}) = \frac{(\mathrm{Nm}\,\mathsf{A}')^n\cdot(\mathrm{Nm}\,\mathsf{A}_1')^{n-t_1}\cdots(\mathrm{Nm}\,\mathsf{A}_{k-2}')^{n-t_{k-2}}}{(\mathrm{Nm}\,\mathsf{A}_1)^{n-t_1}\cdot(\mathrm{Nm}\,\mathsf{A}_2)^{n-t_2}\cdots(\mathrm{Nm}\,\mathsf{A}_{k-1})^{n-t_{k-1}}} \cdot\frac{\vartheta(p;n)}{\vartheta(p;s_1)\,\vartheta(p;s_2)\cdots\vartheta(p;s_k)}.$$

Nun ist

$$\frac{(\mathrm{Nm}\,\mathsf{A}_{i-1}')^{n-t_{i-1}}}{(\mathrm{Nm}\,\mathsf{A}_i)^{n-t_i}} = \left(\frac{\mathrm{Nm}\,\mathsf{A}_{i-1}'}{\mathrm{Nm}\,\mathsf{A}_i}\right)^{n-t_i}\cdot(\mathrm{Nm}\,\mathsf{A}_{i-1}')^{t_i-t_{i-1}} = (\mathrm{Nm}\,\mathsf{A}_{i-1}')^{t_i-t_{i-1}},$$

daher

$$(6)\qquad \frac{(\mathrm{Nm}\,\mathsf{A}')^n(\mathrm{Nm}\,\mathsf{A}_1')^{n-t_1}\cdots(\mathrm{Nm}\,\mathsf{A}_{k-2}')^{n-t_{k-2}}}{(\mathrm{Nm}\,\mathsf{A}_1)^{n-t_1}(\mathrm{Nm}\,\mathsf{A}_2)^{n-t_2}\cdots(\mathrm{Nm}\,\mathsf{A}_{k-1})^{n-t_{k-1}}} = \left(\frac{\mathrm{Nm}\,\mathsf{A}'}{\mathrm{Nm}\,\mathsf{A}_1'}\right)^{t_1}\left(\frac{\mathrm{Nm}\,\mathsf{A}_1'}{\mathrm{Nm}\,\mathsf{A}_2'}\right)^{t_2}\cdots\left(\frac{\mathrm{Nm}\,\mathsf{A}_{k-3}'}{\mathrm{Nm}\,\mathsf{A}_{k-2}'}\right)^{t_{k-2}}(\mathrm{Nm}\,\mathsf{A}_{k-2}')^{t_{k-1}}.$$

Ferner ergiebt sich

$$\frac{\mathrm{Nm}\,\mathfrak{A}'_{i-1}}{\mathrm{Nm}\,\mathfrak{A}'_i} = \left(\frac{a_{t_i+1}}{a_{t_i}}\right)^{n-t_i}, \quad \mathrm{Nm}\,\mathfrak{A}'_{k-2} = \left(\frac{a_{t_k}}{a_{t_{k-1}}}\right)^{n-t_{k-1}},$$

$$(7)\qquad \prod_{i=1}^{k-2}\left(\frac{\mathrm{Nm}\,\mathfrak{A}'_{i-1}}{\mathrm{Nm}\,\mathfrak{A}'_i}\right)^{t_i}\cdot(\mathrm{Nm}\,\mathfrak{A}'_{k-2})^{t_{k-1}} = \prod_{i=1}^{k-1}\left(\frac{a_{t_i+1}}{a_{t_i}}\right)^{(n-t_i)t_i}$$

$$= \prod_{i=1}^{n-1}\left(\frac{a_{i+1}}{a_i}\right)^{i(n-i)} = \prod_{i=1}^{n} a_i^{2i-1-n}.$$

Aus (5), (6), (7) erhält man jetzt

$$\text{III.}\qquad \psi(\mathfrak{A}) = a_1^{1-n}\cdot a_2^{3-n}\cdot a_3^{5-n}\cdots a_{n-1}^{n-3}\cdot a_n^{n-1}\cdot\frac{\vartheta(p;n)}{\vartheta(p;s_1)\,\vartheta(p;s_2)\cdots\vartheta(p;s_k)}$$

oder, unter Berücksichtigung von (2), (3)

$$\text{III a.}\qquad \psi(\mathfrak{A}) = p^{\sum_{i>k} s_i s_k (s_i - s_k)}\cdot\frac{\vartheta(p;n)}{\vartheta(p;s_1)\,\vartheta(p;s_2)\cdots\vartheta(p;s_k)}.$$

Führt man eine Function $g(x;\, n, m)$*) ein durch die Gleichung

$$(8)\qquad g(x;\, n, m) = \frac{(1-x^n)(1-x^{n-1})\cdots(1-x^{n-m+1})}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$$

worin n eine ganze, m eine positive ganze Zahl bedeute, so ist

$$(9)\qquad g(x;\, n, m) = g(x:\, n-1, m) + x^{n-m}g(x;\, n-1, m-1),$$

und diese Gleichung gilt auch für beliebiges ganzzahliges m, wenn festgesetzt wird, dass

$$(10)\qquad g(x;\, n,\, 0) = 1,$$

$$(11)\qquad g(x;\, n, m) = 0 \qquad (m < 0)$$

sein soll. Es gilt ferner die Beziehung

$$(12)\qquad g(x;\, n, m) = x^{m(n-m)}\cdot g\left(\frac{1}{x};\, n, m\right).$$

Aus den Gleichungen (9), (10), (11) folgt, dass $g(x;\, n;\, m)$ für $n \geqq 0$ eine ganze Function von x ist, welche nur ganzzahlige nichtnegative Coefficienten besitzt. Für $n \geqq m \geqq 0$ besteht zwischen den Functionen g und ϑ die Relation

$$(13)\qquad g\left(\frac{1}{x};\, n, m\right) = \frac{\vartheta(x;n)}{\vartheta(x;m)\,\vartheta(x;n-m)}.$$

---

*) Es ist dieselbe, welche in der Gauss'schen Abhandlung ‚Summatio quarundam serierum singularium' mit (n, m) bezeichnet wird.

Wird zur Abkürzung

$$(14)\qquad \psi(\mathfrak{A}) = p^{\sum_{i>k} e_i e_k (e_i - e_k)} \cdot \overline{\psi}(\mathfrak{A}) = a_1^{1-n} \cdot a_2^{2-n} \cdots a_n^{n-1} \overline{\psi}(\mathfrak{A})$$

gesetzt, so ergeben sich für die Functionen ψ, $\overline{\psi}$ die folgenden Ausdrücke

$$(15)\quad \overline{\psi}(\mathfrak{A}) = \frac{\vartheta(p;n)}{\vartheta(p;e_1)\,\vartheta(p;n-e_1)} \cdot \frac{\vartheta(p;n-e_1)}{\vartheta(p;e_2)\,\vartheta(p;n-e_1-e_2)} \cdot \frac{\vartheta(p;n-e_1-e_2)}{\vartheta(p;e_3)\,\vartheta(p;n-e_1-e_2-e_3)} \cdots$$
$$= g\left(\frac{1}{p};\, n, e_1\right) \cdot g\left(\frac{1}{p};\, n-e_1, e_2\right) \cdots g\left(\frac{1}{p};\, n-e_1-\cdots-e_{k-2}, e_{k-1}\right),$$

$$(16)\quad \psi(\mathfrak{A}) = p^{\sum_{i>k} e_i e_k (e_i - e_k)}\, \overline{\psi}(\mathfrak{A}) = p^{\sum_{i>k} e_k e_i (e_i - e_k - 1)} \cdot p^{\sum_{i>k} e_i e_k} \cdot \overline{\psi}(\mathfrak{A})$$
$$= p^{\sum_{i>k} e_i e_k (e_i - e_k - 1)} \cdot p^{e_1(n-e_1)}\, g\left(\frac{1}{p};\, n, e_1\right) \cdot p^{e_2(n-e_1-e_2)} \cdot g\left(\frac{1}{p};\, n-e_1, e_2\right) \cdots.$$

$$\text{III b.}\quad \psi(\mathfrak{A}) = p^{\sum_{i>k} e_i e_k (e_i - e_k - 1)} \cdot g(p;\, n, e_1) \cdot g(p;\, n-e_1, e_2) \cdots$$
$$\cdots g(p;\, n-e_1-\cdots-e_{k-2}, e_{k-1}).$$

Aus dieser Darstellung erkennt man, dass $\psi(\mathfrak{A})$ eine ganze Function von p ist, ferner, dass der Coefficient der höchsten Potenz von p gleich 1 ist und dass die übrigen Coefficienten ganze nichtnegative Zahlen sind.

Hat man eine beliebige Classe $\mathfrak{A}$ von positiver Norm, so wird durch § 2, XVII die Berechnung von $\psi(\mathfrak{A})$ auf den Fall der primären Classe zurückgeführt. Setzt man

$$\prod_p \overline{\psi}(\mathfrak{A}_p) = \overline{\psi}(\mathfrak{A}),$$

so ergiebt sich

$$\psi(\mathfrak{A}) = \prod_p \left(a_1^{1-n} \cdot a_2^{2-n} \cdots a_n^{n-1} \cdot \overline{\psi}\,\mathfrak{A}_p\right)$$
$$= a_1^{1-n} \cdot a_2^{2-n} \cdots a_n^{n-1} \cdot \overline{\psi}(\mathfrak{A}),$$

sodass Gleichung (14) allgemeine Geltung besitzt.

Wendet man die gewonnenen Resultate auf den Fall $n = 2$ an, so erhält man für $\mathfrak{A} = \mathrm{Cl}\,(a_1 \mid a_2)$

$$\psi(\mathsf{A}) = \frac{a_2}{a_1}\overline{\psi}(\mathsf{A}) = \frac{a_2}{a_1}\prod_p \overline{\psi}(\mathsf{A}_p)$$

$$= \frac{a_2}{a_1}\prod_{\left(p,\frac{a_2}{a_1}\right)=p}\frac{\vartheta(p;2)}{(\vartheta(p;1))^2} = \frac{a_2}{a_1}\prod_{\left(p,\frac{a_2}{a_1}\right)=p}\left(1+\frac{1}{p}\right),$$

wo das Product sich auf die in $\frac{a_2}{a_1}$ aufgehenden Primzahlen erstreckt.

Beispiel: Für

$$a_1 = 3,\ a_2 = 90$$

ist

$$\frac{a_2}{a_1} = 30 = 2\,.\,3\,.\,5$$

$$\psi(\mathsf{A}) = 30\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5} = 72.$$

Für

$$n = 3,\ \mathsf{A} = \mathrm{Cl}\,(a_1|a_2|a_3)$$

ist

$$\psi(\mathsf{A}) = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2\overline{\psi}(\mathsf{A}) = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2\prod_{\left(p,\frac{a_2}{a_1}\right)=p}\frac{\vartheta(p;3)}{\vartheta(p;1)\vartheta(p;2)}\cdot\prod_{\left(p,\frac{a_2}{a_1},\frac{a_3}{a_1}\right)=p}\frac{\vartheta(p;2)}{\vartheta(p;1)\vartheta(p;1)}$$

$$\psi(\mathsf{A}) = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2\cdot\prod_{\left(p,\frac{a_2}{a_1}\right)=p}\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}\right)\prod_{\left(p,\frac{a_2}{a_1},\frac{a_3}{a_1}\right)=p}\left(1+\frac{1}{p}\right),$$

wo das erste Product sich auf die in $\frac{a_2}{a_1}$, das zweite auf die in $\frac{a_3}{a_1}$ und $\frac{a_3}{a_2}$ zugleich aufgehenden Primzahlen erstreckt.

Beispiel: Für

$$a_1 = 2,\ a_2 = 210,\ a_3 = 6930$$

ist

$$\frac{a_3}{a_1} = 3465 = 3^2\,.\,5\,.\,7\,.\,11,\ \frac{a_2}{a_1} = 105 = 3\,.\,5\,.\,7,\ \frac{a_3}{a_2} = 33 = 3\,.\,11.$$

$$\psi(\mathsf{A}) = (3465)^2\cdot\frac{13}{9}\cdot\frac{31}{25}\cdot\frac{57}{49}\cdot\frac{133}{121}\cdot\frac{4}{3} = 36\,661\,716.$$

§ 7.

Einführung einiger Functionen, welche von mehreren Classen abhängen.

Die Function ψ bildet die Grundlage für die Bestimmung anderer Functionen, welche für die Theorie der Moduln von Wichtigkeit sind und welche im Folgenden behandelt werden sollen. Dabei wollen wir nur Moduln und Classen von positiver Norm in Betracht ziehen.

Ein Modul $\mathfrak{a}$ von positiver Norm hat, wie man leicht erkennt, nur eine endliche Anzahl von Divisoren, welche sich (§ 2, III) auf diejenigen Classen vertheilen, welche Divisoren von Cl $\mathfrak{a}$ sind. Wir wollen

nun diejenigen Divisoren von $\mathfrak{a}$ ins Auge fassen, welche einer bestimmten Classe B angehören. Sind

$$\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots \mathfrak{b}_t$$

diese Moduln und bezeichnet E ein unimodulares System, so sind (§ 2, VI)

$$\mathfrak{b}_1 E, \mathfrak{b}_2 E, \ldots \mathfrak{b}_t E$$

die sämmtlichen Divisoren von $\mathfrak{a}E$ innerhalb der Classe B. Hieraus folgt, dass die Anzahl der Divisoren von $\mathfrak{a}$ innerhalb B nur von den Classen $\mathsf{A} = \mathrm{Cl}\,\mathfrak{a}$ und B abhängt. Wir bezeichnen diese Anzahl mit

$$t(\mathsf{A}|\mathsf{B}).$$

In gleicher Weise erkennt man, dass die Anzahl der Vielfachen, welche ein Modul $\mathfrak{b}$ der Classe B innerhalb der Classe A besitzt, allein eine Function der Classen A und B ist. Sie sei mit

$$v(\mathsf{A}|\mathsf{B})$$

bezeichnet. Die Anzahl der Modulpaare $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_k$, welche den Bedingungen

$$\mathrm{Cl}\,\mathfrak{a}_i = \mathsf{A}, \quad \mathrm{Cl}\,\mathfrak{b}_k = \mathsf{B}, \quad (\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_k) = \mathfrak{b}_k$$

genügen, wird durch jeden der Ausdrücke $\psi(\mathsf{A}) \cdot t(\mathsf{A}|\mathsf{B})$, $\psi(\mathsf{B}) \cdot v(\mathsf{A}|\mathsf{B})$ dargestellt, also ist

I. $$\psi(\mathsf{A}) \cdot t(\mathsf{A}|\mathsf{B}) = \psi(\mathsf{B}) \cdot v(\mathsf{A}|\mathsf{B}).$$

Ferner ergeben sich aus § 2, XV die Formeln

II. $$t(\mathsf{A}|\mathsf{B}) = \prod_p t(\mathsf{A}_p|\mathsf{B}_p)$$

III. $$v(\mathsf{A}|\mathsf{B}) = \prod_p v(\mathsf{A}_p|\mathsf{B}_p).$$

Nach § 2, III wissen wir, dass $t(\mathsf{A}|\mathsf{B})$ und $v(\mathsf{A}|\mathsf{B})$ von 0 verschieden oder gleich 0 sind, je nachdem A durch B theilbar ist oder nicht. Endlich gelten für jede Classe A die Beziehungen (§ 2, IV)

IV. $$t(\mathsf{A}|\mathsf{A}) = v(\mathsf{A}|\mathsf{A}) = 1.$$

Zu anderen Classenfunctionen wird man durch die folgenden Betrachtungen geführt.

Sind die Moduln $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_s$, welche nicht alle verschieden zu sein brauchen, Divisoren eines Moduls $\mathfrak{c}$, so ist auch ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches $[\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_s]$ ein Divisor von $\mathfrak{c}$. Man kann sich nun die Aufgabe stellen, zu gegebenem $\mathfrak{c}$ s Moduln $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_s$ so zu bestimmen, dass

$$[\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_s] = \mathfrak{c}$$

wird, eine Aufgabe, die natürlich immer und im Allgemeinen auf vielfache Weise lösbar ist. Etwas Anderes aber ist es, wenn man die

Bedingung stellt, dass jeder der Moduln α_i einer bestimmten gegebenen Classe A_i angehören soll. Aus § 2, VII folgt der Satz: Ist es für irgend einen Modul $\mathfrak{c}$ der Classe Γ möglich, ihn als kleinstes gemeinsames Vielfaches von s Moduln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_s$ darzustellen, welche bez. den Classen $A_1, A_2, \ldots A_s$ angehören, so ist dasselbe für jeden Modul der Classe Γ möglich. Allgemeiner: Die Anzahl der Systeme von je s Moduln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_s$, welche den Bedingungen

$$\mathrm{Cl}\ \alpha_1 = A_1,\ \mathrm{Cl}\ \alpha_2 = A_2, \ldots \mathrm{Cl}\ \alpha_s = A_s;\quad [\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_s] = \mathfrak{c}$$

genügen, ist für jeden Modul $\mathfrak{c}$ der Classe Γ die nämliche. Wir bezeichnen diese Anzahl mit

$$\bar{\gamma}(\Gamma; A_1, A_2, \ldots A_s),$$

sie stellt eine Function der Classen $\Gamma, A_1, \ldots A_s$ dar, die in Bezug auf $A_1, \ldots A_s$ symmetrisch ist. Die Frage, ob ein Modul $\mathfrak{c}$ der Classe Γ sich darstellen lasse als kleinstes gemeinsames Vielfaches von s Moduln $\alpha_1, \ldots \alpha_s$, welche bez. den Classen $A_1, \ldots A_s$ angehören, fällt hiernach zusammen mit der Frage, ob $\bar{\gamma}(\Gamma; A_1, \ldots A_s) > 0$ ist. Die Entscheidung hierüber lässt sich natürlich in jedem gegebenen Falle durch eine endliche Anzahl von Versuchen herbeiführen. Es handelt sich aber darum, ob man nicht allgemeine, leicht zu übersehende Beziehungen aufstellen könne, deren Bestehen zwischen den Classen $\Gamma, A_1, \ldots A_s$ die notwendige und hinreichende Bedingung für das Nichtverschwinden der Function $\bar{\gamma}(\Gamma; A_1, \ldots A_s)$ darstellt.

Nun erkennt man zunächst, dass $\bar{\gamma}(\Gamma; A_1, \ldots A_s)$ nur dann von 0 verschieden sein kann, wenn Γ durch jede der Classen $A_1, \ldots A_s$ theilbar ist. Betrachtet man daher die Classen $A_1, \ldots, A_s$ als gegeben, so stellt ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches $\Gamma' = [A_1, \ldots A_s]$ gewissermassen das Minimum unter denjenigen Classen Γ dar, für welche $\bar{\gamma}(\Gamma; A_1, \ldots A_s) > 0$ ausfällt, indem nämlich erstens $\bar{\gamma}(\Gamma'; A_1, \ldots A_s) > 0$ ist, weil der Hauptmodul von Γ' das kleinste gemeinsame Vielfache der Hauptmoduln von $A_1, \ldots A_s$ ist, und zweitens jede der Bedingung $\bar{\gamma}(\Gamma; A_1, \ldots A_s) > 0$ genügende Classe Γ ein Vielfaches von Γ' ist. Eine weitere Untersuchung zeigt, dass unter den in Rede stehenden Classen Γ auch ein Maximum existirt, d. h. eine unter ihnen, sie heisse Γ'', ist durch alle theilbar. Die Bildungsweise der Classe Γ'' soll bald angegeben werden.

Zu ganz analogen Resultaten wird man bei den Untersuchungen über den grössten gemeinsamen Theiler von Moduln geführt. Wir bezeichnen mit

$$\bar{\delta}(\Delta; A_1, \ldots A_s)$$

die Anzahl der Systeme von je s Moduln $\alpha_1, \ldots \alpha_s$, welche bez. den Classen $A_1, \ldots A_s$ entnommen sind und einen gegebenen Modul $\mathfrak{d}$ der Classe Δ zum grössten gemeinsamen Theiler haben. Betrachtet man

die Classen $A_1, \dots A_s$ als gegeben, so liegen die sämmtlichen Classen Δ, für welche $\bar{\delta}(\Delta; A_1, \dots A_s) > 0$ ist, zwischen einem Maximum Δ' und einem Minimum Δ'', sodass

$$\bar{\delta}(\Delta'; A_1, \dots A_s) > 0, \quad \bar{\delta}(\Delta''; A_1, \dots A_s) > 0$$

und jede andere Classe der betrachteten Art Divisor von Δ' und Vielfaches von Δ'' ist. Hierbei ist Δ' offenbar der grösste gemeinsame Theiler der Classen $A_1, \dots A_s$.

Um zu den Classen Γ'', Δ'' zu gelangen, hat man folgendermassen zu verfahren. Es sei

$$A_i = \mathrm{Cl}\,(a_{i1} | a_{i2} | \dots a_{in}) \quad (i = 1, 2, \dots s).$$

Man bilde aus den sämmtlichen $s \cdot n$ Invarianten

$$a_{11}, \dots a_{1n}, \dots a_{s1}, \dots a_{sn}$$

der Classen $A_1, \dots A_s$ ein Diagonalsystem K und bestimme dessen Classe K. Diese ist vom Grade $s \cdot n$ und offenbar unabhängig von der Reihenfolge der Classen $A_1, \dots A_s$. Die ersten n Invarianten von K bilden das Invariantensystem einer Classe n^{ten} Grades, welche wir den „Grenztheiler" der Classen $A_1, \dots A_s$ nennen und mit

$$(|A_1, \dots A_s|)$$

bezeichnen. Ebenso bilden die letzten n Invarianten von K das Invariantensystem einer Classe n^{ten} Grades. Dieselbe heisse das „Grenzvielfache" der Classen $A_1, \dots A_s$ und sei mit

$$[|A_1, \dots A_s|]$$

bezeichnet. Sie bildet das oben erwähnte Maximum für die Classen Γ, bei denen $\bar{\gamma}(\Gamma; A_1, \dots A_s) > 0$ ist, und ebenso ist der Grenztheiler von $A_1, \dots A_s$ das Minimum der Classen Δ, für welche $\bar{\delta}(\Delta; A_1, \dots A_s) > 0$ wird. Es ist nicht schwer, den Nachweis hierfür zu geben, ohne auf eine allgemeine Bestimmung der Functionen $\bar{\gamma}$ und $\bar{\delta}$ einzugehen. Es ersteht aber jetzt die Frage, ob auch umgekehrt für alle zwischen $[|A_1, \dots A_s|]$ und $[A_1, \dots A_s]$ gelegenen Classen Γ und für alle zwischen $(A_1, \dots A_s)$ und $(|A_1, \dots A_s|)$ gelegenen Classen Δ die Functionen $\bar{\gamma}(\Gamma; A_1, \dots A_s)$ und $\bar{\delta}(\Delta; A_1, \dots A_s) > 0$ ausfallen. Die Entscheidung hierüber ist mir erst durch ein eingehendes Studium der Functionen $\bar{\gamma}$ und $\bar{\delta}$ möglich gewesen; er hat sich gezeigt, dass die angeregte Frage zu bejahen ist. Damit hat man alsdann den folgenden Doppelsatz gewonnen, welcher namentlich auch für die Theorie der Gruppen von vertauschbaren Elementen von Interesse ist:

V. a. Damit ein Modul c der Classe Γ sich darstellen lasse als kleinstes gemeinsames Vielfaches von s Moduln $\mathfrak{a}_1, \dots \mathfrak{a}_s$, welche bez. den Classen $A_1, \dots A_s$ angehören, ist nothwendig und hinreichend, dass

Γ zwischen dem Grenzvielfachen und dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Classen $\mathsf{A}_1, \ldots \mathsf{A}_s$ liegt.

b. Damit ein Modul $\mathfrak{b}$ der Classe Δ sich darstellen lasse als grösster gemeinsamer Theiler von s Moduln $\mathfrak{a}_1, \ldots \mathfrak{a}_s$, welche bez. den Classen $\mathsf{A}_1, \ldots \mathsf{A}_s$ angehören, ist nothwendig und hinreichend, dass Δ zwischen dem grössten gemeinsamen Theiler und dem Grenztheiler der Classen $\mathsf{A}_1, \ldots \mathsf{A}_s$ liegt.

Im Folgenden wird der Nachweis dieses Satzes vollständig durch die Untersuchungen über die Functionen $\bar{\gamma}$ und $\bar{\delta}$ erledigt.

Aus § 2, XVI folgen die Relationen

VI.
$$\bar{\gamma}(\Gamma; \mathsf{A}_1, \ldots \mathsf{A}_s) = \prod_p \bar{\gamma}(\underset{p}{\Gamma}; \underset{p}{\mathsf{A}_1}, \ldots \underset{p}{\mathsf{A}_s})$$
$$\bar{\delta}(\Delta; \mathsf{A}_1, \ldots \mathsf{A}_s) = \prod_p \bar{\delta}(\underset{p}{\Delta}; \underset{p}{\mathsf{A}_1}, \ldots \underset{p}{\mathsf{A}_s}).$$

Man ersieht hieraus auch leicht, dass man, um den Nachweis von V zu führen, nur nöthig hat, ihn für primäre Classen zu erbringen.

§ 8.

Die Functionen t und v dargestellt durch die Function ψ.

Wir wenden uns nun einer näheren Betrachtung der Functionen $t(\mathsf{A}|\mathsf{B})$ und $v(\mathsf{A}|\mathsf{B})$ zu und wollen zunächst zeigen, wie sich dieselben mit Hülfe von ψ-Functionen darstellen lassen. Es kann dies in verschiedener Weise geschehen.

Es sei $\mathsf{A} = \mathrm{Cl}\,(a_1|a_2|\ldots a_n)$, $\mathsf{B} = \mathrm{Cl}\,(b_1|b_2|\ldots b_n)$, $\mathfrak{a}$ ein beliebiger Modul von A, endlich seien

(1) $$\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots \mathfrak{b}_{\psi(B)}$$

die sämmtlichen Moduln von B. Der Modul $\mathfrak{a}$ ist durch $a_1 \cdot \mathfrak{e}$ theilbar (§ 2, X); ist also $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{b}_k$ theilbar, so ist $\mathfrak{a}$ auch theilbar durch $[a_1\mathfrak{e}, \mathfrak{b}_k]$, und umgekehrt. Die Moduln

(2) $$[a_1\mathfrak{e}, \mathfrak{b}_1],\ [a_1\mathfrak{e}, \mathfrak{b}_2],\ \ldots\ [a_1\mathfrak{e}, \mathfrak{b}_{\psi(B)}]$$

gehören sämmtlich der Classe $[a_1\mathsf{E}, \mathsf{B}]$ an (§ 2, XI), und eine einfache Ueberlegung zeigt, dass jeder Modul von $[a_1\mathsf{E}, \mathsf{B}]$ in der Reihe (2) gleich oft, mithin $\frac{\psi(\mathsf{B})}{\psi([a_1\mathsf{E}, \mathsf{B}])}$ mal vorkommt. Da $\mathfrak{a}$ durch $t(\mathsf{A}|[a_1\mathsf{E}, \mathsf{B}])$ Moduln der Classe $[a_1\mathsf{E}, \mathsf{B}]$ theilbar ist, so erhält man den Satz.

I. Ist a_1 die erste Invariante der Classe A, so ist

$$t(\mathsf{A}\|\mathsf{B}) = \frac{\psi(\mathsf{B})}{\psi([a_1\mathsf{E}, \mathsf{B}])} \cdot t(\mathsf{A}|[a_1\mathsf{E}, \mathsf{B}]).$$

Ferner gilt der Satz:

II. Haben die Classen

$$\mathsf{A} = \mathrm{Cl}\,(a_1 | a_2 | \ldots a_n) \text{ und } \mathsf{B} = \mathrm{Cl}\,(b_1 | b_2 | \ldots b_n)$$

dieselbe erste Invariante $a_1 = b_1$ und wird

$$\mathsf{A}' = \mathrm{Cl}\,(a_2 | \ldots a_n),\ \mathsf{B}' = \mathrm{Cl}\,(b_2 | \ldots b_n)$$

gesetzt, so ist

$$t(\mathsf{A}|\mathsf{B}) = t(\mathsf{A}'|\mathsf{B}').$$

Beweis: Es sei A das Hauptsystem von A, α seine erste Zeile, $\mathrm{Md}\,A = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ der Hauptmodul von A', $\mathfrak{b} = \mathrm{Md}\,B$ irgend ein Divisor von $\mathfrak{a}$ innerhalb der Classe B. Ist

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

und werden mit $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ die Zeilen von B bezeichnet, so ist zunächst $\mathfrak{b} = \mathrm{Md}\,(\beta_1, \ldots \beta_n)$ und, weil $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{b}$ theilbar ist, mithin die Zeile α dem Modul $\mathfrak{b}$ angehört, $\mathfrak{b} = \mathrm{Md}\,(\alpha, \beta_1, \ldots \beta_n)$. Aus $\mathrm{Cl}\,B = \mathsf{B}$, $a_1 = b_1$ folgt, dass die Elemente b_{i1} sämmtlich durch a_1 theilbar sind. Setzt man nun $b_{i1} = m_i a_1$ $(i = 1, \ldots n)$, $\beta_i - m_i\alpha = \gamma_i$, so wird $\mathfrak{b} = \mathrm{Md}\,(\alpha, \gamma_1, \ldots \gamma_n)$. In γ_i ist das erste Element $= 0$; bezeichnet γ_i' die nach Weglassung dieser Null zurückbleibende Zeile von $n-1$ Elementen, so ist $\mathfrak{b}' = \mathrm{Md}\,(\gamma_1', \ldots \gamma_n')$ ein Modul $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades. Ist

$$B' = \begin{pmatrix} b'_{11} & \ldots & b'_{1n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ b'_{n-11} & \ldots & b'_{n-1n-1} \end{pmatrix} \tag{3}$$

irgend eine quadratische Basis dieses Moduls, so ist

$$\overline{B} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \ldots 0 \\ 0 & b'_{11} & \ldots b'_{1n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & b'_{n-11} & \ldots b''_{n-1n-1} \end{pmatrix} \tag{4}$$

eine Basis von $\mathfrak{b}$. Aus $\mathrm{Cl}\,\overline{B} = \mathsf{B}$ folgt leicht $\mathrm{Cl}\,\mathfrak{b}' = \mathrm{Cl}\,B' = \mathsf{B}'$, und aus der Theilbarkeit von $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{b}$ ergiebt sich, dass $\mathfrak{a}'$ durch $\mathfrak{b}'$ theilbar ist. Umgekehrt ist Folgendes leicht zu ersehen: Hat man zwei quadratische Systeme B', $\overline{B}$, wie sie durch (3) und (4) dargestellt werden, und ist $\mathrm{Md}\,B' = \mathfrak{b}'$ Divisor von $\mathfrak{a}'$, $\mathrm{Cl}\,B' = \mathsf{B}'$, so folgt, dass $\mathrm{Md}\,\overline{B} = \mathfrak{b}$ Divisor von $\mathfrak{a}$, $\mathrm{Cl}\,\overline{B} = \mathsf{B}$ ist. Endlich erkennt man, dass in der angegebenen Weise der Modul $\mathfrak{b}'$ durch den Modul $\mathfrak{b}$ und ebenso der Modul $\mathfrak{b}$ durch den Modul $\mathfrak{b}'$ eindeutig bestimmt ist. Es hat also

$\mathfrak{a}$ in der Classe B ebensoviele Divisoren wie $\mathfrak{a}'$ in der Classe B', d. h. es ist

$$t(\mathsf{A}|\mathsf{B}) = t(\mathsf{A}'|\mathsf{B}').$$

Es sei jetzt $\mathsf{A} = \mathrm{Cl}(a_1|a_2|\dots a_n)$ theilbar durch $\mathsf{B} = \mathrm{Cl}(b_1|b_2|\dots b_n)$ und es werde

$$(5)\qquad \begin{cases} \mathrm{Cl}(a_{i+1}|a_{i+2}|\dots a_n) = \mathsf{A}_i, \\ \mathrm{Cl}([a_i, b_{i+1}]|[a_i, b_{i+2}]|\dots[a_i, b_n]) = \mathsf{B}_i, \\ \mathrm{Cl}([a_{i+1}, b_{i+1}]|[a_{i+1}, b_{i+2}]|\dots[a_{i+1}, b_n]) = \overline{\mathsf{B}}_i, \\ (i = 0, 1, \dots n-1) \end{cases}$$

gesetzt. Dann ist

$$\overline{\mathsf{B}}_i = [a_{i+1}\mathsf{E}, \mathsf{B}_i]$$

und daher (Satz I)

$$t(\mathsf{A}_i|\mathsf{B}_i) = \frac{\psi(\mathsf{B}_i)}{\psi(\overline{\mathsf{B}}_i)} \cdot t(\mathsf{A}_i|\overline{\mathsf{B}}_i),$$

ferner ist $[a_{i+1}, b_{i+1}] = a_{i+1}$, woraus (Satz II)

$$t(\mathsf{A}_i|\overline{\mathsf{B}}_i) = t(\mathsf{A}_{i+1}|\mathsf{B}_{i+1})$$

folgt. Berücksichtigt man endlich, dass $t(\mathsf{A}_{n-1}|\mathsf{B}_{n-1}) = 1$ ist, so gelangt man zu der Formel

$$\text{III.}\qquad t(\mathsf{A}|\mathsf{B}) = \frac{\psi(\mathsf{B})\psi(\mathsf{B}_1)\dots\psi(\mathsf{B}_{n-2})}{\psi(\overline{\mathsf{B}})\psi(\overline{\mathsf{B}}_1)\dots\psi(\overline{\mathsf{B}}_{n-2})}.$$

Die Function $v(\mathsf{A}|\mathsf{B})$ lässt sich unter Anwendung zweier Sätze, welche ein dualistisches Analogon zu den unter I und II angegebenen bilden, ebenfalls als Quotient aus Producten von ψ-Functionen darstellen. Dasselbe kann aber auch erreicht werden, indem man die Formeln § 7, I und die soeben für die Function $t(\mathsf{A}|\mathsf{B})$ gefundene anwendet. Man erhält dann

$$\text{IV.}\qquad v(\mathsf{A}|\mathsf{B}) = \frac{\psi(\mathsf{A})\psi(\mathsf{B}_1)\dots\psi(\mathsf{B}_{n-2})}{\psi(\overline{\mathsf{B}})\psi(\overline{\mathsf{B}}_1)\dots\psi(\overline{\mathsf{B}}_{n-2})}.$$

Die weitere Ausrechnung der Functionen $t(\mathsf{A}|\mathsf{B})$ und $v(\mathsf{A}|\mathsf{B})$, bei welcher wir uns auf primäre Classen beschränken können, soll erst an späterer Stelle erfolgen.

§ 9.

Darstellung der Function $\bar{\gamma}$ durch t-Functionen, der Function $\bar{\delta}$ durch v-Functionen.

Nachdem in § 8 gezeigt worden ist, wie sich die Functionen t und v durch ψ-Functionen ausdrücken lassen, soll nunmehr dargethan werden, wie man mit Hülfe der Functionen t und v die Functionen $\bar{\gamma}$ und $\bar{\delta}$ darstellen kann.

Es seien $A_1, \dots A_s, \Gamma, \Delta$ beliebige Classen n^{ten} Grades, und

$$\mathfrak{a}_1^{(i)}, \mathfrak{a}_2^{(i)}, \dots \mathfrak{a}_{\psi(A_i)}^{(i)} \quad (i = 1, 2, \dots s)$$

die sämmtlichen Moduln von A_i. Die Anzahl der Systeme zu je s Moduln

(1) $$\mathfrak{a}_{\varrho_1}^{(1)}, \mathfrak{a}_{\varrho_2}^{(2)}, \dots \mathfrak{a}_{\varrho_s}^{(s)},$$

welche bez. den Classen $A_1, A_2, \dots A_s$ angehören, beträgt

$$\psi(A_1) \cdot \psi(A_2) \dots \psi(A_s).$$

Die Anzahl der Systeme (1), für welche das kleinste gemeinsame Vielfache

(2) $$\left[\mathfrak{a}_{\varrho_1}^{(1)}, \mathfrak{a}_{\varrho_2}^{(2)}, \dots \mathfrak{a}_{\varrho_s}^{(s)}\right]$$

gleich einem bestimmten Modul einer Classe Θ wird, ist durch die Function $\bar{\gamma}(\Theta; A_1, \dots A_s)$ dargestellt. Ist daher $\mathfrak{c}$ irgend ein Modul von Γ, so ist die Anzahl derjenigen Systeme (1), für welche (2) irgend ein der Classe Θ angehöriger Divisor von $\mathfrak{c}$ wird, gleich

$$t(\Gamma|\Theta) \cdot \bar{\gamma}(\Theta; A_1, \dots A_s).$$

Um endlich die Anzahl aller Systeme (1) zu erhalten, für welche (2) irgend ein Divisor von $\mathfrak{c}$ wird, hat man nur die Summe

$$\sum_{\Theta} t(\Gamma|\Theta)\bar{\gamma}(\Theta; A_1, \dots A_s)$$

zu bilden, in welcher Θ alle Classen n^{ten} Grades durchläuft. Bedenkt man aber, dass der Modul (2) stets und nur dann Divisor von $\mathfrak{c}$ wird, wenn alle Moduln des Systems (1) Divisoren von $\mathfrak{c}$ sind, so erkennt man, dass die zuletzt berechnete Anzahl auch durch den Ausdruck

$$t(\Gamma|A_1) \cdot t(\Gamma|A_2) \dots t(\Gamma|A_s)$$

dargestellt wird. Man erhält daher die Relation

I. $$\sum_{\Theta} t(\Gamma|\Theta) \cdot \bar{\gamma}(\Theta; A_1, \dots A_s) = t(\Gamma|A_1) \dots t(\Gamma|A_s).$$

Diese (für jedes System von Classen $\Gamma, A_1, \dots A_s$ geltende) Relation reicht nun vollkommen hin, um die Function $\bar{\gamma}$ zu definiren.

Zunächst erkennt man aus I, dass $\bar{\gamma}(\Gamma; A_1, \dots A_s)$ verschwindet, wenn Γ nicht Vielfaches jeder der Classen $A_1, \dots A_s$ ist. In diesem Falle nämlich verschwindet das Product auf der rechten Seite von I. Setzen wir jetzt unsere Behauptung für alle Divisoren von Γ mit Ausnahme von Γ selbst als bewiesen voraus, so verschwindet für jedes von Γ verschiedene Θ ein Factor des Productes unter dem Summenzeichen, während $t(\Gamma|\Gamma) = 1$ wird. Man erhält daher

$$\bar{\gamma}(\Gamma; A_1, \dots A_s) = 0.$$

Hieraus folgt, dass man für jede Classe Γ der Relation I die Form geben kann:

$$(3) \qquad \sum_{\substack{(\Theta,\Gamma)=\Theta \\ (\Theta,\Gamma')=\Gamma'}} t(\Gamma|\Theta)\,.\,\bar{\gamma}(\Theta;A_1,\dots A_s) = t(\Gamma|A_1)\dots t(\Gamma|A_s),$$

wo Γ' das kleinste gemeinsame Vielfache der Classen $A_1,\dots A_s$ bezeichnet und die Summation sich auf alle zwischen Γ und Γ' (mit Einschluss der Grenzen) liegende Classen Θ erstreckt, wie dies durch die unter das Summenzeichen gesetzten Bedingungen

$$(\Theta,\Gamma)=\Theta, \quad (\Theta,\Gamma')=\Gamma'$$

gekennzeichnet ist. Ist daher $\Gamma=\Gamma'$, so erhält man einfach

$$\bar{\gamma}(\Gamma';A_1,\dots A_s) = t(\Gamma'|A_1)\dots t(\Gamma'|A_s),$$

ist aber Γ ein Vielfaches von Γ', jedoch von Γ' verschieden, so denken wir uns der Berechnung von $\bar{\gamma}(\Gamma;A_1,\dots A_s)$ die Berechnung derjenigen (nur in endlicher Anzahl verhandenen) Ausdrücke $\bar{\gamma}(\Theta;A_1,\dots A_s)$ vorangegangen, in denen Θ zwischen Γ und Γ' liegt und von Γ verschieden ist. Man erhält dann aus (3)

$$\text{Ia.}\quad \bar{\gamma}(\Gamma;A_1,\dots A_s) = t(\Gamma|A_1)\dots t(\Gamma|A_s) - \sum_{\substack{(\Theta,\Gamma)=\Theta \\ (\Theta,\Gamma')=\Gamma' \\ \Theta\neq\Gamma}} t(\Gamma|\Theta)\bar{\gamma}(\Theta;A_1,\dots A_s)$$

und hier stehen auf der rechten Seite nur bekannte Grössen.

In gleicher Weise erhält man für $\bar{\delta}$, wenn

$$(A_1,\dots A_s)=\Delta'$$

gesetzt wird:

$$\text{II.}\quad \sum_{\Theta} v(\Theta|\Delta)\bar{\delta}(\Theta;A_1,\dots A_s) = v(A_1|\Delta)\dots v(A_s|\Delta)$$

$$\text{IIa.}\quad \bar{\delta}(\Delta;A_1,\dots A_s) = v(A_1|\Delta)\dots v(A_s|\Delta) - \sum_{\substack{(\Theta,\Delta)=\Delta \\ (\Theta,\Delta')=\Theta \\ \Theta\neq\Delta}} v(\Theta|\Delta)\bar{\delta}(\Theta;A_1\dots A_s).$$

Die Recursionsformeln Ia, IIa zeigen, dass man die Functionen $\bar{\gamma}$ und $\bar{\delta}$ aus t- bez. v-Functionen durch die Operationen Addition, Subtraction, Multiplication zusammensetzen kann. Diese Darstellung ist aber wesentlich complicirter als die Darstellung der Functionen t und v durch ψ-Functionen. Während nämlich bei dieser die Anzahl der darstellenden ψ-Functionen durch den Grad n der betrachteten Classen beschränkt ist, ist die Anzahl der bei der Darstellung der Functionen $\bar{\gamma}(\Gamma;A_1,\dots A_s)$, $\bar{\delta}(\Delta;A_1,\dots A_s)$ verwandten t- und v-Functionen zwar in jedem einzelnen Falle eine endliche, sie ist aber, wenn

auch der Grad n und die Zahl s gegeben sind, an keine obere Grenze gebunden. Ferner wird durch die hier in den Formeln auftretende Subtraction die Beantwortung der Frage nach dem Verschwinden der $\bar{\gamma}$- und $\bar{\delta}$-Function sehr erschwert. Diese Schwierigkeiten werden beseitigt, indem es gelingt, die für die Functionen $\bar{\gamma}$ und $\bar{\delta}$ gewonnenen Ausdrücke umzuformen in Producte von Functionen, welche eine leichtere Uebersicht gestatten.

§ 10.

Vorbereitende Betrachtungen.

1. Wir beschränken uns von nun an auf die Betrachung primärer Classen. Eine solche Classe

$$A = \mathrm{Cl}\,(p^{r_1}|\,p^{r_2}|\,\ldots\,p^{r_n})$$

ist vollkommen bestimmt durch das Exponentensystem

$$r_1, r_2, \ldots r_n \tag{1}$$

und die Primzahl p. Denken wir uns nur das Exponentensystem (1) gegeben, so haben wir es mit einer sog. „halbbestimmten" primären Classe zu thun. Unter den kleinen griechischen Buchstaben sind im Folgenden stets halbbestimmte primäre Classen zu verstehen. Ist α eine solche Classe und (1) das System ihrer Exponenten, so schreiben wir auch

$$\alpha = \mathrm{cl}\,(r_1|\,r_2|\,\ldots\,r_n).$$

Ist wie in § 6

$$\begin{aligned} r_1 &= \cdots = r_{s_1} &&= e_1 \\ r_{s_1+1} &= \cdots = r_{s_1+s_2} &&= e_2 \\ &\vdots \qquad\quad \vdots && \vdots \\ r_{n-s_k+1} &= \cdots = r_n &&= e_k, \end{aligned}$$

$$e_1 < e_2 < \cdots < e_k,$$

so erhält man (§ 6, III; a, b)

$$\psi(\alpha) = p^{\sum_{i>k} s_i s_k (e_i - e_k)} \frac{\Phi(p; n)}{\Phi(p; s_1)\Phi(p; s_2)\ldots\Phi(p; s_k)} \tag{2}$$

$$= p^{\sum_{i>k} s_i s_k (e_i - e_k - 1)} \cdot g(p; n, s_1) g(p; n-s_1, s_2) \ldots g(p; n-s_1-\cdots-s_{k-2}, s_{k-1}).$$

als ganze Function der unbestimmten Primzahl p.

Werden mehrere Classen $\alpha, \beta \ldots$ gleichzeitig betrachtet, so ist, vorausgesetzt, dass für alle die unbestimmte Primzahl p dieselbe ist. Hiernach ist klar, was Ausdrücke wie „α ist theilbar durch β" u. a. bedeuten. Hat man s Classen

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_s$$

und ist

$$\alpha_i = \mathrm{cl}\,(a_{i1}|a_{i2}|\ldots a_{in}) \qquad (i=1,\ldots s),$$
$$\gamma' = [\alpha_1, \ldots \alpha_s] = \mathrm{cl}\,(c_1'|\ldots c_n')$$

ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches

$$\delta' = (\alpha_1, \ldots \alpha_s) = \mathrm{cl}\,(d_1'|\ldots d_n')$$

ihr grösster gemeinsamer Theiler, so ist c_k' $(k=1,\ldots n)$ die grösste, d_k' die kleinste der Zahlen $a_{1k}, \ldots a_{sk}$. Ferner ergiebt sich aus der in § 7 gegebenen Definition leicht, wie man das Grenzvielfache $\gamma'' = [\,|\alpha_1, \ldots \alpha_s|\,]$ und den Grenztheiler $\delta'' = (|\alpha_1, \ldots \alpha_s|)$ der Classen $\alpha_1 \ldots \alpha_s$ zu ermitteln hat: Man ordne die $n \cdot s$ Exponenten von $\alpha_1, \ldots \alpha_s$ nach ihrer Grösse (sodass sie eine nirgends abnehmende Reihe bilden). Sind $d_1'', \ldots d_n''$ die n kleinsten, $c_1'', \ldots c_n''$ die n grössten, so ist

$$\gamma'' = \mathrm{cl}\,(c_1''|\ldots c_n''), \qquad \delta'' = \mathrm{cl}\,(d_1''|\ldots d_n'').$$

Dass α durch β theilbar ist, drücken wir durch die Ungleichung $\alpha \geqq \beta$ oder $\beta \leqq \alpha$ aus; die Bezeichnungen $\alpha > \beta$, $\beta < \alpha$ schliessen die Gleichheit der Classen α und β aus.

Ist die Ungleichung $\alpha \geqq \beta$ nicht erfüllt, so verschwinden $t(\alpha|\beta)$ und $v(\alpha|\beta)$ identisch, d. h. für jedes p. Sonst ergiebt sich die Bedeutung von $t(\alpha|\beta)$ und $v(\alpha|\beta)$ aus den Formeln § 8, III, IV, ebenso wie die der Functionen $\bar{\gamma}(\gamma;\ \alpha_1, \ldots \alpha_s)$, $\bar{\delta}(\delta;\ \alpha_1, \ldots \alpha_s)$ aus den Formeln § 9, Ia, IIa. Alle diese Functionen sind, wie man leicht erkennt, ganze Functionen von p. Die Darstellung gewinnt an Anschaulichkeit, wenn wir hierbei p als eine im reellen Gebiete beliebig veränderliche Grösse betrachten. Wir bringen dies äusserlich zum Ausdruck, indem wir den Buchstaben p durch x ersetzen.

2. Somit haben wir jetzt

$$\psi(\alpha) = x^{\sum_{i>k} s_i s_k (e_i - e_k)} \frac{\vartheta(x;\ n)}{\vartheta(x;\ s_1)\ldots\vartheta(x;\ s_k)}$$

$$= x^{\sum_{i>k} s_i i_k (e_i - e_k - 1)}\, g(x;\ n, s_1)\ldots g(x;\ n - s_1 - \cdots - s_{k-2},\ s_{k-1}),$$

wo $s_1, \ldots s_k$, $e_1, \ldots, e_k$ ihre frühere Bedeutung haben. Sind also die Exponenten von α nicht numerisch gegeben, so muss man, um den Ausdruck $\psi(\alpha)$ bilden zu können, noch die Zahlen $s_1, \ldots s_k$ haben, d. h. es muss von zwei aufeinanderfolgenden Exponenten noch gesagt sein, ob sie gleich sind oder nicht. Noch grösseren Unbequemlichkeiten ist man bei den Functionen t und v ausgesetzt, und die Behandlung der Functionen $\bar{\gamma}$ und $\bar{\delta}$ wird dadurch ganz unübersichtlich. Man kann diese Schwierigkeiten beseitigen, indem man die Exponenten

durch andere Grössen ersetzt, welche unter dem Namen „Indices" in die Betrachtung eingeführt werden mögen.

Als „Reihe der Indices" einer Classe α bezeichnen wir eine unendliche Reihe ganzer Zahlen

$$a_1, a_2, a_3, \ldots,$$

deren h^{tes} Element a_h angiebt, wie viele Exponenten von α kleiner als h sind. So gehören z. B. zu den Classen

$$\text{cl}\,(2\,|\,3\,|\,3\,|\,5\,|\,8); \qquad \text{cl}\,(0\,|\,4\,|\,7)$$

die Reihen

$$0, 0, 1, 3, 3, 4, 4\,4, 5, 5, 5, \ldots; \quad 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, \ldots;$$

Man erkennt leicht die Richtigkeit der folgenden Sätze:

1) Die Reihe der Indices einer Classe n^{ten} Grades α ist eine unendliche niemals abnehmende Reihe ganzer nicht negativer Zahlen, welche bis zur Zahl n ansteigt.

2) Umgekehrt ist jede Reihe, welche die unter 1) angegebenen Eigenschaften besitzt, Reihe der Indices für eine gewisse Classe α vom Grade n.

3) Der Definition zufolge giebt der h^{te} Index von α an, wie viele Exponenten $< h$ sind.

4) Umgekeht giebt der h^{te} Exponent von α an, wie viele Indices $< h$ sind.

Man kann sich die Reihe der Indices $a_1, a_2, \ldots$ einer Classe α auch nach der negativen Seite hin fortgesetzt denken. Es ist dann $a_0 = 0$, $a_{-1} = 0$, $a_{-2} = 0, \ldots$ zu setzen.

Wir fügen nun zu den Sätzen 1) bis 4) noch die folgenden, deren Beweis ebenfalls leicht ist.

5) Sind α und β Classen vom Grade n, a_h (wo für h jede ganze Zahl zu setzen ist) die Indices von α, b_h die Indices von β, so ist die Ungleichung $\alpha \geqq \beta$ dann und nur dann erfüllt, wenn für jedes h, $a_h \leqq b_h$ ist.

Es seien jetzt

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_s$$

Classen n^{tm} Grades und es werde

$$[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_s] = \gamma', \qquad (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_s) = \delta',$$
$$[\,|\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_s|\,] = \gamma'', \qquad (\,|\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_s|\,) = \delta''$$

gesetzt; mit $a_h^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots s)$, c_h', d_h', c_h'', d_h'' seien die Indices der Classen α_i $(i = 1, 2, \ldots s)$, γ', δ', γ'', δ'' bezeichnet. Aus 5) folgt:

6) Der h^{te} Index c_h' des kleinsten gemeinsamen Vielfachen γ' von $\alpha_1, \ldots \alpha_s$ ist gleich dem kleinsten, der h^{te} Index d_h' des grössten gemeinsamen Theilers δ' von $\alpha_1, \ldots \alpha_s$ gleich dem grössten unter den h^{ten} Indices $a_h^{(1)}, \ldots a_h^{(s)}$ von $\alpha_1, \ldots \alpha_s$.

Für die Reihen der Indices des Grenzvielfachen und des Grenztheilers erhält man den Satz:

7) Der h^{te} Index c_h'' des Grenzvielfachen γ'' der Classen $\alpha_1, \ldots \alpha_s$ ist gleich der grösseren der beiden Zahlen

$$0 \text{ und } n - \sum_{i=1}^{s} (n - a_h^{(i)}) = \left(\sum_{i=1}^{s} a_h^{(i)} \right) - (s-1)n,$$

der h^{te} Index d_h'' ihres Grenztheilers δ'' gleich der kleineren der beiden Zahlen

$$n \text{ und } \sum_{i=1}^{s} a_h^{(i)}.$$

Dabei sind mit $a_h^{(i)}$ die Indices von α_i bezeichnet worden.

Aus 4) ergiebt sich leicht:

8) Zwischen den Indices a_h und den Exponenten $\bar{a}_1, \ldots \bar{a}_n$ einer Classe α besteht unter anderen die Relation

$$(1-n)\bar{a}_1 + (3-n)\bar{a}_2 + (5-n)\bar{a}_3 + \cdots + (n-1)\bar{a}_n = \sum_h a_h(n-a_h).$$

Die Grenzen, bis zu welchen die Summation erstreckt werden muss, brauchen nicht angegeben zu werden, da die Relation jedenfalls richtig ist, wenn man h alle ganzen Zahlen durchlaufen lässt.

3. In § 6 ist die Function $g(x; n, m)$ eingeführt und für alle ganzzahligen Werthe von n und m definirt worden. Wir stellen hier einige Formeln und Satze, welche diese Function betreffen und welche wir später brauchen, zusammen.

1) $g(x; n, m) = \dfrac{(1-x^n)(1-x^{n-1})\cdots(1-x^{n-m+1})}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$ für $m > 0$.

2) $g(x; n, 0) = 1$.

3) $g(x; n, m) = 0$ für $m < 0$.

4) $g(x; 0, m) = 0$ für $m \gtrless 0$, $g(x; 0, 0) = 1$.

5) $g(x; n, m) = g(x; n-1, m) + x^{n-m} g(x; n-1, m-1)$.

6) $g(x; n, m) = g(x; n-1, m-1) + x^m g(x; n-1, m)$.

7) $g(x; n, m) = x^{m(n-m)} g\left(\frac{1}{x}; n, m\right)$.

8) $g(x; s, q) \cdot g(x; s-q, r) = g(x; s, r) \cdot g(x; s-r, q)$.

9) $g(x; -n, m) = (-1)^m x^{-mn - \frac{m(m-1)}{2}} g(x; n+m-1, m)$.

10) $g(x; n, m) = g(x; n, n-m)$ für $n \geqq 0$.

11) $g\left(\frac{1}{x}; n, m\right) = \dfrac{\vartheta(x; n)}{\vartheta(x; m)\,\vartheta(x; n-m)}$ für $n \geqq m \geqq 0$.

12) In allen Fällen giebt die Entwickelung von g nach Potenzen

von x nur eine endliche Anzahl positiver und negativer Potenzen und sind die Coefficienten ganze nicht negative Zahlen.

13) Für $n \geqq 0$ ist $g(x;\ n,\ m)$ eine ganze Function von x, für $n > 0,\ m \geqq 0$ verschwindet dieselbe nicht identisch.

§ 11.

Die Functionen $\psi(\alpha)$, $t(\alpha|\beta)$, $v(\alpha|\beta)$, dargestellt mit Hilfe der Indices.

Hat die Classe

$$\alpha = \mathrm{cl}\,(\bar{a}_1 \mid \bar{a}_2 \mid \ldots \bar{a}_n)$$

die Indices a_h, so stellt $a_h - a_{h-1}$ die Anzahl derjenigen Exponenten dar, welche gleich $h-1$ sind. Berücksichtigt man daher, dass $\vartheta(x;\ 0) = 1$ ist, so erhält man nach § 6, III die Formel

$$(1) \qquad \psi(\alpha) = x^{(1-n)\bar{a}_1 + (2-n)\bar{a}_2 + \cdots + (n-1)\bar{a}_n} \cdot \frac{\vartheta(x;\ a)}{\prod_h \vartheta(x;\ a_h - a_{h-1})}.$$

Es ist aber $\left(\S\ 10,\ 2,\ 8)\right)$

$$x^{(1-n)\bar{a}_1 + (2-n)\bar{a}_2 + \cdots + (n-1)\bar{a}_n} = x^{\sum_h (n-a_h)\,a_h},$$

ferner

$$\vartheta(x;\ n) = \prod_h \frac{\vartheta(x;\ n - a_{h-1})}{\vartheta(x;\ n - a_h)} = \prod_h \frac{\vartheta(x;\ a_h)}{\vartheta(x;\ a_{h-1})},$$

$$\frac{\vartheta(x;\ n)}{\prod_h \vartheta(x;\ a_h - a_{h-1})} = \prod_h \frac{\vartheta(x;\ n - a_{h-1})}{\vartheta(x;\ n - a_h)\,\vartheta(x;\ a_h - a_{h-1})}$$

$$= \prod_h \frac{\vartheta(x;\ a_h)}{\vartheta(x;\ a_{h-1})\,\vartheta(x;\ a_h - a_{h-1})}$$

$$= \prod_h g\left(\tfrac{1}{x};\ n - a_{h-1},\ n - a_h\right)$$

$$= \prod_h g\left(\tfrac{1}{x};\ a_h,\ a_{h-1}\right) \qquad \left(\S\ 10,\ 3,\ 11)\right),$$

und daher unter Berücksichtigung von § 10, 3, 7)

$$\text{I.} \qquad \psi(\alpha) = x^{\sum_h (n-a_h)\,a_h} \prod_h g\left(\tfrac{1}{x};\ n - a_{h-1},\ n - a_h\right)$$

$$= x^{\sum_h (n-a_h)\,a_h} \prod_h g\left(\tfrac{1}{x};\ a_h,\ a_{h-1}\right)$$

$$= x^{\sum_h (n-a_h)\,a_{h-1}} \prod_h g(x;\ n - a_{h-1},\ n - a_h)$$

$$= x^{\sum_h (n-a_h)\,a_{h-1}} \prod_h g(x;\ a_h,\ a_{h-1}).$$

Ist von den Classen

$$\alpha = \mathrm{cl}\,(a_1'|\ldots a_n'),$$
$$\beta = \mathrm{cl}\,(b_1'|\ldots b_n') = \beta_0$$

die erste durch die zweite theilbar, so ist (§ 8, III)

$$(2)\qquad t(\alpha|\beta) = \frac{\psi(\beta)\cdot\varphi(\beta_1)\cdots\psi(\beta_{n-2})}{\varphi(\bar\beta)\cdot\psi(\bar\beta_1)\cdots\psi(\bar\beta_{n-2})} = \frac{\psi(\beta)\cdot\psi(\beta_1)\cdots\psi(\beta_{n-1})}{\psi(\bar\beta)\cdot\psi(\bar\beta_1))\cdots\psi(\bar\beta_{n-1})}.$$

Dabei ergiebt sich die Bedeutung der Classen

$$\bar\beta = \bar\beta_0,\ \beta_i,\ \bar\beta_i \quad (i = 1,\ldots n-1)$$

aus § 8, (5). Wir bezeichnen mit

$$a_h,\ b_h = b_h^{(0)},\ \bar b_h^{(0)},\ b_h^{(i)},\ \bar b_h^{(i)} \quad (i = 1,\ldots n-1)$$

die Indices der Classen

$$\alpha,\ \beta = \beta_0,\ \bar\beta = \bar\beta_0,\ \beta_i,\ \bar\beta_i$$

und erhalten, weil β_i und $\bar\beta_i$ $(i = 0,\ldots n-1)$ vom Grade $n-i$ sind,

$$\psi(\beta_i) = x^{\sum_h (n-i-b_h^{(i)})\,b_h^{(i)}} \prod_h g\left(\tfrac{1}{x};\ b_h^{(i)},\ b_{h-1}^{(i)}\right),$$

$$\psi(\bar\beta_i) = x^{\sum_h (n-i-\bar b_h^{(i)})\,\bar b_h^{(i)}} \prod_h g\left(\tfrac{1}{x};\ \bar b_h^{(i)},\ \bar b_{h-1}^{(i)}\right)$$

also nach (2)

$$(3)\qquad t(\alpha|\beta) = x^{\sum_h \sum_{i=0}^{n-1} \left\{(n-i-b_h^{(i)})\,b_h^{(i)} - (n-i-\bar b_h^{(i)})\,\bar b_h^{(i)}\right\}} \prod_h \prod_{i=0}^{n-1} \frac{g\left(\frac{1}{x};\ b_h^{(i)};\ b_{h-1}^{(i)}\right)}{g\left(\frac{1}{x};\ \bar b_h^{(i)},\ \bar b_{h-1}^{(i)}\right)}.$$

Wir wollen den eben gefundenen Ausdruck so umformen, dass er nur die Indices von α und β enthält.

Für $a_h < i$ ist der Exponent von α $a_i' \geqq h$, daher werden, wie aus § 8, (5) zu ersehen, $b_h^{(i)} = 0$, $\bar b_h^{(i)} = 0$,

$$\text{für } a_h = i \text{ ist } a_i' < h \leqq a_{i+1}'$$

mithin

$$\bar b_h^{(i)} = 0,\quad b_h^{(i)} = b_h - i = b_h - a_h,$$

$$\text{für } a_h > i \text{ ist } a_{i+1}' < h,$$

daher wird

$$b_h^{(i)} = \bar b_h^{(i)} = b_h - i.$$

Hieraus folgt

$$(n-i-b_h^{(i)})\,b_h^{(i)} - (n-i-\bar b_h^{(i)})\,\bar b_h^{(i)} = 0 \text{ für } i \gtrless a_h,$$
$$= (n-b_h)\,(b_h - a_h) \text{ für } i = a_h,$$

$$(4)\quad \sum_h \sum_{i=0}^{n-1} (n-i-b_h^{(i)})\, b_h^{(i)} - (n-i-\overline{b}_h^{(i)})\, \overline{b}_h^{(i)} = \sum_h (n-b_h)(b_h-a_h).$$

Die Summe rechts ist über alle h zu erstrecken, für welche a_h einen der Werthe $0, 1, \ldots n-1$ hat; da aber a_h ausserdem nur noch gleich n sein kann und in diesem Falle auch $b_h = n$ wird, so brauchen wir dem h keine Beschränkung aufzuerlegen. Ferner ergiebt sich

$$\frac{g\left(\frac{1}{x};\, b_h^{(i)},\, b_{h-1}^{(i)}\right)}{g\left(\frac{1}{x};\, \overline{b}_h^{(i)},\, \overline{b}_{h-1}^{(i)}\right)} = 1 \quad \text{für} \quad i \gtrless a_{h-1},$$

$$= g\left(\frac{1}{x};\, b_h - a_{h-1},\, b_{h-1} - a_{h-1}\right) \text{ für } i = a_{h-1},$$

$$(5)\quad \prod_h \prod_{i=0}^{n-1} \frac{g\left(\frac{1}{x};\, b_h^{(i)},\, b_{h-1}^{(i)}\right)}{g\left(\frac{1}{x};\, \overline{b}_h^{(i)},\, \overline{b}_{h-1}^{(i)}\right)} = \prod_h g\left(\frac{1}{x};\, b_h - a_{h-1},\, b_{h-1} - a_{h-1}\right).$$

II. $$t(\alpha|\beta) = x^{\sum_h (n-b_h)(b_h-a_h)} \cdot \prod_h g\left(\frac{1}{x};\, b_h - a_{h-1},\, b_{h-1} - a_{h-1}\right)$$

$$= x^{\sum_h (n-b_h)(b_{h-1}-a_{h-1})} \prod_h g(x;\, b_h - a_{h-1},\, b_{h-1} - a_{h-1})$$

$$= x^{\sum_h (n-b_h)(b_h-a_h)} \cdot \prod_h g\left(\frac{1}{x};\, b_h - a_{h-1},\, b_h - b_{h-1}\right)$$

$$= x^{\sum_h (n-b_h)(b_{h-1}-a_{h-1})} \prod_h g(x;\, b_h - a_{h-1},\, b_h - b_{h-1})$$

$$\left(\S\ 10,\ 3,\ 10)\right).$$

Nach § 7, I hat man jetzt

$$(6)\quad v(\alpha|\beta) = \frac{\psi(\alpha)}{\psi(\beta)}\, t(\alpha|\beta) = x^{\sum_h \{(n-a_h)a_h - (n-b_h)b_h + (n-b_h)(b_h-a_h)\}}$$

$$\cdot \prod_h \frac{g\left(\frac{1}{x};\, a_h,\, a_{h-1}\right)\, g\left(\frac{1}{x};\, b_h - a_{h-1},\, b_{h-1} - a_{h-1}\right)}{g\left(\frac{1}{x};\, b_h,\, b_{h-1}\right)}.$$

Es ist aber

$$(7)\quad x^{\sum_h \{(n-a_h)a_h - (n-b_h)b_h + (n-b_h)(b_h-a_h)\}} = x^{\sum_h (b_h-a_h)a_h},$$

und nach § 10, 3, 11) der Ausdruck hinter dem Productzeichen gleich

$$\frac{\vartheta(x;\, a_h}{\vartheta(x;\, a_{h-1})\,\vartheta(x;\, a_h - a_{h-1})} \cdot \frac{\vartheta(x;\, b_{h-1})\,\vartheta(x;\, b_h - b_{h-1})}{\vartheta(x;\, b_h)} \cdot \frac{\vartheta(x;\, b_h - a_{h-1})}{\vartheta(x;\, b_{h-1} - a_{h-1})\,\vartheta(x;\, b_h - b_{h-1})}.$$

Da nun

$$\prod_h \frac{\vartheta(x;\, a_h)}{\vartheta(x;\, a_{h-1})} = \vartheta(x;\, n), \quad \prod_h \frac{\vartheta(x;\, b_{h-1})}{\vartheta(x;\, b_h)} = \frac{1}{\vartheta(x;\, n)},$$

$$\prod_h \frac{\vartheta(x;\, b_h - a_{h-1})}{\vartheta(x;\, a_h - a_{h-1})\,\vartheta(x;\, b_{h-1} - a_{h-1})} = \prod_h \frac{\vartheta(x;\, b_h - a_{h-1})}{\vartheta(x;\, a_h - a_{h-1})\,\vartheta(x;\, b_h - a_h)} = \prod_h g\left(\frac{1}{x};\, b_h - a_{h-1},\, b_h - a_h\right),$$

so geht (6) über in

III.
$$v(\alpha|\beta) = x^{\sum_h (b_h - a_h)\, a_h} \prod_h g\left(\frac{1}{x};\, b_h - a_{h-1},\, b_h - a_h\right)$$
$$= x^{\sum_h (b_h - a_h)\, a_{h-1}} \prod_h g\,(x;\, b_h - a_{h-1},\, b_h - a_h)$$
$$= x^{\sum_h (b_h - a_h)\, a_h} \prod_h g\left(\frac{1}{x};\, b_h - a_{h-1},\, a_h - a_{h-1}\right)$$
$$= x^{\sum_h (b_h - a_h)\, a_{h-1}} \prod_h g\,(x;\, b_h - a_{h-1},\, a_h - a_{h-1}).$$

Alle diese Ausdrücke sind unter der Voraussetzung hergeleitet worden, dass $\alpha \geqq \beta$ ist. Ist aber diese Voraussetzung nicht erfüllt, so kann man h so wählen, dass $b_{h-1} < a_{h-1} \leqq b_h$ ist, dann wird

$$g\left(\frac{1}{x};\, b_h - a_{h-1},\, b_{h-1} - a_{h-1}\right) = 0,$$
$$g\,(x;\, b_h - a_{h-1},\, b_{h-1} - a_{h-1}) = 0,$$
$$g\left(\frac{1}{x};\, b_h - a_{h-1},\, b_h - b_{h-1}\right) = 0,$$
$$g\,(x;\, b_h - a_{h-1},\, b_h - b_{h-1}) = 0,$$

die vier unter II angegebenen Ausdrücke verschwinden also identisch, und dasselbe gilt von den vier Ausdrücken III. Da nun in dem hier besprochenen Fall thatsächlich $t(\alpha|\beta) = 0$, $v(\alpha|\beta) = 0$ ist, so bestehen die angegebenen Formeln ohne jede Einschränkung.

§ 12.

Die Grade der Functionen ψ, t, v, $\bar{\gamma}$, $\bar{\delta}$.

Da es im Folgenden nirgends mehr nöthig sein wird, Classen verschiedenen Grades neben einander zu betrachten, so sei jetzt festgesetzt, dass der Grad aller vorkommenden Classen mit n bezeichnet werde.

Die Formeln § 11, I zeigen, dass $\psi(\alpha)$ eine ganze Function von x mit ganzzahligen Coefficienten ist, dass der Coefficient der höchsten Potenz von x gleich 1 und der Grad von $\psi(\alpha)$ gleich

$$\sum_h (n - a_h) a_h \tag{1}$$

ist, wenn mit a_h die Indices von α bezeichnet werden. Ist β ein Divisor von α, so sind (§ 11, II, III) $t(\alpha|\beta)$, $v(\alpha|\beta)$ ebenfalls ganze Functionen von x mit ganzzahligen Coefficienten, und es ist auch bei ihnen der Coefficient der höchsten Potenz von x gleich 1. Als die Grade der Functionen $t(\alpha|\beta)$, $v(\alpha|\beta)$ ergeben sich, wenn mit b_h die Indices von β bezeichet werden, die Ausdrücke

$$\sum_h (n - b_h)(b_h - a_h), \tag{2}$$

$$\sum_h (b_h - a_h) a_h. \tag{3}$$

Für die Functionen $\bar{\gamma}(\gamma; \alpha_1, \ldots \alpha_s)$, $\bar{\delta}(\delta; \alpha_1, \ldots \alpha_s)$ haben wir nach § 9, IIa, IIIa die Relationen

$$(4)\quad \begin{cases} \bar{\gamma}(\gamma; \alpha_1, .., \alpha_s) = t(\gamma|\alpha_1) \ldots t(\gamma|\alpha_s) - \sum_{\gamma' \leqq \mu < \gamma} t(\gamma|\mu)\, \bar{\gamma}(\mu; \alpha_1, \ldots \alpha_s), \\ \bar{\delta}(\delta; \alpha_1, \ldots \alpha_s) = v(\alpha_1|\delta) \ldots v(\alpha_s|\delta) - \sum_{\delta' \geqq \mu > \delta} v(\mu|\delta)\, \bar{\delta}(\mu; \alpha_1, .. \alpha_s), \end{cases}$$

worin $\gamma' = [\alpha_1, \ldots \alpha_s]$, $\delta' = (\alpha_1, \ldots \alpha_s)$ ist und die Summation über alle diejenigen Classen μ zu erstrecken ist, welche den unter den Summenzeichen angegebenen Bedingungen genügen. Aus (4) und den Eigenschaften der Functionen t und v ersieht man, dass $\bar{\gamma}$ und $\bar{\delta}$ ganze Functionen von x mit ganzzahligen Coefficienten sind, ferner, dass $\bar{\gamma}$ verschwindet, wenn die Bedingung $\gamma \geqq \gamma'$ nicht erfüllt ist, dass $\bar{\delta}$ verschwindet, wenn die Bedingung $\delta \leqq \delta'$ nicht erfüllt ist.

Wir wollen zunächst den Grad von $\bar{\delta}$ näher untersuchen und setzen $\delta \leqq \delta'$ voraus. Der Coefficient der höchsten Potenz von x kann in keiner $\bar{\delta}$-Function negativ sein, weil die Function für keinen Prim-

zahlwerth von x negativ sein kann, indem sie alsdann eine gewisse Anzahl darstellt. Aus (4) folgt daher, dass der Grad von $\overline{\delta}(\delta; \alpha_1, \ldots \alpha_s)$ höchstens gleich dem Grade von $v(\alpha_1|\delta) \ldots v(\alpha_s|\delta)$ d. i. — wenn mit $a_h^{(i)}$, d_h die Indices von α_i $(i=1,\ldots s)$, δ bezeichnet werden —

$$\sum_{i=1}^{s} \sum_{h} (d_h - a_h^{(i)}) a_h^{(i)} \tag{5}$$

sein kann und dass nur die beiden folgenden Fälle möglich sind:

Entweder sind die Grade der Functionen

$$v(\mu|\delta)\overline{\delta}(\mu; \alpha_1, \ldots \alpha_s) \tag{6}$$

$(\delta' \geqq \mu > \delta)$ sämmtlich kleiner als der Ausdruck (5); dann erreicht $\overline{\delta}$ den angegebenen Maximalgrad und der Coefficient der höchsten Potenz ist 1. Oder es steigt von den Functionen (6) eine bis zum Grade

$$\sum_{i=1}^{s} \sum_{h} (d_h - a_h^{(i)}) a_h^{(i)}$$

an, dann bleibt der Grad von $\overline{\delta}$ hinter diesem Ausdruck zurück.

Wir wollen beweisen, dass die Function $\overline{\delta}(\delta; \alpha_1, \ldots \alpha_s)$ den angegebenen Maximalgrad (5) dann und nur dann erreicht, wenn die Classe δ, welche bereits als Divisor von δ' vorausgesetzt wurde, ein Vielfaches des Grenztheilers δ'' der Classen $\alpha_1, \ldots \alpha_s$ ist. — Bezeichnen wir zu diesem Zweck mit m_h die Indices der variabelen Classe μ, so ergiebt sich als Maximum für den Grad von

$$v(\mu|\delta) \cdot \overline{\delta}(\mu; \alpha_1, \ldots \alpha_s)$$

der Ausdruck

$$\sum_{h} (d_h - m_h) m_h + \sum_{i=1}^{s} \sum_{h} (m_h - a_h^{(i)}) a_h^{(i)} \tag{7}$$

$$- \sum_{i=1}^{s} \sum_{h} (d_h - a_h^{(i)}) a_h^{(i)} - \sum_{h} \left\{ (d_h - m_h) \left(\left(\sum_{i=1}^{s} a_h^{(i)} \right) - m_h \right) \right\}.$$

Es wird ferner (§ 10, 2, 7) u. 5)) δ dann und nur dann ein Vielfaches von δ'' sein, wenn für jedes h

$$d_h \leqq \sum_{i=1}^{s} a_h^{(i)} \tag{8}$$

ist.

Ist nun diese Ungleichung beständig erfüllt, so folgt aus $\mu > \delta$, dass kein Glied der Summe

$$\sum_{h} \left\{ (d_h - m_h) \left(\left(\sum_{i=1}^{s} a_h^{(i)} \right) - m_h \right) \right\} \tag{9}$$

negativ wird. Dagegen muss wenigstens ein positives Glied in der Summe vorkommen, da die Gleichheit von μ und δ ausgeschlossen ist, also wenigstens für ein h die Differenz $d_h - m_h$ und somit auch

$$\left(\sum_{i=1}^{s} a_h^{(i)}\right) - m_h > 0$$

ausfällt. In dem betrachteten Falle ist daher der Ausdruck (7) für jedes μ kleiner als der Ausdruck (5).

Wenn dagegen die Bedingungen (8) nicht durchweg erfüllt sind, so setzen wir

$$[\delta, \delta''] = \mu',$$

dann ist der Index m_h' von μ' gleich der kleineren der beiden Zahlen $\sum_{i=1}^{s} a_h^{(i)}$ und d_h, und die Classe μ' kommt, weil $\delta' \geqq \mu' > \delta''$ ist, unter den Classen μ vor. Aus $m_h' \leqq \sum_{i=1}^{s} a_h^{(i)}$ folgt nach dem soeben Bewiesenen, dass die Function $\bar{\delta}(\mu';\ \alpha_1, \ldots \alpha_s)$ wirklich bis zum Grade

$$\sum_{i=1}^{s} \sum_{h} (m_h' - a_h^{(i)})\, a_h^{(i)}$$

die Function

$$v(\mu' \mid \delta) \cdot \bar{\delta}(\mu';\ \alpha_1, \ldots \alpha_s)$$

bis zum Grade

$$\sum_{i=1}^{s} \sum_{h} (d_h - a_h^{(i)})\, a_h^{(i)} - \sum_{h} \left\{ (d_h - m_h') \left(\left(\sum_{i=1}^{s} a_h^{(i)} \right) - m_h' \right) \right\}$$

ansteigt, und da überdies das Product

$$(d_h - m_h') \left(\left(\sum_{i=1}^{s} a_h^{(i)} \right) - m_h' \right)$$

für jedes h verschwindet, so wird der Grad von

$$v(\mu' \mid \delta) \cdot \bar{\delta}(\mu';\ \alpha_1, \ldots \alpha_s)$$

gleich

$$\sum_{i=1}^{s} \sum_{h} (d_h - a_h^{(i)})\, a_h^{(i)}.$$

In ganz ähnlicher Weise ergeben sich für die Function

$$\bar{\gamma}(\gamma;\ \alpha_1, \ldots \alpha_s)$$

die folgenden Resultate:

Ist γ ein Vielfaches von $\gamma' = [\alpha_1, \ldots \alpha_s]$ so ist $\bar{\gamma}(\gamma; \alpha_1, \ldots \alpha_s)$ höchstens vom Grade

$$(10) \qquad \sum_{i=1}^{s} \sum_{k} (n - a_k^{(i)})(a_k^{(i)} - c_k),$$

wo mit c_k die Indices von γ bezeichnet worden sind. Die Function $\bar{\gamma}$ erreicht diesen Grad, wenn γ Divisor von $\gamma'' = [|\alpha_1, \ldots \alpha_s|]$ ist, und der Coefficient der höchsten Potenz von x ist alsdann $= 1$; in den anderen Fällen wird der Maximalgrad nicht erreicht.

Da die Functionen $\bar{\gamma}$ und $\bar{\delta}$ in den Fällen, in welchen der angegebene Maximalgrad erreicht wird, nicht identisch verschwinden, so müssen sie, sobald x eine gewisse positive Grösse überschreitet, stets positiv bleiben. Es wird sich später zeigen, dass dies schon für $x > 1$ eintritt, dass daher die Functionen für keinen Primzahlwerth von x verschwinden. Ferner wird es sich herausstellen, dass in den übrigen Fällen, für welche bisher nur gezeigt wurde, dass jener Maximalgrad nicht erreicht wird, die Functionen $\bar{\gamma}$ und $\bar{\delta}$ identisch verschwinden.

Damit ist alsdann der Beweis des Satzes § 7, V vollständig geführt. Um aber dahin zu gelangen, genügt es nicht, die Grade der Functionen $\bar{\gamma}$ und $\bar{\delta}$ zu betrachten. Wir müssen ihre Natur näher untersuchen und wollen zunächst diejenigen Functionen ins Auge fassen, aus denen sich, wie später nachgewiesen wird, die Functionen $\bar{\gamma}$ und $\bar{\delta}$ durch Multiplication unter Hinzufügung eines Factors, der nur eine Potenz von x ist, herstellen lassen, in derselben Weise, wie die Functionen ψ, t, v mit Hilfe der g-Functionen ausgedrückt wurden.

§ 13.

Die ϖ-Functionen.

1. Wir bezeichnen mit

$$\varpi(x|k|e|q_1, r_1; q_2, r_2; \ldots q_s, r_s)$$

die Summe

$$(1) \qquad \sum_{m}' (-1)^m x^{\frac{m(m-1)}{2} - km} \cdot g(x; e, m)\, g(x; q_1 - m, r_1)\, g(x; q_2 - m, r_2) \ldots g(x; q_s - m, r_s).$$

x heisst das Argument, k der erste, e der zweite Parameter der ϖ-Functionen, q_1 und r_1 bilden das erste, q_2 und r_2 das zweite, ... q_s und r_s das s^{te} Parameterpaar. Alle Parameter sollen ganze Zahlen sein, und die Summe erstreckt sich über alle ganzen Zahlen m. Ist $e \geqq 0$, — und auf diesen Fall können wir uns hier beschränken — so ist nur eine endliche Anzahl von Gliedern der Summe von 0 ver-

schieden. Die ω-Function ist dann eine rationale Function von x, welche nur für $x = 0$ und $x = \infty$ möglicherweise unendlich werden kann.

Die Function (1) soll eine „eigentliche" ω-Function heissen, wenn kein Parameter negativ und ferner

$$q_i \geqq \begin{cases} e \\ r_i \end{cases} \qquad (i = 1, \ldots s)$$

ist. In diesem Falle heisst der Ausdruck

$$k + r_1 + \cdots + r_s - e$$

die kritische Zahl der ω-Function; ihre Bedeutung werden wir bald kennen lernen.

2. Wir behandeln zunächst die ω-Function ohne Parameterpaare

$$\omega(x|k|e) = \sum_m (-1)^m x^{\frac{m(m-1)}{2} - km} \cdot g(x; e, m).$$

Es ist

$$\omega(x|k|0) = 1 \tag{2}$$

und für $e > 0$ folgt aus

$$g(x; e, m) = g(x; e-1, m-1) + x^m g(x; e-1, m)$$

$$\begin{aligned} \omega(x|k|e) = &\sum_m (-1)^m x^{\frac{m(m-1)}{2} - km} g(x; e-1, m-1) \\ &+ \sum_m (-1)^m x^{\frac{m(m-1)}{2} - (k-1)m} \cdot g(x; e-1, m). \end{aligned} \tag{3}$$

Da nun

$$\frac{m(m-1)}{2} - km = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - (k-1)(m-1) - k$$

also

$$\begin{aligned} &\sum_m (-1)^m x^{\frac{m(m-1)}{2} - km} \cdot g(x; e-1, m-1) \\ = &- x^{-k} \sum_m (-1)^{m-1} x^{\frac{(m-1)(m-2)}{2} - (k-1)(m-1)} \cdot g(x; e-1, m-1) \\ = &- x^{-k} \sum_m (-1)^m x^{\frac{m(m-1)}{2} - (k-1)m} \cdot g(x; e-1, m) \end{aligned}$$

ist, so erhält man aus (3)

$$\omega(x|k|e) = (1 - x^{-k})\, \omega(x|k-1|e-1) \tag{4}$$

und weiter, unter Berücksichtigung von (2),

$$(5) \qquad \omega(x|k|e) = (1-x^{-k})(1-x^{-k+1})\ldots(1-x^{-k+e-1}).$$

Die betrachtete ω-Function sei nun eine eigentliche, also

$$k \geqq 0, \quad e \geqq 0.$$

Dann ist $k-e$ die kritische Zahl und man sieht aus (5), dass die Function identisch verschwindet, wenn die kritische Zahl negativ ist, dass sie dagegen anderenfalls für jedes $x > 1$ einen positiven (von 0 verschiedenen) Werth hat.

3. Für die ω-Function mit s Parameterpaaren, von welcher wir zunächst nur voraussetzen wollen, dass ihr zweiter Parameter e nicht negativ ist, erhält man durch Anwendung der Relation

$$g(x; q_s - m, r_s) = g(x; q_s - 1 - m, r_s - 1) + x^{r_s} g(x; q_s - 1 - m, r_s)$$

die Formel

$$(6) \qquad \begin{aligned} &\omega(x|k|e|q_1, r_1; \ldots q_s, r_s) \\ &= x^{r_s} . \omega(x|k|e|q_1, r_1; \ldots q_{s-1}, r_{s-1}; q_s - 1, r_s) \\ &+ \omega(x|k|e|q_1, r_1; \ldots q_{s-1}, r_{s-1}; q_s - 1, r_s - 1) \end{aligned}$$

und hieraus allgemeiner

$$(7) \qquad \begin{aligned} &\omega(x|k|e|q_1, r_1; \ldots q_s, r_s) \\ &= \sum_{l=0}^{t} C_l' \, \omega(x|k|e|q_1, r_1; \ldots q_{s-1}, r_{s-1}; q_s - t, r_s - l), \end{aligned}$$

wo t irgend eine ganze nicht negative Zahl bezeichnet. Der Coefficient C_l' ist, wie man durch Induction leicht findet, gleich

$$x^{(r_s - l)(t-l)} \, . \, g(x; t, l),$$

das, worauf es uns ankommt, ist, dass er für jeden positiven Werth von x selbst positiv ist.

4. Wir betrachten den besonderen Fall, dass $q_s = e$ ist, und setzen $e \geqq 0$ voraus. Aus

$$g(x; e, m) . g(x; e-m, r_s) = g(x; e, r_s) . g(x; e-r_s, m)$$

ergiebt sich:

$$(8) \qquad \begin{aligned} &\omega(x|k|e|q_1, r_1; \ldots q_{s-1}, r_{s-1}; e, r_s) \\ &= g(x; e, r_s) \, \omega(x|k|e-r_s|q_1, r_1; \ldots q_{s-1}, r_{s-1}). \end{aligned}$$

Die ω-Function auf der rechten Seite enthält ein Parameterpaar weniger. Der Factor $g(x; e, r_s)$ verschwindet, wenn $r_s < 0$ oder $> e$ ist; sonst hat er für positives x einen positiven Werth.

5. Es sei jetzt

$$\omega(x|k|e|q_1, r_1; \ldots q_s, r_s)$$

eine eigentliche ω-Function. Dann ist $q_s - e \geqq 0$, und wenn wir

Formel (7) für $t = q_s - e$ und darauf Formel (8) zur Anwendung bringen, so erhalten wir

$$(9) \qquad \omega(x|k|e|q_1, r_1, \ldots q_s, r_s)$$
$$= \sum_{l=0}^{q_s - e} C_l' g(x; e, r_s - l) \cdot \omega(x|k|e - r_s + l|q_1, r_1; \ldots q_{s-1}, r_{s-1}).$$

Setzt man $r_s - l = h$, so wird demnach

$$(10) \qquad \omega(x|k|e|q_1, r_1, \ldots q_s, r_s)$$
$$= \sum_{\left.\begin{matrix}0\\ r_s + e - q_s\end{matrix}\right\} \leqq h \leqq \left\{\begin{matrix}e\\ r_s\end{matrix}\right.} C'_{r_s - h} \cdot g(x; e, h) \cdot \omega(x|k|e - h|g_1, r_1; \ldots q_{s-1}, r_{s-1})$$
$$= \sum_{\left.\begin{matrix}0\\ r_s + e - q_s\end{matrix}\right\} \leqq h \leqq \left\{\begin{matrix}e\\ r_s\end{matrix}\right.} C_h \cdot \omega(x|k|e - h|q_1, r_1; \ldots q_{s-1}, r_{s-1}).$$

Die Summe erstreckt sich über alle h, welche den Bedingungen

$$\left.\begin{matrix}0\\ r_s + e - q_s\end{matrix}\right\} \leqq h \leqq \left\{\begin{matrix}e\\ r_s\end{matrix}\right.$$

genügen, und die Coefficienten C haben für jedes positive x einen positiven Werth. Die ω-Functionen auf der rechten Seite von (10) sind eigentliche und enthalten nur $k - 1$ Parameterpaare. Es ist daraus zu ersehen, dass man jede eigentliche ω-Function linear und homogen durch eigentliche ω-Functionen ohne Parameterpaare so ausdrücken kann, dass alle Coefficienten für positives x positiv werden.

Die kritische Zahl der betrachteten ω-Function ist

$$k + r_1 + \cdots + r_s - e,$$

die Function

$$\omega(x|k|e - h|g_1, r_1; \ldots q_{s-1}, r_{s-1})$$

hat die kritische Zahl

$$k + r_1 + \cdots + r_{s-1} + h - e,$$

welche für alle in Betracht kommenden Werthe von h

$$\leqq k + r_1 + \cdots + r_s - e$$

ist. Daraus folgt, dass eine eigentliche ω-Function mit negativer kritischer Zahl sich linear und homogen durch ebensolche ω-Functionen ohne Parameterpaare ausdrücken lässt und mithin verschwindet.

Wir wollen nun annehmen, dass die kritische Zahl

$$k + r_1 + \cdots + r_s - e \geqq 0$$

sei. Auf der rechten Seite von (10) verschwinden die ω-Functionen mit negativer kritischer Zahl, es bleibt aber wenigstens noch eine ω-Function zurück, deren kritische Zahl nicht negativ ist, diejenige

nämlich, welche man erhält, wenn man h gleich der kleineren der beiden Zahlen e und r_s setzt. Man erkennt hieraus, dass man in diesem Falle die ω-Function durch eigentliche ω-Functionen ohne Parameterpaare mit nicht negativer kritischer Zahl linear und homogen ausdrücken kann, und dass in diesem Ausdruck wenigstens eine derartige Function wirklich vorkommt. Da ferner die auftretenden Coefficienten für positives x selbst positiv sind, die ω-Functionen aber, sobald $x > 1$ ist, so hat auch $\omega(x|k|e|q_1, r_1; \ldots q_s, r_s)$ für $x > 1$ einen positiven Werth.

Damit sind wir zu dem wichtigen Resultat gelangt:

I. Eine eigentliche ω-Function, deren kritische Zahl < 0 ist, verschwindet identisch.

II. Eine eigentliche ω-Function, deren kritische Zahl $\geqq 0$ ist, hat für $x > 1$ einen positiven Werth.

§ 14.

Die Functionen $\bar{t}$ und $\bar{v}$.

Für $e > 0$ ist

$$(1) \qquad 0 = \omega(x|0|e) = \sum_m (-1)^m x^{\frac{m(m-1)}{2}} \cdot g(x;\, e, m).$$

Sind daher a, b, c ganze Zahlen, welche den Bedingungen

$$(2) \qquad 0 \leqq c \leqq a < b$$

genügen, so geht, wenn man e durch $b - a$ und m durch $b - m$ ersetzt, Gleichung (1) über in

$$\sum_m (-1)^{b-m} x^{\frac{(b-m)(b-m-1)}{2}} \cdot g(x;\, b-a, b-m) = 0,$$

und man erhält durch Multiplication mit

$$x^{c(b-a)} \cdot g(x;\, b-c, a-c)$$

und unter Berücksichtigung der Identitäten

$$g(x;\, b-a, b-m)\, g(x;\, b-c, a-c) = g(x;\, m-c, a-c)\, g(x;\, b-c, b-m)$$
$$= g(x;\, m-c, m-a)\, g(x;\, b-c, b-m)$$

die Relation

$$(3) \qquad \sum_m (-1)^{b-m} x^{\frac{(b-m)(b-m-1)}{2} + c(b-a)}$$
$$\cdot\, g(x;\, m-c, m-a)\, g(x;\, b-c, b-m) = 0.$$

Es seien nun α und β zwei Classen, deren Indices mit a_h, b_h bezeichnet werden mögen. Die Summe

$$(4)\quad F_h = \sum_{m_h} (-1)^{b_h - m_h} \cdot x^{\frac{(b_h-m_h)(b_h-m_h-1)}{2}+(m_h-a_h)a_{h-1}+(b_h-m_h)b_{h-1}}$$
$$\cdot g(x;\ m_h - a_{h-1},\ m_h - a_h) \cdot g(x;\ b_h - b_{h-1},\ b_h - m_h)$$

hat dann für jedes h, wenn m_h alle ganzen Zahlen durchläuft, nur eine endliche Anzahl nicht verschwindender Glieder. Man sieht ferner, dass $F_h = 1$ wird, wenn $h \leqq 0$ oder grösser ist als alle Exponenten von α und β.

Da man sich bei der Summation auf diejenigen Werthe von m_h beschränken kann, welche den Bedingungen

$$(5)\quad b_h \geqq m_h \geqq \begin{cases} b_{h-1} \\ a_h \end{cases}$$

genügen, so verschwindet F_h für $a_h > b_h$. F_h verschwindet aber auch, wenn $a_{h-1} = b_{h-1}$ und zugleich $a_h < b_h$ ist. Denn alsdann geht, wenn man $a_{h-1} = b_{h-1} = c$, $a_h = a$, $b_h = b$ setzt, der Ausdruck (4) in (3) über und die Bedingung (2) ist erfüllt. Ist dagegen $a_{h-1} = b_{h-1}$, $a_h = b_h$, so ergiebt sich $F_h = 1$. Das Product

$$\prod_h F_h$$

hat daher den Werth 1 oder 0, je nachdem die Classen α und β gleich oder verschieden sind. Aus der in § 7 für die Functionen $\bar{\gamma}$ und $\bar{\delta}$ gegebenen Definition folgt für den Fall, dass die Anzahl s der in $\bar{\gamma}(\gamma;\ \alpha_1, \ldots \alpha_s)$, $\bar{\delta}(\delta;\ \alpha_1 \ldots \alpha_s)$ vorkommenden Classen α sich auf 1 reducirt, $\bar{\gamma}(\gamma;\ \alpha) = 1$ oder $= 0$, $\bar{\delta}(\delta;\ \alpha) = 1$ oder $= 0$, je nachdem γ und α, bez. δ und α gleich oder verschieden sind. Man kann daher das für $\prod_h F_h$ erhaltene Resultat ausdrücken durch die Gleichung

$$(6)\quad \prod_h F_h = \bar{\delta}(\alpha;\ \beta).$$

Aus (4) folgt

$$(7)\quad \prod_h F_h = \sum_{\ldots m_0, m_1, \ldots} \left\{ \left((-1)^{\sum_h (b_h - m_h)} \cdot x^{\sum_h \frac{(b_h-m_h)(b_h-m_h-1)}{2}+(b_h-m_h)b_{h-1}} \cdot \prod_h g(x;\ b_h - b_{h-1},\ b_h - m_h) \right) \cdot \left(x^{\sum_h (m_h-a_h)a_{h-1}} \cdot \prod_h g(x;\ m_h - a_{h-1},\ m_h - a_h) \right) \right\}.$$

Man erhält ein Glied dieser Summe, indem man dem m_h für jedes h einen bestimmten Werth nach Belieben beilegt. Man darf sich aber auf solche Werthenreihen für m_h beschränken, welche den Bedingungen (5) genügen, andere Werthenreihen liefern verschwindende Glieder und dürfen also nach Willkür hinzugenommen oder fortgelassen werden. Man erhält daher die Summe (7) vollständig, wenn man alle diejenigen Werthenreihen m_h berücksichtigt, welche den Bedingungen

$$(8) \qquad \begin{aligned} b_h &\geqq m_h \geqq a_h, \\ m_h &\geqq m_{h-1}, \end{aligned}$$

oder gar alle diejenigen, welche den Bedingungen

$$(9) \qquad m_h \geqq m_{h-1} \geqq 0, \quad \lim_{h=\infty} m_h = n$$

genügen. Die letzteren besagen genau, dass die m_h die Indices einer Classe μ vom Grade n bilden, während durch (8) noch ausgedrückt wird, dass diese Classe die Ungleichung

$$\alpha \geqq \mu \geqq \beta$$

erfüllt. Unter der Voraussetzung, dass die m_h die Indices einer Classe μ bilden, ist der zweite Factor unter dem Summenzeichen in (7) nichts anderes als unsere Function $v(\alpha \mid \mu)$, während der erste eine wohldefinirte Function von β und μ darstellt, die mit $\bar{v}(\mu \mid \beta)$ bezeichnet werden mag

$$(10) \quad \bar{v}(\mu \mid \beta) = (-1)^{\sum_h (b_h - m_h)} \cdot \prod_h \varkappa^{\frac{(b_h - m_h)(b_h - m_h - 1)}{2} + (b_h - m_h) b_{h-1}} \cdot g(\varkappa;\ b_h - b_{h-1},\ b_h - m_h).$$

Die Gleichung (6) geht hiernach über in

$$(11) \qquad \sum_\mu v(\alpha \mid \mu)\, \bar{v}(\mu \mid \beta) = \bar{\delta}\,(\alpha; \beta),$$

wo die Summe über alle Classen μ oder nur die zwischen α und β gelegenen zu erstrecken ist.

Aus (11) folgt

$$\sum_\nu \sum_\mu v(\alpha \mid \nu)\, \bar{v}(\nu \mid \mu)\, v(\mu \mid \beta) = \sum_\mu \bar{\delta}\,(\alpha; \mu)\, v(\mu \mid \beta),$$

$$(12) \qquad \sum_\nu \sum_\mu v(\alpha \mid \nu)\, \bar{v}(\nu \mid \mu)\, v(\mu \mid \beta) = v(\alpha \mid \beta),$$

ferner

$$(13) \qquad \bar{v}(\alpha \mid \beta) = \bar{\delta}\,(\alpha; \beta) - \sum_{\mu < \alpha} v(\alpha \mid \mu)\, \bar{v}(\mu \mid \beta).$$

Die Summe rechts erstreckt sich über die Classen μ, welche $< \alpha$ sind;

ist also für alle diese Classen $\bar{v}(\mu|\beta)$ bekannt, so lehrt (13), $\bar{v}(\alpha|\beta)$ zu berechnen. Demnach ist durch die Relation (11) die Function $\bar{v}(\alpha|\beta)$ vollkommen definirt.

Ist α kein Vielfaches von β, so ist $\bar{v}(\alpha|\beta) = 0$; man ersieht dies aus (13), wenn man für $\mu < \alpha$ die Gleichung $\bar{v}(\mu|\beta) = 0$ als bewiesen annimmt.

Sodann zeigt (13), dass für $\alpha = \beta$ $\bar{v}(\alpha|\beta) = 1$ wird. In beiden Fällen hat man:

$$\sum_{\mu} \bar{v}(\alpha|\mu)\, v(\mu|\beta) = \bar{\delta}(\alpha;\beta). \tag{14}$$

Indem wir nun für den noch nicht betrachteten Fall $\alpha > \beta$ die Richtigkeit von (14) beweisen wollen, können wir wieder für jede Classe $\nu < \alpha$ die Gleichung

$$\sum_{\mu} \bar{v}(\nu|\mu)\, v(\mu|\beta) = \bar{\delta}(\nu;\beta)$$

als bewiesen ansehen. Aus dieser folgt

$$\sum_{\nu<\alpha}\sum_{\mu} v(\alpha|\nu)\,\bar{v}(\nu|\mu)\,v(\mu|\beta) = \sum_{\nu<\alpha} v(\alpha|\nu)\,\delta(\nu;\beta),$$

$$\sum_{\nu<\alpha}\sum_{\mu} v(\alpha|\nu)\,\bar{v}(\nu|\mu)\,v(\mu|\beta) = v(\alpha|\beta). \tag{15}$$

Subtrahirt man (15) von (12), so erhält man rechts Null und links

$$\sum_{\mu} v(\alpha|\alpha)\,\bar{v}(\alpha|\mu)\,v(\mu|\beta) = \sum_{\mu} \bar{v}(\alpha|\mu)\,v(\mu|\beta).$$

Damit ist (14) allgemein bewiesen.

Für die Function

$$\bar{t}(\mu|\beta) = \frac{\psi(\beta)}{\psi(\mu)} \cdot \bar{v}(\mu|\beta) \tag{16}$$

folgen aus

$$t(\alpha|\mu)\,\bar{t}(\mu|\beta) = \frac{\psi(\beta)}{\psi(\alpha)}\, v(\alpha|\mu)\,\bar{v}(\mu|\beta),$$

$$\bar{t}(\alpha|\mu)\,t(\mu|\beta) = \frac{\psi(\beta)}{\psi(\alpha)}\,\bar{v}(\alpha|\mu)\,v(\mu|\beta),$$

$$\frac{\psi(\beta)}{\psi(\alpha)}\,\bar{\delta}(\alpha;\beta) = \bar{\delta}(\alpha;\beta) = \bar{\gamma}(\alpha;\beta)$$

und unter Berücksichtigung von (11), (14)

$$\sum_{\mu} t(\alpha|\mu)\,\bar{t}(\mu|\beta) = \bar{\gamma}(\alpha;\beta); \tag{17}$$

$$\sum_{\mu} \bar{t}(\alpha|\mu)\,t(\mu|\beta) = \bar{\gamma}(\alpha;\beta). \tag{18}$$

Die Ausrechnung von $\bar{t}$ mit Hülfe der für v und ψ geltenden Formeln ergiebt nach (16)*)

$$(19)\quad \bar{t}(\mu|\beta) = (-1)^{\sum_h (b_h - m_h)} \prod_h x^{\frac{(b_h-m_h)(b_h-m_h-1)}{2}+(s-m_h)(b_{h-1}-m_{h-1})} \cdot g(x; m_h - m_{h-1}, b_{h-1} - m_{h-1}).$$

Nach § 9, I, II ist

$$(20)\quad \sum_\mu t(\nu|\mu)\bar{\gamma}(\mu; \alpha_1, \ldots \alpha_s) = t(\nu|\alpha_1) \cdot t(\nu|\alpha_2) \ldots t(\nu|\alpha_s)$$

$$(21)\quad \sum_\mu v(\mu|\lambda)\bar{\delta}(\mu; \alpha_1, \ldots \alpha_s) = v(\alpha_1|\lambda) \cdot v(\alpha_2|\lambda) \ldots v(\alpha_s|\lambda).$$

Multiplicirt man (20), (21) bez. mit $\bar{t}(\gamma|\nu)$, $\bar{v}(\lambda|\delta)$ und summirt man dann über ν bez. λ, so erhält man unter Anwendung von (18), (11) links

$$\sum_{\nu,\mu} \bar{t}(\gamma|\nu)t(\nu|\mu)\bar{\gamma}(\mu; \alpha_1, \ldots \alpha_s) = \sum_\mu \bar{\gamma}(\gamma; \mu) \cdot \bar{\gamma}(\mu; \alpha_1, \ldots \alpha_s) = \bar{\gamma}(\gamma; \alpha_1, \ldots \alpha_s)$$

bez.

$$\sum_{\lambda,\mu} v(\mu|\lambda)\bar{v}(\lambda|\delta)\bar{\delta}(\mu; \alpha_1, \ldots \alpha_s) = \sum_\mu \delta(\mu|\delta) \cdot \bar{\delta}(\mu; \alpha_1, \ldots \alpha_s) = \bar{\delta}(\delta; \alpha_1, \ldots \alpha_s)$$

und somit die Gleichungen

$$(22)\quad \bar{\gamma}(\gamma; \alpha_1, \ldots \alpha_s) = \sum_\nu \bar{t}(\gamma|\nu) \cdot t(\nu|\alpha_1) \ldots t(\nu|\alpha)$$

$$(23)\quad \bar{\delta}(\delta; \alpha_1, \ldots \alpha_s) = \sum_\lambda \bar{v}(\lambda|\delta) \cdot v(\alpha_1|\lambda) \ldots v(\alpha_s|\lambda).$$

§ 15.

Darstellung von $\bar{\gamma}$ und $\bar{\delta}$ durch ω-Functionen.

Die beiden letzten Gleichungen führen unmittelbar zur Darstellung von $\bar{\gamma}(\gamma; \alpha_1, \ldots \alpha_s)$, $\bar{\delta}(\delta; \alpha_1, \ldots \alpha_s)$ durch ω-Functionen. Es seien mit $a_h^{(i)}$, c_h, d_h die Indices von $\alpha_i (i = 1, \ldots s)$, γ, δ bezeichnet.

Wir wollen nur die Function $\bar{\delta}$ etwas eingehender behandeln. Man erhält, indem man die für die Functionen v, $\bar{v}$ gefundenen Ausdrücke substituirt, die Gleichung

*) Vgl. die Berechnung von $v(\alpha|\beta)$, S. 41.

$$(1)\qquad \bar{v}(\mu\,|\,\delta)\,v(\alpha_1\,|\,\mu)\ldots v(\alpha_s\,|\,\mu)$$

$$=\prod_h\Big\{(-1)^{d_h-m_h}\cdot x^{\frac{(d_h-m_h)(d_h-m_h-1)}{2}+(d_h-m_h)d_{h-1}+(m_h-a_h^{(1)})a_{h-1}^{(1)}+\cdots+(m_h-a_h^{(s)})a_{h-1}^{(s)}}$$

$$\cdot\, g(x;\, d_h-d_{h-1},\, d_h-m_h)\,g(x;\, m_h-a_{h-1}^{(1)},\, a_h^{(1)}-a_{h-1}^{(1)})$$

$$\ldots g(x;\, m_h-a_{h-1}^{(s)},\, a_h^{(s)}-a_{h-1}^{(s)})\Big\},$$

wo die m_h die Indices von μ bedeuten. Um $\bar{\delta}(\delta;\,\alpha_1,\ldots\alpha_s)$ zu erhalten, hat man die Summe aller solcher Producte zu bilden, welche man für die verschiedenen Werthenreihen m_h erhält. Die m_h unterliegen dabei den für die Indices einer Classe n^{ten} Grades geltenden Beschränkungen. Da man aber sofort sieht, dass für jede Reihe von Zahlen m_h, welche nicht Indices einer Classe n^{ten} Grades sind, das Product auf der rechten Seite von (1) verschwindet, so kann man die angegebene Beschränkung aufheben. Alsdann erhält man:

$$(2)\qquad \bar{\delta}(\delta;\,\alpha_1,\ldots\alpha_s)=\sum_\mu \bar{v}(\mu\,|\,\delta)\,.\,v(\alpha_1\,|\,\mu)\ldots v(\alpha_s\,|\,\mu)$$

$$=\prod_h\Big\{\sum_{m_h}\Big[(-1)^{d_h-m_h}\cdot x^{\frac{(d_h-m_h)(d_h-m_h-1)}{2}+(d_h-m_h)d_{h-1}+(m_h-a_h^{(1)})a_{h-1}^{(1)}+\cdots+(m_h-a_h^{(s)})a_{h-1}^{(s)}}$$

$$\cdot\, g(x;\, d_h-d_{h-1},\, d_h-m_h)\,.\,g(x;\, m_h-a_{h-1}^{(1)},\, a_h^{(1)}-a_{h-1}^{(1)})$$

$$\ldots g(x;\, m_h-a_{h-1}^{(s)},\, a_h^{(s)}-a_{h-1}^{(s)})\Big]\Big\}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$(3)\qquad (d_h-a_h^{(1)})\,a_{h-1}^{(1)}+\cdots+(d_h-a_h^{(s)})\,a_{h-1}^{(s)}=f_h$$

$$(4)\qquad a_{h-1}^{(1)}+\cdots+a_{h-1}^{(s)}-d_{h-1}=k_{h-1}$$

$$(5)\qquad d_h-d_{h-1}=e_h$$

$$(6)\qquad d_h-a_{h-1}^{(i)}=q_h^{(i)},\quad a_h^{(i)}-a_{h-1}^{(i)}=r_h^{(i)}\quad (i=1,\ldots s),$$

so wird die in (2) vorkommende Summe gleich

$$x^{f_h}\,\omega(x\,|\,k_{h-1}\,|\,e_h\,|\,q_h^{(1)},\, r_h^{(1)};\ \ldots\ q_h^{(s)},\, r_h^{(s)}),$$

und man erhält

$$\text{I.}\qquad \bar{\delta}(\delta;\,\alpha_1,\ldots\alpha_s)=\prod_h x^{f_h}\,.\,\omega(x\,|\,k_{h-1}\,|\,e_h\,|\,q_h^{(1)},\, r_h^{(1)};\ldots q_h^{(s)},\, r_h^{(s)}).$$

Jede der hier auftretenden ω-Functionen

$$(7)\qquad \omega_h=\omega(x\,|\,k_{h-1}\,|\,e_h\,|\,q_h^{(1)},\, r_h^{(1)};\ldots q_h^{(s)},\, r_h^{(s)})$$

wird dargestellt durch eine Summe, welche nur eine endliche Anzahl nicht verschwindender Glieder enthält, weil nach (5) $e_h \geqq 0$ ist. Wenn

$h \leqq 0$ oder grösser ist als alle Exponenten der Classen $\delta, \alpha_1, \ldots \alpha_s$, so ist $f_h = 0$ und $\omega_h = 1$, weil alle Parameter von ω_h ausser dem ersten gleich 0 werden. In dem Product I sind daher nur eine endliche Anzahl von Factoren von 1 verschieden.

Nach (5) und (6) ist

$$e_h \geqq 0, \quad r_h \geqq 0. \tag{8}$$

Damit $\bar{\delta}(\delta; \alpha_1, \ldots \alpha_s)$ nicht identisch verschwinde, ist nothwendig und hinreichend, dass kein ω_h verschwindet. Wir wollen annehmen, es sei dies der Fall, und sehen, welche Schlüsse wir daraus ziehen können.

Für $h \leqq 0$ ist $q_h^{(i)} = 0 = r_h^{(i)}$. Ist jetzt h irgend eine ganze Zahl, für welche $q_{h-1}^{(i)} \geqq r_{h-1}^{(i)}$ ist, so hat man

$$0 \leqq q_{h-1}^{(i)} - r_{h-1}^{(i)} = d_{h-1} - a_{h-1}^{(i)} \leqq d_h - a_{h-1}^{(i)} = q_h^{(i)},$$

also

$$q_h^{(i)} = 0.$$

Wäre nun $q_h^{(i)} < r_h^{(i)}$, so würde aus $r_h^{(i)} > q_h^{(i)} \geqq 0$ sich $\omega_h = 0$ ergeben, Dies widerspricht der Voraussetzung, und daher ist für jedes h

$$q_h^{(i)} \geqq r_h^{(i)} \quad (i = 1, \ldots s). \tag{9}$$

Aus $q_h^{(i)} - r_h^{(i)} = d_h - a_h^{(i)} = q_{h+1}^{(i)} - e_{h+1}$ folgt, dass die Bedingung (9) mit jeder der beiden folgenden äquivalent ist:

$$d_h \geqq a_h^{(i)} \quad (i = 1, \ldots s) \tag{10}$$

$$q_h^{(i)} \geqq e_h \quad (i = 1, \ldots s). \tag{11}$$

Für $h \leqq 0$ ist $k_h = 0$. Ist h irgend eine ganze Zahl, für welche $k_{h-1} \geqq 0$ ist, so ist zufolge (8), (9), (10), (11) ω_h eine eingentliche ω-Function. Ihre kritische Zahl ist

$$k_{h-1} + r_h^{(1)} + \cdots + r_h^{(s)} - e_h = k_h$$

und muss, damit ω_h nicht verschwindet, $\geqq 0$ sein. Man hat also für jedes h

$$k_h \geqq 0. \tag{12}$$

Umgekehrt ergiebt sich aus (8) bis (12), dass jedes ω_h eine eigentliche ω-Function mit nicht negativer kritischer Zahl ist, und hieraus folgt (§ 13, II) nicht nur, dass $\bar{\delta}$ nicht identisch verschwindet, sondern auch, dass $\bar{\delta}$ für jedes $x > 1$ einen positiven Werth hat. Die Relation (12) ist mit

$$d_h \leqq \sum_{i=1}^{s} a_h^{(i)}, \tag{13}$$

die Relation (10) mit (9) und (11) äquivalent, während (8) von selbst erfüllt ist. Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Nichtverschwinden der Function

$$\bar{\delta}(\delta;\ \alpha_1, \dots \alpha_s)$$

werden also durch die Relationen (10) und (13) dargestellt; und von diesen besagt die erste, dass δ ein Divisor von $\delta' = (\alpha_1, \dots \alpha_s)$, die zweite, dass δ ein Vielfaches von $\delta'' = (|\alpha_1, \dots \alpha_s|)$ sein muss.

Für die Function $\bar{\gamma}(\gamma; \alpha_1, \dots \alpha_s)$ erhält man in derselben Weise, wenn man hier

$$(n - a_{k+1}^{(1)})(a_k^{(1)} - c_k) + \cdots + (n - a_{k+1}^{(s)})(a_k^{(s)} - c_k) = f_k$$

$$(n - a_{k+1}^{(1)}) + \cdots + (n - a_{k+1}^{(s)}) - (n - c_{k+1}) = k_{k+1}$$

$$c_{k+1} - c_k = e_k$$

$$a_{k+1}^{(i)} - c_k = q_k^{(i)}, \quad a_{k+1}^{(i)} - a_k^{(i)} = r_k^{(i)}$$

$$(i = 1, \dots s)$$

setzt,

II. $$\bar{\gamma}(\gamma; \alpha_1, \dots \alpha_s) = \prod_k x^{f_k} \cdot \omega(x | k_{k+1} | e_k | q_k^{(1)}, r_k^{(1)}; \dots q_k^{(s)}, r_k^{(s)}).$$

Damit $\bar{\gamma}$ nicht verschwinde, müssen alle

$$\omega_k = \omega(x | k_{k+1} | e_k | q_k^{(1)}, r_k^{(1)}; \dots q_k^{(s)}, r_k^{(s)})$$

eigentliche ω-Functionen mit nicht negativer kritischer Zahl werden, und es hat alsdann $\bar{\gamma}$ für jedes $x > 1$ einen positiven Werth. Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen hierfür werden dargestellt durch die Relationen

$$c_k \leqq a_k^{(i)}$$

$$c_k \geqq n - \sum_{i=1}^{s} (n - a_k^{(i)}),$$

von denen die erste besagt, dass γ ein Vielfaches von $\gamma' = [\alpha_1, \dots \alpha_s]$, die zweite, dass γ ein Divisor von $\gamma'' = [|\alpha_1, \dots \alpha_s|]$ sein muss.

Hiermit ist Satz V, § 7 vollständig bewiesen.

Charlottenburg, den 9. April 1898.

Stetigkeit und Differentialquotient.

Von

Ernst Steinitz in Charlottenburg.

Dass es stetige Functionen giebt, welche an keiner Stelle einen Differentialquotienten besitzen, wurde von Weierstrass zuerst nachgewiesen. Den von ihm angegebenen Beispielen haben andere Autoren eine Reihe weiterer hinzugefügt. Im Folgenden sollen einige allgemeine Betrachtungen über Stetigkeit und Differentiirbarkeit von Functionen angestellt werden, aus denen sich die Existenz stetiger nichtdifferentiirbarer Functionen naturgemäss ergiebt, sodass das Gewöhnliche des Falles in einer deutlichen und, wie ich hoffe, für Unterrichtszwecke geeigneten Weise hervorgehoben wird. Es wird sich dabei stets nur um (endliche) reelle, eindeutige Functionen einer reellen Veränderlichen handeln.

§ 1.

Es seien p und q zwei reelle Zahlen, $q > p$, es sei A der Bereich aller Zahlen zwischen p und q (mit Einschluss der Grenzen) und $f(x)$ eine in diesem Bereiche definirte stetige (reelle, eindeutige) Function. $f(x)$ ist alsdann auch gleichmässig stetig. Ist

$$a_0, a_1, a_2, \ldots$$

eine Fundamentalreihe von Zahlen in A, so gehört ihr Grenzwerth a ebenfalls dem Bereiche A an, und aus der Stetigkeit von $f(x)$ folgt, dass die zugehörigen Functionswerthe

$$f(a_0), f(a_1), f(a_2), \ldots$$

eine Fundamentalreihe mit dem Grenzwerth $f(a)$ bilden.

Hieraus können wir einen wichtigen Schluss ziehen. Ist B ein in A enthaltener Zahlbereich, (sodass also jede Zahl von B auch in A enthalten ist) und so beschaffen, dass jede Zahl von A als Grenzwerth einer Fundamentalreihe aus Zahlen von B darstellbar ist, so folgt, dass die stetige Function $f(x)$ durch die Werthe, welche sie an den Stellen des Bereiches B annimmt, für den ganzen Bereich A mitbestimmt ist. Ist also $\varphi(x)$ eine für den Bereich B definirte Function,

so kann es sicherlich nicht mehr als eine Function $f(x)$ geben, deren Gültigkeitsbereich A ist, welche daselbst überall der Stetigkeitsbedingung genügt und an den Stellen von B mit der Function $\varphi(x)$ übereinstimmt.

Natürlich wird aber nicht zu jeder für den Bereich B definirten Function $\varphi(x)$ eine Function $f(x)$ von der angegebenen Beschaffenheit existiren. Denn wenn eine solche vorhanden ist, so ergiebt sich, dass $\varphi(x)$ folgende Eigenschaft besitzt: Ist $\delta > 0$ eine beliebig kleine Grösse, so kann man $\varepsilon > 0$ so bestimmen, dass für irgend zwei Stellen x_1 und x_2 des Bereiches B, deren Differenz $< \varepsilon$ ist, die Differenz der zugehörigen Functionswerthe $\varphi(x_1)$ und $\varphi(x_2)$ $< \delta$ ausfällt. Dass andererseits, wenn $\varphi(x)$ dieser Bedingung genügt, auch eine Function $f(x)$ von der angegebenen Beschaffenheit existirt, ist leicht nachzuweisen. Ist nämlich a irgend eine Stelle von A, so ergiebt sich aus der über $\varphi(x)$ gemachten Voraussetzung, dass jeder Fundamentalreihe aus Stellen von B

$$b_0, b_1, b_2, \ldots$$

deren Grenzwerth a ist, eine Fundamentalreihe

$$\varphi(b_0), \varphi(b_1), \varphi(b_2), \ldots$$

entspricht und dass alle diese Fundamentalreihen denselben Grenzwerth haben. Indem man diesen Grenzwerth mit $f(a)$ bezeichnet, gelangt man zu einer im ganzen Gebiete A eindeutig definirten Function $f(x)$, von der man leicht erkennt, dass sie stetig ist und an den Stellen von B mit der Function $\varphi(x)$ übereinstimmt.

Ich will von einer für irgend einen Bereich definirten Function $\varphi(x)$ sagen, sie sei innerhalb dieses Bereiches stetig, wenn für irgend zwei Stellen x_1, x_2 des Bereiches, sobald ihre Differenz nur hinlänglich klein ist, die Differenz $\varphi(x_2) - \varphi(x_1)$ unter einer vorgegebenen Grösse bleibt. Dabei kommt nicht in Betracht, ob der Gültigkeitsbereich von $\varphi(x)$ selbst stetig ist oder nicht. Dann kann das soeben erhaltene Resultat so ausgesprochen werden:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer im Bereiche A stetigen Function $f(x)$, welche an allen Stellen des Bereiches B mit einer für denselben definirten Function $\varphi(x)$ übereinstimmt, ist die Stetigkeit der Function $\varphi(x)$ innerhalb B.

§ 2.

Um eine bestimmtere Vorstellung vor Augen zu haben, wählen wir als Bereich A die Zahlen zwischen 0 und 1 mit Einschluss der Grenzen. Es sei ferner m eine ganze positive Zahl > 1 und B der Inbegriff der rationalen Brüche von A, deren Nenner eine Potenz

von m ist. Da jede Zahl zwischen 0 und 1 als Grenzwerth einer von solchen Brüchen gebildeten Fundamentalreihe darstellbar ist, so finden die in § 1 angestellten Ueberlegungen Anwendung, und wir haben, um die sämmtlichen im Bereiche A stetigen Functionen $f(x)$ zu erhalten, nur die im Bereiche B stetigen Functionen $\varphi(x)$ zu bilden, deren jeder eine bestimmte Function $f(x)$ entspricht. Die Zahlen von B constituiren im Gegensatz zu denen von A eine abzählbare Menge, und hierauf beruht es, dass die Einführung des Bereiches B an Stelle von A thatsächlich den Ueberblick über die Gesammtheit der stetigen Functionen erleichtert.

Wir wollen uns auf solche Functionen beschränken, welche an der Stelle $x = 0$ verschwinden, aus welchen alle andern durch Addition einer Constanten abgeleitet werden können. $\varphi(x)$ sei eine derartige im Bereiche B definirte Function, welche zunächst nicht stetig zu sein braucht. Die Zahlen von B können wir in der Weise anordnen, dass wir das Intervall $0 \ldots 1$ zuerst in m, dann in m^2, m^3 gleiche Theile theilen u. s. w., und die erhaltenen Theilpunkte in ihrer natürlichen Aufeinanderfolge notiren, wie es das folgende Schema zeigt

$$\begin{array}{l} 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 1 \\ 0 \qquad\quad \frac{1}{m} \qquad\quad \frac{2}{m} \cdots 1 \\ 0 \; \frac{1}{m^2} \; \frac{2}{m^2} \cdots \frac{1}{m} \; \frac{m+1}{m^2} \cdots \frac{2}{m} \cdots 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} .$$

Setzen wir

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \Delta_{0,0},$$

$$\varphi\left(\tfrac{1}{m}\right) - \varphi(0) = \Delta_{1,0}, \; \varphi\left(\tfrac{2}{m}\right) - \varphi\left(\tfrac{1}{m}\right) = \Delta_{1,1}, \cdots \varphi(1) - \varphi\left(\tfrac{m-1}{m}\right) = \Delta_{1,m-1}$$

allgemein

$$(1) \qquad \varphi\left(\frac{l+1}{m^k}\right) - \varphi\left(\frac{l}{m^k}\right) = \Delta_{k,l} \quad \begin{pmatrix} k = 0, 1, \ldots \infty \\ l = 0, 1, \ldots m^k - 1 \end{pmatrix},$$

so sind nicht nur alle Differenzen $\Delta_{k,l}$ durch die Function $\varphi(x)$, sondern es ist auch umgekehrt, da $\varphi(0) = 0$ vorausgesetzt wurde, die Function $\varphi(x)$ durch die Differenzen $\Delta_{k,l}$ vollkommen bestimmt. Aus (1) folgt

$$(2) \qquad \Delta_{k,l} = \Delta_{k+1,lm} + \Delta_{k+1,lm+1} + \cdots + \Delta_{k+1,lm+m-1}.$$

Will man daher eine für den Bereich B gültige Function $\varphi(x)$ in der Weise construiren, dass man ihre Werthdifferenzen $\Delta_{k,l}$ vorschreibt, so hat man folgendermassen zu verfahren: Man wählt $\Delta_{0,0}$ beliebig, theilt $\Delta_{0,0}$ auf irgend eine Weise in m Theile $\Delta_{1,0}\, \Delta_{1,1}, \ldots \Delta_{1,m-1}$, sodass $\Delta_{1,0} + \cdots + \Delta_{1,m-1} = \Delta_{0,0}$ ist, theilt jede nun erhaltene Differenz Δ wieder in m Theile und fährt damit in infinitum fort, wie es durch (2) vorgeschrieben ist. Alsdann ist durch die Bedingung

$\varphi(0) = 0$ und die vermöge (2) mit einander vereinbaren Gleichungen (1) die Function $\varphi(x)$ im Bereiche B definirt. Natürlich muss, wenn nach der angegebenen Methode die Construction einer Function $\varphi(x)$ durchgeführt werden soll, irgend eine Vorschrift angegeben werden, nach welcher die Theilung der Grössen Δ zu vollziehen ist.

Die so erhaltene Function $\varphi(x)$ wird im Allgemeinen nicht stetig sein; ist sie aber stetig, so gelangen wir durch sie weiter zu einer für den ganzen Bereich A gültigen und daselbst stetigen Function $f(x)$, wie in § 1 gezeigt wurde.

§ 3.

Die Differenzen Δ müssen, um zu einer im Bereiche B gültigen Function $\varphi(x)$ zu führen, den Bedingungen § 2, (2) gemäss gewählt sein. Es entsteht nun die Frage: Welche weiteren Bedingungen kommen hinzu, wenn die Function $\varphi(x)$ stetig ausfallen soll?

Wird mit α_k $(0 = 0, 1, \cdots \infty)$ der grösste der absoluten Beträge von

$$\Delta_{k,0}, \Delta_{k,1}, \cdots, \Delta_{k,m^k-1}$$

bezeichnet, so stellt α_k einen Zuwachs der Function $\varphi(x)$ dar, welcher einem Zuwachs der Variabelen um $\frac{1}{m^k}$ entspricht, und da $\lim_{k=\infty} \frac{1}{m^k} = 0$ ist, so ergiebt sich als eine nothwendige Bedingung für die Stetigkeit von $\varphi(x)$, dass auch

$$\lim_{k=\infty} \alpha_k = 0 \tag{1}$$

sein muss. Dass dieselbe aber nicht hinreichend ist, lässt sich leicht an Beispielen nachweisen. Es hat nun zwar keinerlei Schwierigkeiten, die Bedingung der Stetigkeit von $\varphi(x)$ in Bedingungen für die Differenzen Δ umzusetzen, aber diese gestalten sich nicht übersichtlich. Ich will mich deshalb darauf beschränken, eine sehr allgemeine Bedingung anzugeben, unter welcher man sicher zu einer stetigen Function geführt wird. Ich behaupte:

Wenn die Reihe der im Vorhergehenden definirten Grössen

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots$$

welche wir als die „Maximaldifferenzen" bezeichnen können, nicht nur der Bedingung (1) sondern der weitergehenden Bedingung genügt, dass ihre Summe

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \tag{2}$$

convergirt, so ist die durch die Gleichungen § 2, (1) definirte Function $\varphi(x)$ stetig.

Um diese Behauptung zu beweisen, setzen wir unter Annahme der Convergenz der Summe (2)

(3) $$\sum_{k=i}^{\infty} \alpha_k = \mu_i \qquad (i = 0, 1, \ldots),$$

dann ist

(4) $$\lim_{i=\infty} \mu_i = 0.$$

Sind $\frac{p}{m^k}$, $\frac{q}{m^k}$ irgend zwei Zahlen in B, so ergiebt sich aus der Definition der Grössen α

(5) $$\left| \varphi\left(\frac{q}{m^k}\right) - \varphi\left(\frac{p}{m^k}\right) \right| \leqq |q-p| \cdot \alpha_k,$$

wo die Striche andeuten, dass der absolute Betrag der eingeschlossenen Grösse zu nehmen ist. Ist x eine zwischen $\frac{l}{m^k}$ und $\frac{l+1}{m^k}$ gelegene Zahl von B,

(6) $$\frac{l}{m^k} \leqq x \leqq \frac{l+1}{m^k},$$

so hat x die Form

(7) $$x = \frac{s}{m^{k+r}} \qquad (r \geqq 0),$$

und man kann, wenn $x < \frac{l+1}{m^k}$ ist,

(8) $$x = \frac{l}{m^k} + \frac{c_1}{m^{k+1}} + \frac{c_2}{m^{k+2}} + \cdots + \frac{c_r}{m^{k+r}}$$

und wenn $\frac{l}{m^k} < x$ ist

(9) $$\frac{l+1}{m^k} - \left(\frac{c_1'}{m^{k+1}} + \frac{c_2'}{m^{k+2}} + \cdots + \frac{c_r'}{m^{k+r}}\right)$$

setzen, so dass die Coefficienten c, c' ganze, den Bedingungen

(10) $$0 \leqq c \leqq m-1, \qquad 0 \leqq c' \leqq m-1$$

genügende Zahlen sind. Setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{l}{m^k} = x_0, \quad \frac{l+1}{m^k} = x_0'$$

$$\frac{l}{m^k} + \frac{c_1}{m^{k+1}} + \cdots + \frac{c_h}{m^{k+h}} = x_h, \quad \frac{l+1}{m^k} - \left(\frac{c_1'}{m^{k+1}} + \cdots + \frac{c_h'}{m^{k+h}}\right) = x_h'$$

$$(h = 1, \ldots r),$$

sodass $x_r = x = x_r'$ wird, so folgt aus

$$x_{h-1} = \frac{l m^h + c_1 m^{h-1} + \cdots + c_{h-1} m}{m^{k+h}}, \qquad x_h = \frac{l m^h + c_1 m^{h-1} + \cdots + c_{h-1} m + c_h}{m^{k+h}},$$

$$x_{h-1}' = \frac{(l+1) m^h - (c_1' m^{h-1} + \cdots + c_{h-1}' m)}{m^{k+h}}, \qquad x_h' = \frac{(l+1) m^h - (c_1' m^{h-1} + \cdots + c_{h-1}' m) - c_h'}{m^{k+h}}$$

unter Berücksichtigung von (5) und (10)

$$|\varphi(x_h) - \varphi(x_{h-1})| \leqq c_h \alpha_{k+h} \leqq (m-1)\alpha_{k+h},$$
$$|\varphi(x'_h) - \varphi(x'_{h-1})| \leqq c'_h \alpha_{k+h} \leqq (m-1)\alpha_{k+h}$$

mithin nach (3)

$$\left|\varphi(x) - \varphi\left(\frac{l}{m^k}\right)\right| = |\varphi(x_r) - \varphi(x_0)| \leqq (m-1)\mu_{k+1} \leqq (m-1)\mu_k,$$

$$\left|\varphi(x) - \varphi\left(\frac{l+1}{m^k}\right)\right| = |\varphi(x'_r) - \varphi(x'_0)| \leqq (m-1)\mu_{k+1} \leqq (m-1)\mu_k.$$

Die Ungleichungen

$$(11)\quad \left|\varphi(x) - \varphi\left(\frac{l}{m^k}\right)\right| \leqq (m-1)\mu_k, \quad \left|\varphi(x) - \varphi\left(\frac{l+1}{m^k}\right)\right| \leqq (m-1)\mu_k$$

gelten aber auch, wenn $x = \frac{l}{m^k}$ oder $= \frac{l+1}{m^k}$ ist.

Es seien nun x_1 und $x_2 \geqq x_1$ zwei Zahlen in B, deren Differenz $< \frac{1}{m^k}$ ist. Bestimmt man die ganze Zahl l so, dass

$$(12)\qquad \frac{l}{m^k} \leqq x_1 \leqq \frac{l+1}{m^k}$$

und somit nach (11)

$$(13)\qquad \left|\varphi(x_1) - \varphi\left(\frac{l+1}{m^k}\right)\right| \leqq (m-1)\mu_k$$

wird, so liegt x_2 entweder zwischen $\frac{l}{m^k}$ und $\frac{l+1}{m^k}$ oder zwischen $\frac{l+1}{m^k}$ und $\frac{l+2}{m^k}$. In beiden Fällen ist

$$(14)\qquad \left|\varphi(x_2) - \varphi\left(\frac{l+1}{m^k}\right)\right| \leqq (m-1)\mu_k,$$

und folglich hat man

$$(14)\qquad |\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| \leqq 2(m-1)\mu_k.$$

Nach (4) ist aber $\lim\limits_{k=\infty} 2(m-1)\mu_k = 0$, und damit ist die Stetigkeit von $\varphi(x)$ erwiesen.

Die Convergenz der Summe (2) stellt eine hinreichende aber nicht nothwendige Bedingung für die Stetigkeit von $\varphi(x)$ dar. Wenn wir daher auf alle möglichen Arten Systeme von Grössen $\Delta_{k,l}$ herstellen, zwischen denen dle Relationen § 2, (2) bestehen und für welche die Summe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ convergirt, so liefert zwar jedes derartige System eine stetige Function, aber die Gesammtheit der so erhaltenen Functionen stellt nur einen Theil aller stetigen Functionen dar.

§ 4.

Die angegebene Methode zur Herstellung stetiger Functionen möge an einem einfachen Beispiel erläutert werden.

Wir wählen für $\Delta_{0,0}$ irgend eine von 0 verschiedene Zahl, theilen $\Delta_{0,0}$ auf irgend eine Weise in m Theile $\Delta_{1,0}, \ldots \Delta_{1,m-1}$, nur sei vorausgesetzt, dass auch diese sämmtlichen von 0 verschieden sind. Wir wollen nun für die weitere Theilung folgende Vorschrift geben: Die m Theile, in welche irgend ein Δ zerlegt wird, sollen in demselben Verhältniss zu einander stehen wie die m Theile $\Delta_{1,0}, \ldots \Delta_{1,m-1}$, in welche $\Delta_{0,0}$ zerfiel. Durch diese Vorschrift ist das ganze System der Differenzen Δ bestimmt. Hat man $\Delta_{k,l}$, so folgt aus

$$\Delta_{1,0} + \cdots + \Delta_{1,m-1} = \Delta_{00},$$

$$\Delta_{k+1,lm} + \cdots + \Delta_{k+1,lm+m-1} = \Delta_{k,l},$$

$$\Delta_{k+1,lm} : \Delta_{k+1,lm+1} : \cdots : \Delta_{k+1,lm+m-1} = \Delta_{1,0} : \Delta_{1,1} : \cdots : \Delta_{1,m-1},$$

dass

$$\Delta_{k+1,lm} = \frac{\Delta_{k,l}}{\Delta_{0,0}} \Delta_{1,0}, \quad \Delta_{k+1,lm+1} = \frac{\Delta_{k,l}}{\Delta_{0,0}} \Delta_{1,1} \cdots$$

wird. Die angegebene Methode der Theilung der Δ möge „periodisches Theilungsverfahren" heissen. Setzt man zur Abkürzung

$$\Delta_{1,0} = \delta_1, \ \Delta_{1,1} = \delta_2, \ \ldots \Delta_{1,m-1} = \delta_m,$$

so ist bei einem periodischen Theilungsverfahren durch $\delta_1, , \ldots, \delta_m$ eine im Bereiche B gültige Function $\varphi(x)$ bestimmt, welche der Bedingung $\varphi(0) = 0$ und den Gleichungen § 2, (1) genügt. Wir bezeichnen diese Function mit

$$\varphi(x;\ \delta_1, \delta_2, \ldots \delta_m).$$

Ist sie stetig, so entspricht ihr eine im ganzen Bereiche A gültige stetige Function, für die wir das Zeichen

$$f(x;\ \delta_1, \delta_2, \ldots \delta_m)$$

einführen. Um zu erkennen, wann die Function $\varphi(x; \delta_1, \ldots \delta_m)$ stetig wird, hat man die Maximaldifferenzen $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ in Betracht zu ziehen. Man sieht sofort, dass dieselben in unserem Falle eine geometrische Reihe bilden. Die Bedingung $\lim_{k=\infty} \alpha_k = 0$ und die Bedingung der Convergenz der Summe $\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots$ fallen also hier in eine zusammen; sie sind erfüllt, wenn $\alpha_1 < \alpha_0$ ist. Wir können das so gewonnene Resultat folgendermassen aussprechen:

Damit ein periodisches Theilungsverfahren zu einer stetigen Function führe, ist nothwendig und hinreichend, dass die m Theile, in welche $\Delta_{0,0}$ zerlegt wird, dem absoluten Betrage nach sämmtlich kleiner sind als $\Delta_{0,0}$ selbst.

Für $m = 2, 3, 4$ stellen

$$f(x;\ 1, 2),\quad f(x;\ 3, 3, -2),\quad f(x;\ 1, 1, 1, -1)$$

nach einem periodischen Theilungsverfahren gebildete stetige Functionen dar; denn in allen drei Fällen hat man

$$|\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_m| > \delta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots m).$$

Schreibt man $f_1(x)$, $\varphi_1(x)$ für $f(x;\ 1, 2)$, $\varphi(x;\ 1, 2)$, so ergiebt sich

$$f_1(0) = \varphi_1(0) = 0,\quad f_1\left(\tfrac{1}{2}\right) = \varphi_1\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1,\quad f_1(1) = \varphi_1(1) = 3,$$

$$f_1\left(\tfrac{1}{4}\right) = \varphi_1\left(\tfrac{1}{4}\right) = \tfrac{1}{3},\quad f_1\left(\tfrac{3}{4}\right) = \varphi_1\left(\tfrac{3}{4}\right) = \tfrac{5}{3},$$

Für $f_1\left(\frac{1}{8}\right)$ erhält man wegen

$$\tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{4} + \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{4}\right)^3 + \cdots$$

den Werth

$$\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{2}{9}\right) + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{2}{9}\right)^2 + \cdots$$

$$f_1\left(\tfrac{1}{3}\right) = \tfrac{3}{7}.$$

Die Berechnung der Function $f(x;\ \delta_1, \ldots \delta_m)$ für bestimmte Werthe von x gestaltet sich hiernach sehr einfach. Sind die Zahlen $\delta_1, , \ldots \delta_m$ rational, so erkennt man leicht, dass die Function für rationales x stets einen rationalen Werth annimmt.

§ 5.

Es sei $f(x)$ wie zu Anfang eine für den Bereich A definirte stetige Function. Jedem Intervalle $x_1 \ldots x_2$, welches einen Theil des Intervalles $0 \ldots 1$ darstellt, entspricht ein bestimmter Differenzenquotient

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Um zu erkennen, ob die Function $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ einen Differentialquotienten besitzt, hat man für ein die Stelle x_0 enthaltendes Intervall $x_1 \ldots x_2$ den Differenzenquotienten zu bilden und das Intervall $x_1 \ldots x_2$ auf die Stelle x_0 zusammenzuziehen. Wenn bei jeder Art, in welcher diese Zusammenziehung erfolgen kann, der Differenzenquotient sich einem und demselben endlichen Grenzwerth nähert, so ist dieser Grenzwerth der Differentialquotient von $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$. Andernfalls existirt an dieser Stelle kein endlicher Differentialquotient. Kann man z. B. das Intervall $x_1 \ldots x_2$ in der Weise zusammenziehen, dass der absolute Betrag von $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ über alle Grenzen wächst, so ist an der betrachteten Stelle kein endlicher Differentialquotient vorhanden. Der Differentialquotient kann nun noch einen

bestimmten unendlich grossen Werth $+\infty$ oder $-\infty$ haben, d. h. es kann der Differenzenquotient bei jeder Art der Zusammenziehung des Intervalles über alle positiven Zahlen hinaus wachsen oder unter alle negativen herabsinken, worauf jedoch zunächst nicht eingegangen werden soll. Wir wollen das die Stelle x_0 einschliessende Intervall in folgender Weise verkleinern. Zu der Veränderlichen k, welche bestimmt ist, die ganzen positiven Zahlen zu durchlaufen, ermitteln wir die ganze Zahl l_k so, dass x_0 zwischen $\frac{l_k}{m^k}$ und $\frac{l_k+1}{m^k}$ mit Einschluss der unteren und (wenn $x_0 \neq 1$ ist) Ausschluss der oben Grenze liegt. Wird wieder mit $\varphi(x)$ die im Bereiche B definirte, daselbst mit $f(x)$ übereinstimmende Function bezeichnet und haben die $\Delta_{k,l}$ ihre frühere Bedeutung, so wird für $x_1 = \frac{l_k}{m^k}$, $x_2 = \frac{l_k+1}{m^k}$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = m^k \Delta_{k,l_k}.$$

Ist $\lim_{k=\infty} m^k |\Delta_{k,l_k}| = \infty$, so ist an der Stelle x_0 kein endlicher Differentialquotient vorhanden. Bezeichnet β_k die kleinste der absolut genommenen Differenzen $|\Delta_{k,0}|, |\Delta_{k,1}| \ldots |\Delta_{k,m^k-1}|$, so stellt $m^k \beta_k$ den kleinsten der zugehörigen Differenzenquotienten dar. Ist daher

$$\lim_{k=\infty} m^k \beta_k = \infty,$$

so hat $f(x)$ an keiner Stelle einen endlichen Differentialquotienten.

§ 6.

Aus dem letzten Resultat ergiebt sich ein einfaches Verfahren um stetige Functionen ohne (endlichen) Differentialquotienten zu construiren. Wir stellen ein System von Differenzen $\Delta_{k,l}$ her, indem wir ein Verfahren angeben, nach welchem die Theilung der Δ auszuführen ist (§ 2). Um sicher zu einer stetigen Function zu gelangen, wählen wir ein solches Verfahren, dass die sich ergebenden (absoluten) Maximaldifferenzen

(1) $$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$$

eine convergente Summe liefern (§ 3). Dann wird auch die in § 5 betrachtete Reihe der Minimaldifferenzen

(2) $$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots$$

eine convergente Summe haben. Dasselbe gilt in jedem Falle von der Reihe

(3) $$1, \frac{1}{m}, \frac{1}{m^2}, \ldots.$$

Wenn es nun gelingt die Convergenz der zweiten Summe so langsam

zu gestalten im Vergleich zur Convergenz der dritten, dass die aus entsprechenden Gliedern von (2) und (3) gebildeten Quotienten

$$\beta_1,\ m\beta_1,\ m^2\beta_2,\ \ldots, \tag{4}$$

welche die Reihe der minimalen Differenzenquotienten bilden, über alle Grenzen wachsen, so wird die so gewonnene stetige Function an keiner Stelle differentiirbar sein (§ 5).

Dass man dies auf mannigfache Weise erreichen kann, ist sehr leicht zu sehen. Die einfachsten Beispiele hierfür erhalten wir unter Anwendung eines periodischen Theilungsverfahrens (§ 4). Alsdann nämlich wird die Reihe (4), ebenso wie die andern, eine geometrische. Die Bedingung $\lim_{k=\infty} m^k\beta_k = \infty$ ist erfüllt, wenn $m\beta_1 > \beta_0$, wenn also β_1, die kleinste der Differenzen $|\Delta_{1,0}| \ldots |\Delta_{1,m-1}|$, grösser als $\frac{1}{m}\beta_0 = \frac{1}{m}|\Delta_{0,0}|$ ist. Man erhält somit, indem man dieses Ergebniss mit dem in § 4 gewonnenen zusammenfasst, folgende Vorschrift: Man stelle nach einem periodischen Theilungsverfahren ein System von Differenzen Δ so her, dass die m Theile, in welche $\Delta_{0,0}$ zerfällt, dem absoluten Betrage nach kleiner als $\Delta_{0,0}$ aber grösser als $\frac{1}{m}\Delta_{0,0}$ sind. Dann führt dieses System zu einer stetigen durchweg nicht differentiirbaren Function.

Eine solche Theilung ist stets möglich, wenn $m > 2$ ist. Die Functionen

$$f(x;\ 3, -2, 3),\quad f(x;\ 1, 1, 1, -1),\quad f(x;\ 4, 4, -5, -5, 4, 4)$$

sind Beispiele hierfür.

§ 7.

Bisher ist die Frage nach dem etwaigen Vorhandensein eines bestimmten unendlichgrossen Differentialquotienten unerörtert geblieben. Durch die in § 6 angegebene Methode ist es nicht ausgeschlossen, dass an gewissen Stellen ein unendlich grosser Differentialquotient auftritt. Es wird sich jetzt darum handeln, dies zu vermeiden. Beschränkt man sich, wie es hier geschehen soll, darauf, Functionen nach einem periodischen Theilungsverfahren herzustellen, so braucht man den am Schlusse von § 6 angegebenen Vorschriften nur noch eine weitere (für $m > 5$ ausführbare) hinzuzufügen, um auch das Zustandekommen unendlich grosser Differentialquotienten unmöglich zu machen. Realisirt findet sich diese Vorschrift bei der zuletzt angegebenen Function $f(x;\ 4, 4, -5, -5, 4, 4)$ und möge an der Hand dieses Beispiels erläutert werden. — Hier haben wir

$$m = 6, \qquad \Delta_{0,0} = 6,$$

$$\Delta_{1,0} = 4,\ \Delta_{1,1} = 4,\ \Delta_{1,2} = -5,\ \Delta_{1,3} = -5,\ \Delta_{1,4} = 4,\ \Delta_{1,5} = 4.$$

Wir betrachten neben den Differenzen $\Delta_{1,l}$ die Summen, welche von benachbarten dieser Differenzen gebildet werden, also die Summen

$$\Delta_{1,0}+\Delta_{1,1},\ \Delta_{1,1}+\Delta_{1,2},\ldots\Delta_{1,m-2}+\Delta_{1,m-1},\ \Delta_{1,0}+\Delta_{1,1}+\Delta_{1,2},\ldots$$
$$\Delta_{1,m-3}+\Delta_{1,m-2}+\Delta_{1,m-1},\ldots\Delta_{1,0}+\Delta_{1,1}+\Delta_{1,2}+\cdots+\Delta_{1,m-1}.$$

Jeder Differenz $\Delta_{1,l}$ ordnen wir eine dieser Summen, die wir mit $\Delta'_{1,l}$ bezeichnen, zu, und zwar so, dass unter den Summanden von $\Delta'_{1,l}$ auch $\Delta_{1,l}$ vorkommt. Bei dem vorliegenden Beispiel kann man nun $\Delta'_{1,l}$ $(l=0,1,\ldots m-1)$ so bestimmen, dass $\Delta'_{1,l}$ und $\Delta_{1,l}$ entgegengesetztes Vorzeichen haben — indem man z. B.

$$\begin{aligned}
&\Delta'_{1,0}=\Delta_{1,0}+\Delta_{1,1}+\Delta_{1,2}+\Delta_{1,3}, && \Delta'_{1,1}=\Delta_{1,1}+\Delta_{1,2},\\
(1)\quad &\Delta'_{1,2}=\Delta_{1,0}+\Delta_{1,1}+\Delta_{1,2}, && \Delta'_{1,3}=\Delta_{1,3}+\Delta_{1,4}+\Delta_{1,5},\\
&\Delta'_{1,4}=\Delta_{1,3}+\Delta_{1,4}, && \Delta'_{1,5}=\Delta_{1,2}+\Delta_{1,3}+\Delta_{1,4}+\Delta_{1,5}
\end{aligned}$$

setzt, sodass

$$\Delta'_{1,0}=-2,\ \Delta'_{1,1}=-1,\ \Delta'_{1,2}=3,\ \Delta'_{1,3}=3,\ \Delta'_{1,4}=-1,\ \Delta'_{1,5}=-2$$

wird. Jedesmal, wenn ein solcher Fall vorliegt (und ausserdem die schon im vorigen Paragraphen angegebenen Bedingungen erfüllt sind), hat man es, wie nun gezeigt werden soll, mit einer Function zu thun, die an keiner Stelle einen endlichen oder auch unendlich grossen Differentialquotienten besitzt.

Es stellt $\Delta_{1,l}$ einen Functionszuwachs dar, welcher einen Zuwachs der Variabelen um $\frac{\varepsilon_l}{m}$ entspricht, wenn ε_l die Anzahl der Summanden bezeichnet, aus denen $\Delta'_{1,l}$ sich zusammensetzt. Der entsprechende Differenzenquotient ist

$$\frac{1}{\varepsilon_l}\,m.\,\Delta'_{1,l}=\mathfrak{D}_l.m\Delta_{1,l},$$

wo $\mathfrak{D}_l$ für $\frac{1}{\varepsilon_l}\cdot\frac{\Delta'_{1,l}}{\Delta_{1,l}}$ gesetzt ist. $\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_1, \ldots \mathfrak{D}_{m-1}$ sind nach den Vorangehenden negative Zahlen. Die Differenz $\Delta_{k,l}$ zerfällt in die Summe

$$\Delta_{k,l}=\Delta_{k+1,lm}+\cdots+\Delta_{k+1,lm+m-1}.$$

Wir verstehen unter

$$\Delta'_{k+1,lm},\ \Delta'_{k+1,lm+1},\ \ldots\ \Delta'_{k+1,lm+m-1}$$

diejenigen Grössen, welche man erhält, indem man in den Gleichungen (1) $\Delta_{1,s}$, $\Delta'_{1,s}$ $(s=0,\ldots m-1)$ durch $\Delta_{k+1,lm+s}$, $\Delta'_{k+1,lm+s}$ ersetzt. Dann ist

$$\frac{\Delta'_{k+1,lm+s}}{\Delta_{k+1,lm+s}}=\frac{\Delta'_{1,s}}{\Delta_{1,s}},$$

jedes $\Delta_{k,l}$, jedes $\Delta'_{k,l}$ stellt einen Functionszuwachs dar, und die entsprechenden Differenzenquotienten sind

$$m^k\Delta_{k,l},\quad \mathfrak{D}_l.m^k\Delta_{k,l}.$$

Dabei ist $\mathfrak{D}_l$ gleich derjenigen der Zahlen $\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_1, \ldots \mathfrak{D}_{m-1}$ deren Index $\equiv l \pmod{m}$ ist.

Bedeutet x_0 eine beliebige Stelle des Bereiches A und wird die ganze Zahl l_k so bestimmt, dass $\frac{l_k}{m^k} \leqq x_0 < \frac{l_{k+1}}{m^k}$ ist, so entspricht nicht nur Δ_{k,l_k} sondern auch Δ'_{k,l_k} einem Intervalle, welches die Stelle x_0 umschliesst. Die zugehörigen Differenzenquotienten sind

$$m^k \Delta_{k,l_k}, \quad \mathfrak{D}_{l_k} m^k \Delta_{k,l_k}.$$

Nach § 6 wächst der erste und daher auch der zweite mit k dem absoluten Werthe nach über alle Grenzen. Beide Quotienten haben ferner beständig entgegengesetztes Vorzeichen. Daher ist an der Stelle x_0 weder ein endlicher noch ein bestimmter unendlich grosser Differentialquotient vorhanden. Man kann vielmehr innerhalb jedes noch so kleinen die Stelle x_0 im Innern enthaltenden Intervalles $x_1' \ldots x_2'$ ein zweites ebensolches Intervall $x_1 \ldots x_2$ bestimmen, für welches der Differenzenquotient $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ einen beliebig gegebenen Werth annimmt. Das Letztere folgt aus dem Vorhergehenden, wenn man berücksichtigt, dass der Differenzenquotient $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, abgesehen von solchen Stellen, an denen $x_1 = x_2$ wird, eine stetige Function der Variabelen x_1, x_2 darstellt.

Zur Functionen- und Invariantentheorie der binomischen Gebilde.

Von

J. Wellstein in Strassburg i. E.

1. Wenn man die Galois'sche Theorie der algebraischen Grössen*) auf die algebraischen Functionen einer Veränderlichen überträgt, treten gerade diejenigen Functionenkörper in den Vordergrund des Interesses, welche von den bisher ausgebildeten functionentheoretischen Systemen ausgeschlossen worden sind. Hierher gehören insbesondere die Körper, deren Monodromiegruppe cyklisch ist, Functionen also, die verzweigt sind wie die n^{te} Wurzel aus einer rationalen Function einer Veränderlichen. Es macht zwar keine Schwierigkeit, für diese Functionen die grundlegenden Integrale 1., 2. und 3. Gattung aufzustellen, und das ist auch bereits geschehen, aber darüber hinaus ist man noch nicht gekommen.

In den folgenden Zeilen, die einen Auszug meiner demnächst in den Nova Acta der Leopoldinisch-Carolinischen Akademie erscheinenden Habilitationsschrift bilden**), möchte ich zeigen, dass die binomischen Functionen auch vom Standpunkt der Invariantentheorie aus Beachtung verdienen.

2. Wie ich a. a. O. § 1 nachweise, sind die binomischen Functionen, deren Verzweigungspunkte durch die Nullpunkte der Binärform n^{ter} Ordnung

$$f(x_1 \mid x_2) = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} a_\nu x_1^{n-\nu} x_2^\nu \tag{1}$$

geliefert werden, eindeutig auf dem algebraischen Gebilde

$$f(x_1 \mid x_2) = 1, \tag{2}$$

welches für

$$x_1 = \frac{x}{s}, \quad x_2 = \frac{1}{s}$$

in die übliche Form

$$s^n = f(x \mid 1)$$

*) Vergl. Weber, Algebra, I. Bd., 3. Buch.

**) Band 74, 2.

übergeht. Es ist nun bemerkenswerth, dass die fundamentalen Integrale 1., 2. und 3. Gattung sich als binäre Formen von x_1, x_2 darstellen lassen. Hat $f(x_1|x_2)$ lauter verschiedene Nullwerthe, so ist

$$(3) \qquad \omega_x = -\int (x_1 dx_2 - x_2 dx_1) = -\int (x dx)$$

das einfachste Integral 1. Gattung, während die übrigen enthalten sind in dem Ausdruck

$$(4) \qquad w_{\mu\nu} = \int \varphi_{\mu\nu}(x_1|x_2)\, d\omega_x,$$

wo man für $\varphi_{\mu\nu}$ der Reihe nach $\mu + 1$ linear unabhängige, sonst beliebige Binärformen μ^{ter} Ordnung einzusetzen hat:

$$\varphi_{\mu 0}, \varphi_{\mu 1}, \varphi_{\mu 2}, \ldots, \varphi_{\mu\mu}; \quad \mu = 0, 1, 2, \ldots, n-3; \quad \varphi_{00} = 1.$$

Das Geschlecht ist also

$$p = 1 + 2 + 3 + \cdots + n - 2 = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2).$$

An Stelle des gewöhnlichen Integrals III. Gattung benutzen wir das schon gelegentlich von Weierstrass gebrauchte, allgemein aber von Christoffel*) eingeführte Integral R, welches nur logarithmisch unstetig wird, und zwar

1) in einem Punkte der Fläche T mit dem Gewicht 1,

2) in den n unendlich fernen Punkten je mit dem Gewicht $-\frac{1}{n}$.

Verlegt man diese letzteren Unstetigkeiten, um eine covariante Normirung zu erzielen, ebenfalls ins Endliche, und zwar nach den n einander bedeckenden Punkten

$$(z_1\Theta^k, z_2\Theta^k), \quad \Theta = e^{\frac{2\pi i}{n}}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad f(z_1|z_2) = 1,$$

so lautet dieses Integral

$$(5) \qquad \begin{cases} R_z(x|y) = \int \frac{1}{n} \dfrac{1 - \left(\frac{(zx)}{(zy)}\right)^n}{1 - \frac{(zx)}{(zy)}} \dfrac{(zy)}{(zx)(xy)}\, d\varpi_x, \\ f(x_1|x_2) = 1, \quad f(y_1|y_2) = 1, \quad f(z_1|z_2) = 1 \end{cases}$$

und giebt, in der Form

$$(6) \quad R_z(x|y) = \int \frac{1}{n}\left\{1 + \frac{(zx)}{(zy)} + \frac{(zx)^2}{(zy)^2} + \cdots + \frac{(zx)^{n-1}}{(zy)^{n-1}}\right\}\left\{\frac{(y\,dx)}{(yx)} - \frac{(z\,dx)}{(zx)}\right\}$$

geschrieben, folgende Unstetigkeiten zu erkennen:

1) in y_1, y_2: $R_z(x|y) = ln\,(yx) +$ stetiger Theil,

2) in $z_1\Theta^k, z_2\Theta^k$, $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$R_z(x|y) = -\frac{1}{n} ln\,(zx) + \text{stetiger Theil},$$

*) Annali di Matematica, Ser. II^a, Bd. IX.

und andere Unstetigkeiten sind nicht vorhanden. Dann ist:

$$\Pi_{y,\eta}(x) = R_s(x|y) - R_s(x|\eta)$$

das gewöhnliche Integral 3. Gattung mit den beiden Unstetigkeiten in y_1, y_2 und η_1, η_2. Das Integral 2. Gattung kann daraus in bekannter Weise abgeleitet werden.

3. Da somit die wichtigsten Gebilde der Classe sich als binäre Formen von x_1, x_2 darstellen lassen, wird man zu ihrem weiteren Studium die Hülfsmittel der Invariantentheorie heranziehen. Die Lehre von den typischen Darstellungen und associirten Formen enthält Forschungsmethoden, die für functionentheoretische Zwecke noch gar nicht nutzbar gemacht worden sind. Um das im vorliegenden Falle zu erreichen, führen wir durch die Substitution

$$(7) \qquad \begin{cases} x_1 = t_1\xi_1 + \frac{1}{n}\frac{\partial f(t_1|t_2)}{\partial t_2}\xi_2, \\ x_2 = t_2\xi_1 - \frac{1}{n}\frac{\partial f(t_1|t_2)}{\partial t_1}\xi_2 \end{cases}$$

mit der Determinante $-f(t_1|t_2) = -1$ „typische" Veränderliche:

$$(8) \qquad \begin{cases} \xi_1 = \frac{1}{n}\left\{\frac{\partial f(t_1|t_2)}{\partial t_1}x_1 + \frac{\partial f(t_1|t_2)}{\partial t_2}x_2\right\}. \\ \xi_2 = x_1t_2 - x_2t_1 = (xt) \end{cases}$$

ein. Ist dann

$$(9) \qquad 1 = f(x_1|x_2) = \sum_{\nu=0}^{\nu=n}\binom{n}{\nu}u_\nu\xi_1^{n-\nu}\xi_2^\nu$$

die Transformirte von $f(x_1|x_2)$, so sind die Coefficienten u_ν Covarianten von $f(t_1|t_2)$ und bis auf die Bedingung $f(t_1|t_2) = 1$ identisch mit den von Clebsch, Algebra der binären Formen, § 83 eingeführten associirten Formen. Wendet man dieselbe Substitution auf beliebige andere Binärformen

$$(10) \qquad \begin{cases} \varphi(x_1|x_2) = \sum_{\nu=0}^{\nu=h}\binom{h}{\nu}\varphi_\nu x_1^{h-\nu}x_2^\nu, \\ \psi(x_1|x_2) = \sum_{\nu=0}^{\nu=k}\binom{k}{\nu}\psi_\nu x_1^{k-\nu}x_2^\nu, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

an, so sind die Coefficienten v_ν, w_ν der transformirten Formen

$$(11) \qquad \begin{cases} \varphi(x_1|x_2) = \sum_{\nu=0}^{\nu=h}\binom{h}{\nu}v_\nu\xi_1^{h-\nu}\xi_2^\nu. \\ \psi(x_1|x_2) = \sum_{\nu=0}^{\nu=k}\binom{k}{\nu}w_\nu\xi_1^{k-\nu}\xi_2^\nu \end{cases}$$

ebenfalls Covarianten, und zwar von $f(t_1|t_2)$ und $\varphi(t_1|t_2)$ bezw. $\psi(t_1|t_2)$ simultan.

Es gelten dann folgende Sätze:

(12) *Um eine Covariante der Formen f, φ, ψ, ... auf $f = 1$ typisch darzustellen, ersetze man a_ν, φ_ν, ψ_ν, ...; x_1, x_2 durch u_ν, v_ν, w_ν, ...; ξ_1, ξ_2 und gebe dem entstandenen Ausdruck positives oder negatives Vorzeichen, jenachdem die Covariante gerade oder ungerade ist.*

Invarianten werden hier und im Folgenden stets als Covarianten der Ordnung Null aufgefasst, ferner:

(13) *Eine in den Variabeln t_1, t_2 geschriebene Covariante der Formen f, φ, ψ, ... erhält man aus ihrem Leitglied bis auf das Vorzeichen, indem man darin die Coefficienten a_ν, φ_ν, ψ_ν, ... durch die Schwesterformen u_ν, v_ν, w_ν, ... ersetzt, $\nu = 0, 1, \ldots$; das Vorzeichen ist positiv oder negativ, jenachdem die Covariante gerade oder ungerade ist.*

4. Zwischen diesen rein invariantentheoretischen Sätzen und der Functionentheorie wird ein inniger Zusammenhang hergestellt durch den Satz:

(14) *dass auf dem Gebilde $f(x_1|x_2) = 1$ das Differenziren nach $\omega_x = -\int (x\,dx)$ einer einmaligen Ueberschiebung über $f(x_1|x_2)$ gleichkommt.*

Ist symbolisch

$$(15) \qquad \begin{cases} f(x_1|x_2) = a_x^n, \\ \varphi(x_1|x_2) = \varphi_x^k, \end{cases}$$

so ist nämlich:

$$(16) \qquad \frac{d\varphi(x_1|x_2)}{d\omega_x} = h(\varphi a)\,\varphi_x^{k-1}\,a_x^{n-1}.$$

(17) *Jede Linearform $\lambda = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ genügt daher auf $f(x_1|x_2) = 1$ der verallgemeinerten Riccati'schen Differentialgleichung*

$$\frac{d^2\lambda}{d\omega_x^2} + \mathsf{H}.\lambda = 0$$

wo

$$\mathsf{H} = \frac{n-1}{2}(aa')^2\,a_x^{n-2}\,a_x'^{n-2}$$

die Hesse'sche Covariante von $f(x_1|x_2)$ bedeutet.

Daher ist speciell:

$$(18) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi_2}{d\omega_t^2} + \tau\xi_2 = 0, \quad \dfrac{d\xi_2}{d\omega_t} = -\xi_1, \quad \dfrac{d\xi_1}{d\omega_t} = \tau\xi_2, \\ \text{wo} \\ \tau = \dfrac{n-1}{2}(aa')^2\,a_t^{n-2}\,a_t'^{n-2}. \end{cases}$$

Von besonderem Interesse sind die recurrenten Differentialgleichungen, welche sich aus den bekannten Recursionsformeln*) für die u_ν, v_ν, w_ν,... ableiten lassen; es ist:

$$(19)\quad \begin{cases} (n-\nu)u_{\nu+1} = \dfrac{du_\nu}{d\varpi_t} + \nu\tau u_{\nu-1}; \quad u_0 = 1, \quad u_1 = 0, \\ (k-\nu)v_{\nu+1} = \dfrac{dv_\nu}{d\varpi_t} + \nu\tau v_{\nu-1}; \quad v_0 = \varphi(t_1|t_2), \\ (k-\nu)w_{\nu+1} = \dfrac{dw_\nu}{d\varpi_t} + \nu\tau w_{\nu-1}; \quad w_0 = \psi(t_1|t_2). \end{cases}$$

Führt man zur bequemeren Rechnung

$$(20)\qquad U_\nu^{(n)} = \frac{n!}{(n-\nu)!}u_\nu, \quad V_\nu^{(h)} = \frac{h!}{(h-\nu)!}v_\nu$$

ein, so folgt:

$$(21)\quad \begin{cases} U_{\nu+1}^{(n)} = \dfrac{dU_\nu^{(n)}}{d\varpi_t} + \nu(n-\nu+1)\,\tau\,U_{\nu-1}^{(n)}, \quad \tau = \dfrac{U_2^{(n)}}{n}, \\ V_{\nu+1}^{(h)} = \dfrac{dV_\nu^{(h)}}{d\varpi_t} + \nu(h-\nu+1)\,\tau\,V_{\nu-1}^{(h)}, \quad V_0^{(h)} = \varphi(t_1|t_2), \end{cases}$$

und man erhält durch wiederholte Anwendung dieser Relationen folgende Tabellen:

$$(22)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{n}U_3^{(n)} = \dfrac{d\tau}{d\varpi_t}, \\ \dfrac{1}{n}U_4^{(n)} = \dfrac{d^2\tau}{d\varpi_t^2} + 3(n-2)\tau^2, \\ \dfrac{1}{n}U_5^{(n)} = \dfrac{d^3\tau}{d\varpi_t^3} + 2(5n-12)\tau\dfrac{d\tau}{d\varpi_t}, \\ \dfrac{1}{n}U_6^{(n)} = \dfrac{d^4\tau}{d\varpi_t^4} + (15n-44)\,\tau\dfrac{d^2\tau}{d\varpi_t^2} + (10n-24)\left(\dfrac{d\tau}{d\varpi_t}\right)^2 \\ \qquad\qquad + 15(n-2)(n-4)\tau^3, \\ \dfrac{1}{n}U_7^{(n)} = \dfrac{d^5\tau}{d\varpi_t^5} + (21n-74)\,\tau\dfrac{d^3\tau}{d\varpi_t^3} + (35n-92)\dfrac{d\tau}{d\varpi_t}\dfrac{d^2\tau}{d\varpi_t^2} \\ \qquad\qquad + 3(35n^2-238n+360)\tau^2\dfrac{d\tau}{d\varpi_t}, \\ \qquad\qquad\qquad \text{etc.} \end{cases}$$

und

*) Clebsch, Algebra d. binären Formen, § 83.

$$(23)\qquad \begin{cases} V_1^{(h)} = \dfrac{d\varphi}{d\varpi_t}, & \left(\varphi = \varphi(t_1|t_2),\ f(t_1|t_2) = 1\right) \\ V_2^{(h)} = \dfrac{d^2\varphi}{d\varpi_t^2} + h\tau\varphi, & \\ V_3^{(h)} = \dfrac{d^3\varphi}{d\varpi_t^3} + (3h-2)\tau\dfrac{d\varphi}{d\varpi_t} + h\dfrac{d\tau}{d\varpi_t}\varphi, & \\ V_4^{(h)} = \dfrac{d^4\varphi}{d\varpi_t^4} + (6h-8)\tau\dfrac{d^2\varphi}{d\varpi_t^2} + (4h-2)\dfrac{d\tau}{d\varpi_t}\dfrac{d\varphi}{d\varpi_t} & \\ \qquad + h\left(\dfrac{d^2\tau}{d\varpi_t^2} + 3(h-2)\tau^2\right)\varphi, & \end{cases}$$

etc., die erst ihre volle Bedeutung erlangen durch den Satz:

(24) *Berechnet man mittels der Gleichungen* (21) *die Grössen* $U_{n+1}^{(n)}$, $U_{h+1}^{(h)}$ *(ähnlich wie in* (22) *und* (23)), *so erhält man für* τ *und* φ *folgende Differentialgleichungen:*

$$U_{n+1}^{(n)} = 0, \quad V_{h+1}^{(h)} = 0.$$

5. Alle ganzen Formen auf $f = 1$ genügen demnach Differentialgleichungen vom Typus $V_{h+1}^{(h)} = 0$; ist z. B. $h = 3$,

$$\varphi(t_1|t_2) = \sum_{\nu=0}^{\nu=3}\binom{3}{\nu}\varphi_\nu t_1^{3-\nu}t_2^{3}, \quad \varphi = \varphi(t_1|t_2),$$

so ist nach (23):

$$\frac{d^4\varphi}{d\omega_t^4} + 10\tau\frac{d^2\varphi}{d\varpi_t^2} + 10\frac{d\tau}{d\varpi_t}\frac{d\varphi}{d\varpi_t} + 3\left(\frac{d^2\tau}{d\varpi_t^2} + 3\tau^2\right)\varphi = 0,$$

während τ selber der Gleichung $U_{n+1}^{(n)} = 0$ genügt. Letztere gewährt mannigfaches Interesse. Bezeichnet man nämlich den Ausdruck

$$\tau\cdot\frac{(n-2)^2}{n-1} = \frac{1}{2}(n-2)^2.(aa')^2a_t^{n-2}a_t'^{n-2},$$

in seiner Abhängigkeit von ϖ_t betrachtet, mit $-\varphi(\varpi_t)$, und sind $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3, \ldots, \varpi_n$ die Werthe von ϖ in den Verzweigungspunkten, so gilt der Satz:

(25) *Die Function* $\varphi(\omega_t)$ *wird unendlich nur für*

$$\varpi_t = \varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_n,$$

und zwar ist

$$\text{in } \varpi_\nu \text{ für } \nu = 1, 2, \ldots, n;$$

$$\varphi(\varpi_t) = \frac{1}{(\omega_t-\omega_\nu)^2} + \text{stetiger Theil.}$$

Richtet man die untere Grenze der Integration so ein, dass $\varpi_1 = 0$ ist, so ist für $\varpi_t = 0$:

$$\varphi(\varpi_t) = \frac{1}{\varpi_t^2} + \text{stetiger Theil.}$$

Dieser Satz hat zur Folge, dass in allen Fällen, wo $\wp(\varpi_t)$ durch die Gleichung $U_{n+1}^{(n)} = 0$ als *ein*werthige Function von ϖ_t definirt wird, diese mit der Weierstrass'schen $\wp$-Function identisch ist, mit der unser allgemeines $\wp$ noch folgende Eigenschaften gemein hat: Erstens ist

$$\wp(-\varpi) = \wp(\omega);$$

sind ferner $J_1, J_2, \ldots, J_{n-2}$ gewisse ausgezeichnete Periodicitätsmoduln des Integrals ϖ, von denen $\wp(\varpi_t)$ abhängt, so ist:

$$\wp\left(\frac{\varpi_t}{\mu}\,\middle|\,\frac{J_1}{\mu}, \frac{J_2}{\mu}, \ldots, \frac{J_{n-2}}{\mu}\right) = \mu^2 \wp(\varpi_t | J_1, J_2, \ldots, J_{n-2}).$$

Dagegen unterscheidet sich das allgemeine $\wp(\varpi_t)$ von dem Weierstrass'schen dadurch, dass es i. A. keine einwerthige Function von ϖ_t ist. Auf jeden Fall haben wir es aber mit einem binomischen Analogon der Weierstrass'schen $\wp$-Function zu thun.

6. Wie erwähnt, giebt es Grundgleichungen $f = 1$, deren zugehöriges $\wp(\varpi)$ mit der Weierstrass'schen $\wp$-Function identisch ist. Dazu gehört natürlich in erster Linie der Fall, dass f eine biquadratische Form ist, also der elliptische Fall selber. Auch wenn f eine der Polyederformen bedeutet, ist $\wp(\varpi_t)$ die Weierstrass'sche Transcendente. Wir betrachten in der eingangs citirten Schrift eine (Hexaeder-)Form 8. Ordnung, deren vierte Ueberschiebung über sich selbst auf $f = 1$ eine Constante C ist. Die Untersuchung gestaltet sich folgendermassen. Von der Form $(f, f)_4$ wird das Leitglied in bekannter Weise berechnet, hierin die Coefficienten nach dem Satz (13) durch die u_ν bezw. nach (20) durch die U_ν und letztere nach Tabelle (22) durch τ und seine Derivirten ausgedrückt. Das giebt

$$\frac{d^2\tau}{d\varpi_t^2} + 6 \cdot \frac{6^2}{7}\tau^2 = C,$$

und indem man mit $\frac{d\tau}{d\varpi}$ als integrirendem Factor multiplicirt und integrirt:

$$\left(\frac{d\tau}{d\varpi_t}\right)^2 + 4\frac{6^2}{7}\tau^3 = 2C\tau - D, \qquad \frac{6^2}{7}\tau = -p:$$

$$\left(\frac{dp}{d\varpi_t}\right)^2 = 4p^3 - g_2 p - g_3,$$

wo die Constanten g_2, g_3 leicht zu berechnen sind und wiederum die Weierstrass'sche Function sich als Lösung einstellt. Dieses Beispiel giebt hinreichend zu erkennen, wie Grundformen f, die durch besondere Covariantenbeziehungen charakterisirt sind, sich mit den dargelegten Hilfsmitteln behandeln lassen.

7. Aus den Differentialgleichungen, denen die ganzen Formen auf $f = 1$ genügen, lassen sich auch solche für die gebrochenen

Formen ableiten. Bemerkenswerth sind die Differentialgleichungen derjenigen gebrochenen Formen, die in den Variabeln homogen zur Dimension Null sind, wegen ihrer vielfachen Zusammenhänge mit der Schwarz'schen Differentialinvariante; ist nämlich:

$$\zeta = \frac{\alpha_t}{\beta_t}, \tag{26}$$

so findet sich:

$$[\xi]_{\varpi_t} = 2\tau, \qquad \text{(cfr. (18))}. \tag{27}$$

Sind φ, ψ zwei quadratische Formen mit den Invarianten

$(\varphi,\varphi)_2 = D_{\varphi\varphi}$, $(\varphi,\psi)_2 = D_{\varphi\psi}$, $(\psi,\psi)_2 = D_{\psi\psi}$, $R_{\varphi\psi} = D_{\varphi\varphi} D_{\psi\psi} - D^2_{\varphi\psi}$,

so erfüllt

$$y = \frac{\varphi}{\psi} \tag{28}$$

die Gleichung

$$3 R_{\varphi\psi}\left(\frac{dy}{d\varpi}\right)^2 = 2\{D_{\varphi\varphi} - 2 D_{\varphi\psi} y + D_{\psi\psi} y^2\}\{[y]_\varpi - 2\tau\}, \tag{29}$$

und solcher Gleichungen ergiebt sich eine ganze Reihe. Die Gleichung für ζ lässt sich umformen in

$$\frac{d^2\Omega}{d\zeta^2} = (n-1)\Omega \cdot \frac{F(\zeta)F_2(\zeta) - F_1(\zeta)^2}{F(\zeta)^2}, \tag{30}$$

wo die F ganze Functionen und F_1, F_2 bis auf einen Zahlenfactor ihre Derivirten nach ζ sind; Particularlösungen sind $\Omega_1 = \frac{\omega}{\beta_t}\sqrt{D}$ und $\Omega_2 = \frac{\sqrt{D}}{\beta_t}$, $D = (\alpha\beta)$. Doch können wir hier darauf nicht weiter eingehen.

8. Die recurrenten Differentialgleichungen (21) sind specielle Fälle des folgenden allgemeinen Satzes:

Ist $\Phi(x_1 \mid x_2)$ eine beliebige analytische Function ihrer Argumente auf $f(x_1 \mid x_2) = 1$, welcher im Punkte t_1, t_2 eindeutig und stetig ist und von t_1, t_2 nicht abhängt, so gilt in t_1, t_2 und seiner Umgebung die convergente Reihenentwicklung

$$\Phi(x_1 \mid x_2) = \xi_1^m \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{C_\nu^{(m)}}{\nu!} \frac{1}{\xi^\nu}, \quad \xi = \frac{\xi_1}{\xi_2}. \tag{31}$$

wo $m = 1, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ sein kann und die Entwicklungscoefficienten aus

$$C_0^{(m)} = \Phi(t_1 \mid t_2) \tag{32}$$

mittels

$$C_{\nu+1}^{(m)} = \frac{d C_\nu^{(m)}}{d\varpi_t} + \nu(m-\nu+1)\tau C_{\nu-1}^{(m)} \tag{33}$$

zu berechnen sind.

Man sieht sofort, wenn $C_{m+1}^{(m)} \equiv 0$ ist, so berechnen sich auch $C_{m+2}^{(m)}$, $C_{m+3}^{(m)}$, etc. gleich Null, die Reihe bricht ab und Φ ist eine ganze Form von ξ_1, ξ_2. Zusammen mit (24) heisst das:

(34) *Das identische Verschwinden von $C_{m+1}^{(m)}$ für irgend ein m in der Entwicklung von $\Phi(x_1|x_2)$ ist die nothwendige und hinreichende Bedingung, dass Φ eine ganze Form m^{ter} Ordnung von x_1, x_2 ist.*

Daraus folgt:

(35) *Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Form m^{ter} Ordnung $\Phi(x_1|x_2)$ den Factor $f(x_1|x_2)$ genau λ mal abzuspalten gestattet, ist die, dass Φ der Differentialgleichung $C_{k+1}^{(k)} = 0$ der Formen k^{ter} Ordnung genügt, $k = m - \lambda n$, und dass $C_{\varkappa+1}^{(\varkappa)}$ für $\varkappa < k$ nicht verschwindet.*

Differentialgleichungen mit den Anfangsbedingungen $C_0^{(m)} = 1$, $C_1^{(m)} = 0$, wie sie für die $U_\nu^{(n)}$ die Nummer (21) charakteristisch sind, erhält man aus (31) nur, wenn die Function Φ eine Constante, und zwar $\Phi = 1$ ist. Dann folgt:

$$(36)\qquad \begin{cases} 1 = \xi_\nu^m \cdot \sum \dfrac{C_\nu^{(m)}}{\nu!} \dfrac{1}{\xi^\nu}, & \text{wo} \\ C_{\nu+1}^{(m)} = \dfrac{d\, C_\nu^{(m)}}{d\varpi_t} + \nu(m-\nu+1)\,\tau\, C_{\nu-1}^{(m)} \\ C_0^{(m)} = 1, \quad C_1^{(m)} = 0, \quad C_2^{(m)} = m\tau, \end{cases}$$

und diese Entwicklung ist für $m = n$ identisch mit (9), falls man dort die U einführt, es sind dann also die $C_\nu^{(n)}$ identisch mit den $U_\nu^{(n)}$. Aus (36) folgt:

(37) *Für $m = n, 2n, 3n, 4n, \ldots$ ist* (36) *die Entwicklung von*

$$f(x_1|x_2) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a_\nu x_1^{n-\nu} x_2^\nu = 1,$$

bezw. von $f^2, f^3, f^4, \ldots$

(38) *Für $m < n$ ist $U_{m+1}^{(m)} \equiv 0$ die hinreichende und nothwendige Bedingung dafür, dass $f(x_1|x_2)$ eine volle Potenz einer Form niedrigerer Ordnung m ist, wo $U_{m+1}^{(m)}$ zu berechnen ist aus*

$$U_{\nu+1}^{(m)} = \frac{d\, U_\nu^{(m)}}{d\varpi_t} + \nu(m-\nu+1)\,\tau\, U_{\nu-1}^{(m)}; \quad U_0^{(m)} = 1, \quad U_1^{(m)} = 0.$$

Dieser letzte Satz ist die Lösung eines auch von Hilbert*) behandelten

*) Math. Ann. Bd. 27.

Problems, die auf Grund unseres Satzes mit Hilfe von (22) berechnete Tabelle

$$(39)\quad \begin{cases} \frac{1}{1}\,U_2^{(1)} = \tau, \\ \frac{1}{2}\,U_3^{(2)} = \tau', \\ \frac{1}{3}\,U_4^{(3)} = \tau'' + 3\tau^2, \\ \frac{1}{4}\,U_5^{(4)} = \tau''' + 16\tau\tau', \\ \frac{1}{5}\,U_6^{(5)} = \tau^{(4)} + 31\tau\tau'' + 26\tau'^2 + 75\tau^3, \\ \frac{1}{6}\,U_7^{(6)} = \tau^{(5)} + 52\,\tau\tau''' + 118\tau'\tau'' + 576\tau^2\tau' \end{cases}$$

stimmt nach leichter Umrechnung mit der Hilbert'schen völlig überein. Da diese Ausdrücke sämmtlich aus der Hesse'schen Form τ von $f(t_1|t_2)$ durch Differenziren nach ϖ_t abgeleitet sind, so stellen sie nach Satz (14) Covarianten dar. Auch die in (31) definirte unendliche Reihe der $C_\nu^{(m)}$ besteht, wenn $\Phi = 1$ oder eine Binär*form* ist, aus lauter Covarianten. Aus diesen Covarianten lassen sich nun associirte Systeme ableiten, über deren Eigenschaften wir auf die eingangs citirte Arbeit verweisen müssen. Indem wir einige rein formentheoretische Abschnitte derselben hier übergehen, sei noch kurz über einen der letzten (a. a. O. § 9) berichtet.

9. Ist, in Linearfactoren zerlegt,

$$(40)\quad \begin{cases} f(x_1|x_2) = (e_1 x)(e_2 x)\ldots(e_n x) = \prod_e (e\,x), \quad f = 1, \\ \varphi(x_1|x_2) = (r_1 x)(r_2 x)\ldots(r_h x) = \prod_r (r\,x), \end{cases}$$

so ergiebt sich durch die Substitution (7):

$$(41)\quad \begin{cases} f(x_1|x_2) = (\xi_1 - \varepsilon_1\xi_2)(\xi_1 - \varepsilon_2\xi_2)\ldots(\xi_1 - \varepsilon_n\xi_2) = \prod_\varepsilon (\xi_1 - \varepsilon\,\xi_2), \\ \varphi(x_1|x_2) = \varphi(t_1|t_2)(\xi_1 - \varrho_1\xi_2)\ldots(\xi_1 - \varrho_h\xi_2) = \varphi(t_1|t_2)\prod_\varrho (\xi_1 - \varrho\xi_2), \end{cases}$$

wo

$$(42)\quad \varepsilon_\nu = \frac{1}{n}\,\frac{\frac{\partial f(t_1|t_2)}{\partial t_1}\,e_\nu^{(1)} + \frac{\partial f(t_1|t_2)}{dt_2}\,e_\nu^{(2)}}{(et)}$$

und ähnlich ϱ_ν definirt ist. Dann genügen die ε und ϱ, wie auch $\xi = \frac{\xi_1}{\xi_2}$, den Riccati'schen Differentialgleichungen

$$(43)\quad \frac{d\xi}{d\varpi_t} = \xi^2 + \tau \,\Big|\, \frac{d\varepsilon}{d\varpi_t} = \varepsilon^2 + \tau \,\Big|\, \frac{d\varrho}{d\varpi_t} = \varrho^2 + \tau,$$

und da $\sum_{\varepsilon} \varepsilon$ wegen $u_1 = 0$ verschwindet, so folgt aus der mittleren Gleichung durch Summation über alle ε:

$$\sum_{\varepsilon} \varepsilon^2 = -n\tau. \tag{44}$$

Also genügen die Potenzsummen

$$s_\nu(\varepsilon) = \sum_{\varepsilon} \varepsilon^\nu, \quad s_\nu(\varrho) = \sum_{\varrho} \varrho^\nu,$$

den Differentialgleichungen:

$$\begin{cases} \dfrac{ds_\nu(\varepsilon)}{d\varpi_t} = \nu s_{\nu+1}(\varepsilon) + \nu\tau s_{\nu-1}(\varepsilon), & s_0(\varepsilon) = n, \\ \dfrac{ds_\nu(\varrho)}{d\varpi_t} = \nu s_{\nu+1}(\varrho) + \nu\tau s_{\nu-1}(\varrho), & s_0(\varrho) = h. \end{cases} \tag{45}$$

Zur Berechnung dieser Potenzsummen hat man die schönen Sätze:

Liegen die Punkte x_1, x_2 und t_1, t_2 der Curve $f(x_1|x_2) = 1$ hinreichend nahe bei einander, so gelten die convergenten Reihenentwicklungen

I) $$\frac{1}{n}\left(\frac{\partial f(x_1|x_2)}{\partial x_1} t_1 + \frac{\partial f(x_1|x_2)}{\partial x_2} t_2\right)\left(\frac{\partial f(t_1|t_2)}{\partial t_1} x_1 + \frac{\partial f(t_1|t_2)}{\partial t_2} x_2\right)$$
$$= s_0(\varepsilon) + \frac{s_1(\varepsilon)}{\xi} + \frac{s_2(\varepsilon)}{\xi^2} + \cdots$$

II) $$\frac{1}{n}\left(\frac{\partial \varphi(x_1|x_2)}{\partial x_1} t_1 + \frac{\partial \varphi(x_1|x_2)}{\partial x_2} t_2\right)\left(\frac{\partial f(t_1|t_2)}{\partial t_1} x_1 + \frac{\partial f(t_1|t_2)}{\partial t_2} x_2\right)$$
$$= \varphi(x_1|x_2)\left\{s_0(\varrho) + \frac{s_1(\varrho)}{\xi} + \frac{s_2(\varrho)}{\xi^2} + \cdots\right\}$$

wo

$$\xi = \xi_1 : \xi_2$$

ist.

Aus den sich hier anschliessenden Untersuchungen der oben genannten Schrift erwähnen wir noch das folgende, invariantentheoretisch interessante Resultat: Wie aus den Gleichungen (19) ohne Weiteres die Cayley-Aronhold'schen Differentialgleichungen der Covarianten als Functionen der Coefficienten entspringen, so kann man aus (43) die Differentialgleichungen ableiten, denen die Covarianten als Functionen der Wurzeln nach Brioschi*) genügen.

Strassburg i. E., 28. Juli 1898.

*) Annali di Tortolini, V.

Ueber einige, bei Schwingungsproblemen auftretende, Differentialgleichungen.

Von

Max Abraham in Berlin.

Viele Probleme der mathematischen Physik führen auf die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$. In manchen Fällen ist es eine scalare Grösse, beispielsweise bei Problemen der Wärmeleitung die Temperatur, die jener Gleichung zu genügen hat. Schreibt die Grenzbedingung dieser Grösse bestimmte Werthe an einer Fläche vor, so wählt man zweckmässig die Raumparameter derart, dass einer von ihnen an der Grenzfläche einen constanten Werth besitzt. Die Differentialgleichungen, zu denen man so gelangt, und die Arbeiten, die sich mit ihnen beschäftigen, sind neuerdings in dem bekannten Buche von F. Pockels*) in umfassender Weise behandelt worden. Bei den Problemen nun, welche Schwingungen continuirlicher Medien betreffen, ist es zunächst kein Scalar, sondern es sind die drei Componenten eines Vectors in Richtung der Coordinatenaxen, welche jener Differentialgleichung genügen sollen. Hier enthalten die Grenzbedingungen in ihrer einfachsten Form nicht diese Componenten, sondern die Componenten senkrecht und tangentiell zur Grenzfläche. Man hat also nicht nur die Coordinaten zu transformiren, sondern auch als abhängige Variable die Componenten in Richtung der neuen, krummlinigen Coordinaten einzuführen. Um nun complicirte Rechnungen zu umgehen, werden wir einen Weg einschlagen, den schon Lamé als den gangbarsten erkannt hat**). Wir werden für die physikalischen Gesetze, welche die Wellenbewegungen beherrschen, einen vom Coordinatensystem unabhängigen Ausdruck aufsuchen, und in diesen direct die allgemeinen orthogonalen Coordinaten einführen. Für eine derartige Darstellungsweise bieten die Symbole der Vectoranalysis ein sehr

*) F. Pockels: „Die part. Diffgl. $\Delta u + k^2 u = 0$ und deren Auftreten in der math. Physik". Leipzig 1891.

**) Lamé: „Leçons sur les fonctions inverses" 1857, p. 196.

geeignetes, und in neuerer Zeit vielfach angewandtes, Hilfsmittel dar, wenn man sie nicht als Zeichen für gewisse Operationen mit cartesischen Coordinaten auffasst, sondern ihnen einen vom Coordinatensystem unabhängigen geometrischen Sinn beilegt. Im ersten Paragraphen werden wir, der Darstellung von Heaviside*) folgend, eine derartige geometrische Definition der zu benutzenden drei Symbole der Vectoranalysis vorausschicken, und in dieselbe allgemeine orthogonale Coordinaten einführen. Sind alsdann die physikalischen Gesetze durch jene Symbole dargestellt, so kann unmittelbar ihr Ausdruck durch orthogonale Coordinaten angegeben werden.

In dieser Weise nun leiten wir im zweiten Abschnitte die Differentialgleichungen longitudinaler und transversaler Wellen ab. Longitudinale Wellen lassen sich stets auf die Bestimmung eines Scalars zurückführen, welcher der Gleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ genügt, die Differentialgleichungen, zu denen man gelangt, sind also mit den bei Problemen der Wärmeleitung auftretenden identisch. Anders verhalten sich die transversalen Wellen. Hier lässt sich stets ein Hilfsvector einführen, welcher mit dem ursprünglichen durch dieselben Gleichungen verbunden ist, die nach der Maxwell'schen Theorie die electrische Kraft mit der magnetischen verknüpfen. Es ist im Allgemeinen nicht möglich, das Problem auf die Lösung einer einzigen partiellen Differentialgleichung zu reduciren. Dieses gelingt einmal bei zweidimensionalen Problemen; hier stimmen die Differentialgleichungen longitudinaler und transversaler Wellen überein. Ferner gelingt die Zurückführung auf eine einzige partielle Differentialgleichung bei solchen transversalen Schwingungen, welche in Bezug auf eine Axe symmetrisch sind; die Differentialgleichung ist aber nicht identisch mit der für longitudinale Wellen im gleichen Falle geltenden.

Es sind also drei partielle Differentialgleichungen mit je zwei unabhängigen Variablen, welche wir der weiteren Untersuchung zu Grunde legen. Wir fragen zunächst, wann sie sich durch ein Product zweier Functionen der einzelnen Parameter integriren lassen. Es gelingt dieses nur durch Einführung elliptischer Coordinaten oder solcher, die als Grenzfälle in diesen mit enthalten sind. Jede der drei Gleichungen zerfällt alsdann in ein Paar identischer gewöhnlicher Differentialgleichungen. Das erste Paar bestimmt die sogenannten „Functionen des elliptischen Cylinders". Mathieu**) hat dieselben zuerst durch Reihen darzustellen gesucht, welche nach Potenzen der Excentricität der Ellipsen fortschreiten, während es Heine***) gelang, sie in

*) Heaviside: „Electrical papers" I, Art. 24.

**) Mathieu: „Cours de physique mathématique" 1873, p. 122—164.

***) Heine: „Handbuch der Kugelfunctionen" 1878, I, p. 401—412.

Fourier'sche Reihen zu entwickeln*). Die zweite Differentialgleichung ist ein specieller Fall der bei dem Problem der Wärmeleitung eines Rotationsellipsoids auftretenden, welche gleichfalls zuerst von Mathieu**) behandelt wurde. Heine versuchte dann erfolglos***), auch die Integrale dieser Differentialgleichungen in Fourier'sche Reihen zu entwickeln. Von Niven wurde die richtige Analogie zu der von Heine auf die Functionen des elliptischen Cylinders angewandten Methode erkannt†) in der Entwickelung der „Functionen des Rotationsellipsoids" nach Zugeordneten der Kugelfunctionen. In dem hier behandelten Falle gehen diese in zonale Kugelfunctionen über. Die dritte Differentialgleichung endlich wurde vom Verfasser††) für die electromagnetischen Schwingungen eines Rotationsellipsoids aufgestellt.

Der Darlegung der Eigenschaften dieser Differentialgleichungen sind die beiden letzten Abschnitte gewidmet. Als heuristisches Princip benutzen wir den, allerdings hypothetischen, Satz, dass jeder mögliche Schwingungszustand von denselben Symmetrieeigenschaften und von bestimmter Periode und Dämpfung nach den erwähnten particulären Lösungen in Form von Producten, den sogenannten „Normalfunctionen" des betreffenden Bereichs, entwickelbar sei. Ein möglicher Schwingungszustand, in Richtung der grossen Axe der Ellipsen fortschreitenden Wellen entsprechend, lässt sich leicht angeben. Mit Hilfe der Orthogonalitätseigenschaft der Normalfunctionen ergiebt sich aus jener Entwickelung eine Darstellung der Lösungen unserer Differentialgleichungen durch bestimmte Integrale, welche im Integranden wiederum eine Lösung derselben Differentialgleichung enthalten. Dieses Resultat, das wir auch, von den Differentialgleichungen ausgehend, verificiren, gestattet es, die Werthe zu ermitteln, denen sich die Integrale, im Sinne Poincaré's†††), mit wachsendem Argumente asymptotisch nähern, und sie in Beziehung zu den Werthen zu setzen, welche die Integrale in der Umgebung der im Endlichen gelegenen singulären Punkte besitzen. Während sich die oben erwähnten Autoren in den physikalischen Anwendungen auf wenig von Kugeln und Kreiscylindern verschiedene Körper beschränken mussten, lassen sich, mit Hilfe jener Beziehungen, auch solche Probleme in Angriff nehmen, welche die Schwingungen sehr gestreckter Rotationsellipsoide betreffen††.

---

*) Weitere Litteratur findet man bei Pockels l. c. p. 116.

**) Mathieu l. c. p. 270—290.

***) Heine l. c. II, p. 328—332.

†) Niven: Transactions of the R. Soc. of London 1880, I, p. 117—151.

††) M. Abraham: „Die el. Schwingungen um e. stabförmigen Leiter". Wied. Ann. d. Physik u. Chemie. Bd. 66, p. 435—472. 1898.

†††) Poincaré: Acta mathematica Bd. VIII. p. 295 ff. und Méth. nouvelles de la mécanique céleste. II. p. 2. 1893.

§ 1.

Vector-Analysis und orthogonale Coordinaten.

I. Gegeben sei ein Scalar α als eindeutige stetige Function des Ortes. Wir definiren*) einen Vector

$$\mathfrak{B} = -\nabla\alpha \tag{1}$$

durch die Festsetzung: Das Linienintegral von $\mathfrak{B}$ längs einer ungeschlossenen Curve ϱ ist gleich der Differenz der Werthe, die der Scalar α an den Endpunkten 1, 2 der Curve besitzt

$$\int_1^2 B_\varrho \, d\varrho = \alpha_1 - \alpha_2. \tag{1a}$$

Ein Vector $\mathfrak{B}$, welcher in der, durch (1) dargestellten Beziehung zu einem Scalar α steht, besitzt die Eigenschaft, dass sein Linienintegral, erstreckt über eine geschlossene Curve, verschwindet.

II. Ist das Linienintegral eines Vectors $\mathfrak{B}$ längs einer geschlossenen Curve im allgemeinen von Null verschieden, so definiren wir einen neuen Vector

$$\mathfrak{C} = \operatorname{curl} \mathfrak{B} \tag{2}$$

durch die Festsetzung: Das Flächenintegral der Normalcomponente von $\mathfrak{C}$, erstreckt über eine ungeschlossene Fläche σ, ist gleich dem Linienintegrale von $\mathfrak{B}$ längs der Randcurve ϱ

$$\int_\sigma C_\nu \, d\sigma = \int_\varrho B_\varrho \, d\varrho. \tag{2a}$$

Denkt man sich die Randcurve ϱ so durchlaufen, dass die Fläche σ zur Linken liegt, so ist unter ν diejenige Normale verstanden, welche am Rande dem Umlaufenden von den Füssen zum Kopfe gerichtet ist. Ein Vector $\mathfrak{C}$, welcher in der, durch (2) dargestellten Beziehung zu einem anderen Vector $\mathfrak{B}$ steht, besitzt die Eigenschaft, dass das Integral seiner Normalcomponente, erstreckt über eine geschlossene Fläche, verschwindet.

III. Ist das Flächenintegral der Normalcomponente eines Vectors $\mathfrak{C}$ über eine geschlossene Fläche im allgemeinen von Null verschieden, so definiren wir einen Scalar

$$\delta = \operatorname{div} \mathfrak{C} \tag{3}$$

durch die Festsetzung: Das Integral des Scalars δ, erstreckt über

*) Heaviside: „Electrical papers" I, Art. 24. Siehe auch A. Föppl „Einführung i. d. Maxwell'sche Theorie". Lpz. 1894. Cap. I.

einen Raum τ, ist gleich dem Integrale der Componente des Vectors $\mathfrak{C}$ in Richtung der äusseren Normalen, erstreckt über die Grenzfläche σ

$$\int_\tau \vartheta \, d\tau = \int_\sigma C_\nu \, d\sigma. \tag{3a}$$

Wir denken uns nun die Lage eines Punktes im Raume durch drei Parameter $(u\,v\,w)$ in eindeutiger Weise bestimmt. Erfahren beim Fortschreiten um das Linienelement ds die Parameter die Aenderungen (du, dv, dw), so soll

$$ds^2 = \frac{du^2}{U^2} + \frac{dv^2}{V^2} + \frac{dw^2}{W^2}$$

sein, d. h. $u\,v\,w$ sind orthogonale Coordinaten. Die Eindeutigkeit der Bestimmung verlangt, dass U^2, V^2, W^2 einwerthige und zwar stets positive Functionen der Parameter sind. Setzen wir fest, dass für U, V, W die positiven Wurzeln derselben zu nehmen sind, so sind auch diese Grössen eindeutig durch die Parameter bestimmt. Wir nehmen ferner an, dass sie in dem betrachteten Raumtheile stetig und von Null verschieden seien. Wir wollen nun die symbolischen Gleichungen (1, 2, 3) mit Hilfe der geometrischen Beziehungen (1a, 2a, 3a) in Gleichungen zwischen den vorkommenden Scalaren und den Componenten der Vectoren in Richtung der wachsenden Parameter $(u\,v\,w)$ umsetzen.

I. Wir wählen für ϱ die Schnittcurve zweier Flächen $v =$ constans, $w =$ constans. Dann folgt aus (1a)

$$\int_1^2 B_u \frac{du}{U} = -\int_1^2 \frac{\partial \alpha}{\partial u} du.$$

Da das Intervall $(u_2 - u_1)$ beliebig gewählt werden kann, und analoge Betrachtungen auf die Schnittcurven je zweier Flächen anwendbar sind, auf denen die Parameter (w, u) und (u, v) constante Werthe besitzen, so erhalten wir als *Componenten des Vectors* $\mathfrak{B} = -\nabla\alpha$

$$B_u = -U\frac{\partial \alpha}{\partial u}, \quad B_v = -V\frac{\partial \alpha}{\partial v}, \quad B_w = -W\frac{\partial \alpha}{\partial w}. \tag{1b}$$

II. Wir wählen für σ ein Flächenstück, auf dem der Parameter u constant ist. Dann folgt aus (2a)

$$\int_\sigma C_u \, d\sigma = \int_\varrho \left(B_v \frac{dv}{V\,d\varrho} + B_w \frac{dw}{W\,d\varrho}\right) d\varrho.$$

Wir bilden die Fläche σ auf eine Ebene σ' ab, deren Abscisse v, deren Ordinate w ist. Hierdurch wird jedes Element der Fläche σ einem Elemente der Ebene σ' in eindeutiger Weise zugeordnet; es ist

$$d\sigma = \frac{dv\,dw}{VW} = \frac{d\sigma'}{VW}.$$

Jedem Elemente $d\varrho$ der Randcurve von σ entspricht ein Element $d\varrho'$ der Randcurve von σ', und zwar derart, dass beim Fortschreiten um entsprechende Strecken die Parameter um die gleichen Beträge wachsen. Es ist also

$$\frac{dv}{d\varrho} \cdot d\varrho = \frac{dv}{d\varrho'} d\varrho', \qquad \frac{dw}{d\varrho} \cdot d\varrho = \frac{dw}{d\varrho'} d\varrho',$$

und es wird

$$\int_{\sigma} C_u \frac{d\sigma'}{VW} = \int_{\varrho'} \left(\frac{B_v}{V} \frac{dv}{d\varrho'} + \frac{B_w}{W} \frac{dw}{d\varrho'} \right) d\varrho'.$$

Nehmen wir an, dass die Richtungen der wachsenden uvw mit einem Rechtssysteme zur Deckung zu bringen sind, und beachten wir die oben angegebene Fortschreitungsrichtung längs der Randcurve, so folgt mit Hilfe einer bekannten Integraltransformation

$$\int_{\sigma} \frac{C_u}{VW} d\sigma' = \int_{\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{B_w}{W} \right) - \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{B_v}{V} \right) \right] d\sigma'.$$

Diese Transformation, die einen speciellen Fall des Stokes'schen Satzes bildet, ist hier gestattet, da die Componenten von $\mathfrak{B}$ als einer physikalischen Grösse eindeutig durch Angabe des Raumpunktes bestimmt sein müssen, und auch UVW als einwerthige und von Null verschiedene Functionen der Parameter angenommen wurden. Da nun das Flächenstück σ' beliebig gewählt werden kann, und analoge Betrachtungen auf die Flächen $v =$ constans, $w =$ constans anzuwenden sind, so erhalten wir als *Componenten des Vectors* $\mathfrak{C} =$ curl $\mathfrak{B}$

$$\text{(2b)} \qquad \begin{cases} C_u = VW \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{B_w}{W} \right) - \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{B_v}{V} \right) \right], \\ C_v = WU \left[\frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{B_u}{U} \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{B_w}{W} \right) \right], \\ C_w = UV \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{B_v}{V} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{B_u}{U} \right) \right]. \end{cases}$$

III. Aus (3a) ergiebt sich zur Bestimmung der Divergenz die Gleichung

$$\int_{\tau} \delta \, d\tau = \int_{\sigma} d\sigma \left((C_u \cos(vu) + C_v \cos(vv) + C_w \cos(vw) \right).$$

Wir bilden den Raum τ auf einen Raum τ' ab, dessen Cartesische Coordinaten uvw sind. Hierdurch wird jedes Element $d\tau$ einem Elemente $d\tau'$ in eindeutiger Weise zugeordnet; es ist

$$d\tau = \frac{du\,dv\,dw}{UVW} = \frac{d\tau'}{UVW}.$$

Jedem Elemente $d\sigma$ der Oberfläche von τ entspricht ein Element $d\sigma'$ der Oberfläche von τ'; es bestehen die Beziehungen

$$d\sigma \cdot \cos(\nu u) = \frac{dv\,dw}{VW} = \frac{d\sigma'}{VW} \cdot \cos(\nu' u),$$

$$d\sigma \cdot \cos(\nu v) = \frac{dw\,du}{WU} = \frac{d\sigma'}{WU} \cdot \cos(\nu' v),$$

$$d\sigma \cdot \cos(\nu w) = \frac{du\,d\tau}{UV} = \frac{d\sigma'}{UV} \cdot \cos(\nu' w).$$

Somit ergiebt sich

$$\int_{\tau'} \delta \frac{d\tau'}{UVW} = \int_{\sigma'} d\sigma' \left(\frac{C_u}{VW} \cdot \cos(\nu' u) + \frac{C_v}{WU} \cdot \cos(\nu' v) + \frac{C_w}{UV} \cdot \cos(\nu' w) \right).$$

Formen wir die rechte Seite mit Hilfe des Green'schen Satzes um, was bei den über die Grössen $U\,V\,W$ gemachten Annahmen gestattet ist, so folgt

$$\int_{\tau'} \frac{\partial}{UVW} d\tau' = \int_{\tau'} d\tau' \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{C_u}{VW}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{C_v}{WU}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{C_w}{UV}\right) \right].$$

Da wir nun den Raum τ' beliebig wählen können, so erhalten wir für den *Scalar* $\delta = \operatorname{div} \mathfrak{C}$

$$\delta = UVW \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{C_u}{VW}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{C_v}{WU}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{C_w}{VU}\right) \right]. \tag{3b}$$

Die Gleichungen (1b, 2b, 3b) *geben uns den Ausdruck der drei definirten Symbole der Vectoranalysis durch allgemeine orthogonale Coordinaten.* Der Ausdruck durch Cartesische Coordinaten geht aus diesem hervor, indem man $U = V = W = 1$ setzt; er lautet

$$B_x = -\frac{\partial \alpha}{\partial x}, \quad B_y = -\frac{\partial \alpha}{\partial y}, \quad B_z = -\frac{\partial \alpha}{\partial z}. \tag{1c}$$

$$\begin{cases} C_x = \dfrac{\partial B_z}{\partial y} - \dfrac{\partial B_y}{\partial z}, \\ C_y = \dfrac{\partial B_x}{\partial z} - \dfrac{\partial B_z}{\partial x}, \\ C_z = \dfrac{\partial B_y}{\partial x} - \dfrac{\partial B_x}{\partial y}, \end{cases} \tag{2c}$$

$$\delta = \frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z}. \tag{3c}$$

Im folgenden Paragraphen werden wir die erhaltenen Resultate auf die Gesetze der Wellenbewegungen eines continuirlichen Mediums anzuwenden haben.

§ 2.

Die partiellen Differentialgleichungen longitudinaler und transversaler Wellen.

Unsere Untersuchungen sollen sich auf ein Medium beziehen, in dem sich Wellen irgend welcher Art mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit c ausbreiten können. $\mathfrak{F}$ sei der die Wellenbewegung charakterisirende Vector, etwa die elastische Verschiebung bei mechanischen, die magnetische Kraft bei electromagnetischen Wellen. Die zeitliche Aenderung des Vectors $\mathfrak{F}$ soll durch den Factor $e^{-\vartheta ct}$ bestimmt sein, wo ϑ eine complexe Grösse bedeutet, deren reeller Theil entweder positiv oder Null ist, d. h. die Schwingungen sollen periodisch oder gedämpft sein. Durch diese Festsetzung gewinnen wir einerseits die Möglichkeit, eine Absorption der Schwingungsenergie in Betracht zu ziehen, andrerseits tritt auch in einem absorptionsfreien Medium eine „conservative Dämpfung"*) durch Ausstrahlung überall dort auf, wo nicht das Feld der Schwingungen rings von einer vollkommen reflectirenden Hülle umschlossen ist.

Einen Vector $\mathfrak{F}$, dessen zeitliche Veränderung durch den Factor $e^{-\vartheta ct}$ bestimmt ist, werden wir als Wellenvector bezeichnen, wenn die räumlichen Veränderungen seiner Componenten in Richtung der rechtwinkligen Coordinatenaxen durch die Differentialgleichungen regulirt werden

$$(4)\qquad \begin{aligned} \vartheta^2 F_x &= \frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2}, \\ \vartheta^2 F_y &= \frac{\partial^2 F_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial z^2}, \\ \vartheta^2 F_z &= \frac{\partial^2 F_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der im vorigen Abschnitte definirten Symbole der Vectoranalysis können wir diese Gleichungen für die Componenten durch eine einzige Vectorgleichung ersetzen

$$(5)\qquad \vartheta^2 \mathfrak{F} = +\nabla \operatorname{div} \mathfrak{F} - \operatorname{curl}\operatorname{curl} \mathfrak{F}.$$

Denn aus (1 c, 2 c, 3 c) erkennt man, dass die Componenten der Vectoren, welche auf der linken und rechten Seite von (5) stehen, mit der die linke und rechte Seite der Gleichungen (4) bildenden Grössen identisch sind. Bevor wir die allgemeine Wellengleichung (5) specialisiren, wollen wir zwei auf ebene Wellen bezügliche Sätze anführen.

I. Bei longitudinalen ebenen homogenen Wellen verschwindet der curl des Wellenvectors. Denn sei die (yz)-Ebene die Wellenebene, so

*) M. Planck, Berl. Sitzungsber. Febr. 1896.

verschwinden die Differentialquotienten nach y, z; ferner ist wegen der Longitudinalität $F_y = F_z = 0$, woraus sich nach (2c) die Richtigkeit des Satzes ergiebt.

II. Bei transversalen ebenen homogenen Wellen verschwindet die Divergenz des Wellenvectors. Denn sei wieder die (yz)-Ebene die Wellenebene, so verschwinden die Differentialquotienten nach y, z; ferner ist wegen der Transversalität $F_x = 0$, woraus sich nach (3c) die Richtigkeit des Satzes ergiebt.

Wir gerathen also nicht in Widerspruch mit der bei ebenen Wellen üblichen Bezeichnungsweise, wenn wir Longitudinalwellen und Transversalwellen allgemein, wie folgt, definiren:

I. *Longitudinal sind solche Wellen, bei denen der curl des Wellenvectors verschwindet.*

II. *Transversal sind solche Wellen, bei denen die Divergenz des Wellenvectors verschwindet.*

Durch Einführung dieser Definitionen in die allgemeine Wellengleichung (5) erhalten wir die *Grundgleichung longitudinaler Wellen*

$$\vartheta^2 \mathfrak{F} = + \nabla \operatorname{div} \mathfrak{F}, \tag{5a}$$

und die *Grundgleichung transversaler Wellen*

$$\vartheta^2 \mathfrak{F} = - \operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathfrak{F}. \tag{5b}$$

Indem wir uns im Folgenden auf die Behandlung longitudinaler und transversaler Wellen beschränken, umfassen wir alle bekannten Wellenbewegungen homogener, isotroper Medien. Denn die allgemeinste Wellenbewegung eines elastischen, festen Körpers lässt sich, wie Stokes*) und Clebsch**) bewiesen haben, in eine longitudinale und eine transversale zerlegen, die sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten fortpflanzen. Die flüssigen und die gasförmigen Körper dagegen gestatten nur die Ausbreitung longitudinaler Wellen, während die electromagnetischen und die Licht-Wellen transversaler Natur sind.

Longitudinale Wellen lassen sich stets auf die Bestimmung eines Scalars zurückführen. Denn setzen wir

$$\sigma = \operatorname{div} \mathfrak{F},$$

so hat der Scalar σ der aus (5a) folgenden Gleichung zu genügen

$$\vartheta^2 \sigma = \operatorname{div} \nabla \sigma. \tag{6}$$

Ist σ dieser Gleichung gemäss bestimmt, so ergiebt sich aus

$$\mathfrak{F} = \frac{1}{\vartheta^2} \cdot \nabla \sigma \tag{6a}$$

---

*) Stokes, Math. Phys. Papers. II. p. 258.

**) Clebsch, Crelle's Journal. Bd. 61.

bei gegebenem ϑ der Wellenvector $\mathfrak{F}$. Satzen wir nun aus (1b, 3b) den Ausdruck der Symbole div. und ∇ durch orthogonale Coordinaten ein, so folgt aus (6) als *Differentialgleichung longitudinaler Wellen*

$$(6\,b)\quad \vartheta^2\sigma = UVW\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{U}{VW}\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{V}{WU}\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{W}{UV}\frac{\partial\sigma}{\partial w}\right)\right].$$

Dieselbe Gleichung hätten wir erhalten, wenn wir für den Scalar σ die Differentialgleichung (4) aufgestellt und die unabhängigen Variabeln transformirt hätten.

Kehren wir nun zur Grundgleichung (5b) transversaler Wellen zurück. Wir führen einen Hülfsvector $\mathfrak{G}$ ein durch die Beziehung

$$-\vartheta\mathfrak{G} = \operatorname{curl}\mathfrak{F}.$$

(7) Dann folgt

$$\vartheta\mathfrak{F} = \operatorname{curl}\mathfrak{G}.$$

Dieses Gleichungssystem ist, bei geeigneter Bestimmung der Constanten ϑ, *identisch mit demjenigen, welches nach den Grundgleichungen der Maxwell'schen Electrodynamik in der von* Heaviside*) *und* Hertz**) *angegebenen symmetrischen Form die electromagnetischen Schwingungen beherrscht.* Wir sehen hier, dass es für alle transversalen Schwingungen gilt. Setzen wir aus (2b) den Ausdruck der Componenten des curl durch orthogonale Coordinaten ein, so erhalten wir als *Differentialgleichungen transversaler Wellen*

$$(7\,a)\quad\begin{aligned}
-\vartheta G_u &= VW\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{F_w}{W}\right)-\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{F_v}{V}\right)\right],\\
-\vartheta G_v &= WU\left[\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{F_u}{U}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{F_w}{W}\right)\right],\\
-\vartheta G_w &= UV\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{F_v}{V}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{F_u}{U}\right)\right];
\end{aligned}$$

$$(7\,b)\quad\begin{aligned}
\vartheta F_u &= VW\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{G_w}{W}\right)-\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{G_v}{V}\right)\right],\\
\vartheta F_v &= WU\left[\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{G_u}{U}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G_w}{W}\right)\right],\\
\vartheta F_w &= UV\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G_v}{V}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{G_u}{U}\right)\right].
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen lassen sich im Allgemeinen nicht auf die Lösung einer einzigen partiellen Differentialgleichung reduciren. Dieses gelingt indessen, falls die Componenten von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ von einem der Parameter, etwa w, unabhängig sind, und auch U, V nicht von w abhängen. Dann zerfallen die Gleichungen (7a, b) in zwei Gruppen

*) Heaviside, „Electrical papers". I, Art. 30.
**) H. Hertz, „Ausbr. d. el. Kraft", p. 148.

$$(7c)\qquad \begin{gathered} -\vartheta G_u = VW\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{F_w}{W}\right), \qquad \vartheta G_v = WU\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{F_w}{W}\right), \\ \vartheta F_w = UV\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G_v}{V}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{G_u}{U}\right)\right]; \end{gathered}$$

$$(7d)\qquad \begin{gathered} +\vartheta F_u = VW\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{G_w}{W}\right), \quad -\vartheta F_v = WU\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G_w}{W}\right), \\ -\vartheta G_w = UV\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{F_v}{V}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{F_u}{U}\right)\right]. \end{gathered}$$

Da diese Gruppen von einander unabhängig sind, und sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, so genügt es, die erste zu behandeln. Wir setzen

$$A = \frac{F_w}{W}.$$

Dann hat A der Differentialgleichung zu genügen

$$(8)\qquad \vartheta^2 A = \frac{UV}{W}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{WU}{V}\frac{\partial A}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{WV}{U}\frac{\partial A}{\partial v}\right)\right].$$

Ist A demgemäss bestimmt, so ergeben sich die Componenten F_w, G_u, G_v nach (7c) aus den Gleichungen

$$(8a)\qquad F_w = A.W, \quad -\vartheta G_u = VW\frac{\partial A}{\partial v}, \quad +\vartheta G_v = UW\frac{\partial A}{\partial u}.$$

Stellen wir (8) die Differentialgleichung gegenüber, die für longitudinale Schwingungen bei Unabhängigkeit vom Parameter w gilt

$$(8b)\qquad \vartheta^2\sigma = UVW\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{U}{WV}\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{V}{WU}\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right)\right].$$

Die Differentialgleichungen longitudinaler und transversaler Wellen sind nur dann identisch, wenn W von u und v unabhängig ist. Alsdann kann man durch geeignete Wahl des Parameters w W gleich 1 machen. Dieser Voraussetzung entspricht der Fall, dass w in parallelen Ebenen constant ist. Zweidimensionale Schwingungsprobleme führen demnach stets auf die Differentialgleichung

$$(9)\qquad \vartheta^2 Z = UV\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{U}{V}\frac{\partial Z}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{V}{U}\frac{\partial Z}{\partial v}\right)\right].$$

Ist andererseits der Schwingungszustand in Bezug auf eine Axe symmetrisch, so können wir für w den Winkel setzen, den die betreffende Meridianebene mit einer festen bildet. Auch hier sind, wie vorausgesetzt wurde, U, V von w unabhängig. Der Abstand von der Symmetrieaxe ist $\varrho = \frac{1}{W}$. In diesem Falle lautet die Differentialgleichung longitudinaler Wellen

$$(10)\qquad \vartheta^2\sigma = UV\left[\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial u}\left(\varrho\cdot\frac{U}{V}\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right) + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial v}\left(\varrho\cdot\frac{V}{U}\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right)\right].$$

Die Differentialgleichung transversaler Wellen dagegen nimmt die Form an

$$(11) \qquad \vartheta^2 A = UV\left[\varrho\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{U}{V}\frac{\partial A}{\partial u}\right)+\varrho\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{V}{U}\frac{\partial A}{\partial v}\right)\right].$$

Auf die Gleichungen (9, 10, 11) sollen sich unsere weiteren Untersuchungen beziehen.

§ 3.

Reduction auf gewöhnliche Differentialgleichungen.

Innerhalb der Ebenen $w =$ constans mag die Lage eines Punktes durch die cartesischen Coordinaten (s, ϱ) bestimmt sein. Wir wählen die Parameter (u, v) derart, dass jene Ebenen durch die Beziehung

$$(12) \qquad s + \varrho i = \psi(u + vi)$$

conform auf die (u, v)-Ebene abgebildet werden. Für das Verhältniss entsprechender Linienelemente erhalten wir alsdann

$$(12a) \qquad \frac{1}{U} = \frac{1}{V} = |\psi'(u + vi)|,$$

und für das Verhältniss entsprechender Flächenelemente

$$(12b) \qquad h = \frac{1}{UV} = |\psi'(u + vi)|^2.$$

Durch Einführung dieser Beziehungen nehmen unsere Gleichungen die Form an:

die Differentialgleichung zweidimensionaler Schwingungen

$$(13a) \qquad Z\,.\,\vartheta^2 h = \frac{\partial^2 Z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial v^2},$$

die Differentialgleichung longitudinaler Schwingungen bei Axensymmetrie

$$(13b) \qquad \sigma\,.\,\vartheta^2 h = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial u}\left(\varrho\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right)+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial v}\left(\varrho\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right),$$

die Differentialgleichung transversaler Schwingungen bei Axensymmetrie

$$(13c) \qquad A\,.\,\vartheta^2 h = \varrho\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial A}{\partial u}\right)+\varrho\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial A}{\partial v}\right).$$

Wann ist es möglich, diesen Differentialgleichungen durch ein Product einer Function von u und einer Function von v zu genügen? Für (13a) ist die Bedingung die, dass h als Differenz einer Function von u und einer Function von v darstellbar sei. Für (13b, c) tritt noch die zweite Bedingung hinzu, dass ϱ das Product zweier nur von u und v allein abhängiger Functionen sein muss. Die erste Bedingung

wird, wie H. Weber*) bewiesen hat, nur befriedigt, wenn die Curven $u =$ constans, $v =$ constans confocale Ellipsen und Hyperbeln oder Grenzfälle dieser Curvensysteme sind. Bezeichnet f den halben Abstand der Brennpuncte, so hat man zu setzen

$$s + \varrho i = \psi(u + vi) = f \cdot \cos(u + vi). \tag{14}$$

Man findet alsdann

$$h = |\psi'(u + vi)|^2 = f^2 \left(\cos^2(ui) - \cos^2 v\right). \tag{14a}$$

Die erste Bedingung ist in der That erfüllt. Durch Gleichsetzung der reellen und imaginären Theile von (14) erhält man

$$s = f \cdot \cos(ui) \cdot \cos v, \quad \varrho = f \cdot (-i \sin ui) \cdot \sin v. \tag{14b}$$

Somit ist auch die zweite Bedingung erfüllt, und daher sind bei dieser Wahl der Parameter auch die Gleichungen (13b, c) durch Producte einer Function von u, und einer Function von v integrirbar.

Durch Einführung von (14a, b) nehmen die Gleichungen (13) die Form an

$$Z \cdot \vartheta^2 f^2 \cdot (\cos^2 ui - \cos^2 v) = \frac{\partial^2 Z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial v^2}, \tag{15a}$$

$$\sigma \cdot \vartheta^2 f^2 \cdot (\cos^2 ui - \cos^2 v) = \frac{1}{\sin ui} \frac{\partial}{\partial u}\left(\sin ui \frac{\partial \sigma}{\partial u}\right) + \frac{1}{\sin v} \frac{\partial}{\partial v}\left(\sin v \frac{\partial \sigma}{\partial v}\right), \tag{15b}$$

$$A \cdot \vartheta^2 f^2 \cdot (\cos^2 ui - \cos^2 v) = \sin ui \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sin ui} \frac{\partial A}{\partial u}\right) + \sin v \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sin v} \frac{\partial A}{\partial v}\right). \tag{15c}$$

Es war vorausgesetzt worden, dass einem Werthsystem (u, v) der Parameter ein Punkt einer Ebene $w =$ constans in eindeutiger Weise entspricht. Dieses wird erreicht, wenn (u, v) in den Intervallen variiren

$$0 \leqq u < \infty, \quad -\pi \leqq v \leqq +\pi.$$

Wegen der Einwerthigkeit des Wellenvectors kommen nur solche Lösungen von (15) in Betracht, die für $v = -\pi$, und $v = +\pi$ denselben Werth besitzen. Führen wir nun die neuen Variabeln ein

$$x = \cos(ui), \quad y = \cos v, \tag{16}$$

die in den Intervallen liegen

$$1 \leqq x < \infty, \quad -1 \leqq y \leqq +1,$$

so entsprechen einem Werthe von y zwei entgegengesetzt gleiche Werthe von v. Es können sich daher im Falle des elliptischen

*) H. Weber, Math. Ann. I, p. 27—30. Siehe auch Häntschel „Reduction der Potentialgleichung", p. 137—140.

Cylinders die Componenten des Wellenvectors als zweiwerthige Functionen von y darstellen; im Falle des Rotationsellipsoids dagegen treten nur eindeutige Functionen von y auf, da dort die Componenten in zwei zur grossen Axe symmetrisch liegenden Punkten als gleich vorausgesetzt wurden.

Die Variabeln (x, y) stehen nach (14b) zu den Cartesischen Coordinaten der Ebenen $w =$ constans in der Beziehung

$$(16a) \qquad z = fxy, \quad \varrho = f\sqrt{x^2-1}\,.\,\sqrt{1-y^2}.$$

Es ergiebt also $|fx|$ die Länge der grossen Halbaxe der Ellipse, die durch den betreffenden Punkt geht, während die Länge der grossen Halbaxe der Hyperbel durch $|fy|$ bestimmt wird. Durch Einführung der neuen Variabeln nehmen die Gleichungen (15), wenn wir noch $p = \vartheta f$ setzen, die Form an

$$(17a) \qquad Z\,.\,p^2(x^2-y^2) = -\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{1-x^2}\,\frac{\partial Z}{\partial x}\right) + \sqrt{1-y^2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{1-y^2}\,\frac{\partial Z}{\partial y}\right),$$

$$(17b) \qquad \sigma\,.\,p^2(x^2-y^2) = -\frac{\partial}{\partial x}\left((1-x^2)\,\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left((1-y^2)\,\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right),$$

$$(17c) \qquad A\,.\,p^2(x^2-y^2) = -(1-x^2)\,\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + (1-y^2)\,\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}.$$

Wir erhalten particuläre Lösungen dieser partiellen Differentialgleichungen in Form von Producten

$$(18) \qquad Z_n = B_n(y)\,.\,C_n(x), \quad \sigma_n = L_n(y)\,.\,M_n(x), \quad A_n = E_n(y)\,.\,H_n(x),$$

wenn die Factoren den folgenden, gewöhnlichen, linearen Differentialgleichungen genügen

$$(19a) \qquad \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\cdot\frac{d}{dy}\left(\sqrt{1-y^2}\,.\,B_n'(y)\right) + B_n(y)\cdot\left(-p^2 + \frac{\varepsilon_n}{1-y^2}\right) = 0,$$

$$(19b) \qquad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1-x^2}\,.\,C_n'(x)\right) + C_n(x)\cdot\left(-p^2 + \frac{\varepsilon_n}{1-x^2}\right) = 0;$$

$$(19c) \qquad \frac{1}{1-y^2}\cdot\frac{d}{dy}\left((1-y^2)\,.\,L_n'(y)\right) + L_n(y)\cdot\left(-p^2 + \frac{\lambda_n}{1-y^2}\right) = 0,$$

$$(19d) \qquad \frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\,.\,M_n'(x)\right) + M_n(x)\cdot\left(-p^2 + \frac{\lambda_n}{1-x^2}\right) = 0;$$

$$(19e) \qquad E_n''(y) + E_n(y)\cdot\left(-p^2 + \frac{\varkappa_n}{1-y^2}\right) = 0,$$

$$(19f) \qquad H_n''(x) + H_n(x)\cdot\left(-p^2 + \frac{\varkappa_n}{1-x^2}\right) = 0.$$

Diese Differentialgleichungen sind sämmtlich functionentheoretisch dadurch charakterisirt, dass sie in den Punkten ± 1 Singularitäten be-

sitzen, und dass der unendlich ferne Punkt eine Unbestimmtheitsstelle für die Integrale ist. Auf das Verhalten der Integrale in der Nähe der letzteren werden wir erst im fünften Abschnitte eingehen, wobei auch die für die Wahl der Particulärlösungen von (19b, d, f) massgebenden Gesichtspunkte erörtert werden sollen. Hier wollen wir zunächst die Bedingungen aufstellen, die sich aus der Einwerthigkeit und Endlichkeit des Wellenvectors für die Functionen $B_n(y)$, $L_n(y)$, $E_n(y)$ ergeben, falls, wie wir annehmen, das Feld der Schwingungen nur von Ellipsen, nicht aber von Hyperbeln begrenzt wird.

Bei den durch (19a, b) bestimmten, zweidimensionalen Schwingungsvorgängen verlangt die Einwerthigkeit des Wellenvectors, dass die Lösung auf einem, beide Brennpunkte umschliessenden Wege zum Anfangswerthe zurückkehre. Um diese Bedingung zu erfüllen ist für $B_n(y)$ ein particuläres Integral von (19a) zu setzen, welches in Bezug auf $v = \arccos(y)$ die Periode 2π besitzt, also entweder in beiden singulären Puncten $y = +1$ und $y = -1$ zur Wurzel $\frac{1}{2}$, oder in beiden zur Wurzel 0 der determinirenden Fundamentalgleichung gehört. Ein solches particuläres Integral aber lässt die Gleichung (19a) nur für bestimmte Werthe der Constanten ε_n zu, die wir im ersten Falle mit ε_{n1}, im zweiten mit ε_{n2} bezeichnen. Die zugehörigen Lösungen von (17a)

$$Z_{n1} = B_{n1}(y) \cdot C_{n1}(x), \quad Z_{n2} = B_{n2}(y) \cdot C_{n2}(x)$$

stellen zur grossen Axe der Ellipsen antisymmetrische, beziehungsweise symmetrische „Normalfunctionen des elliptischen Cylinders" dar.

In den beiden anderen Fällen ist die Einwerthigkeit des Wellenvectors von vorne herein durch die Annahme der Symmetrie um die Rotationsaxe gesichert. Hier werden die für die Veränderung des Schwingungszustandes längs der Ellipsen charakteristischen Functionen $L_n(y)$, $E_n(y)$ durch die Bedingung bestimmt, dass der Wellenvector auf den im Felde enthaltenen Theilen der Rotationsaxe $\varrho = 0$, insbesondere auf den Hyperbelzweigen $y = -1$ und $y = +1$, endlich bleibt.

Für $L_n(y)$ ist demnach ein in den singulären Punkten $y = \pm 1$ endliches Integral von (19c) zu setzen. Ein solches existirt nur für eine Reihe bestimmter, durch den Index n unterschiedener Werthe der Constanten λ_n. Die zugehörigen Lösungen von (11b)

$$\sigma_n = L_n(y) \cdot M_n(x)$$

wollen wir als „axial-symmetrische Normalfunctionen des Rotationsellipsoids für longitudinale Schwingungen" bezeichnen.

Da nach (8a, 16a, 18) bei transversalen Schwingungen der betrachteten Art der Wellenvector durch

$$F_w = \frac{A_n}{\varrho} = \frac{E_n(y) \cdot H_n(x)}{f \cdot \sqrt{1-y^2} \cdot \sqrt{x^2-1}}$$

bestimmt wurde, so verlangt die Endlichkeit desselben, dass für $E_n(y)$ ein für $y = \pm 1$ verschwindendes Integral von (19e) gesetzt werde. Ein solches existirt nur für eine Reihe bestimmter Werthe der Constanten $\varkappa_n$, und zwar verschwindet es, wie die Aufstellung der determinirenden Fundamentalgleichung lehrt, in jenen Punkten von der ersten Ordnung. Die zugehörigen, durch den Index n unterschiedenen, Particularlösungen von (17c)

$$A_n = E_n(y) \cdot H_n(x)$$

wollen wir als „Normalfunctionen des Rotationsellipsoids für transversale Schwingungen" bezeichnen.

Die zu demselben Werthe der Constanten p, aber zu verschiedenen Werthen von ε_{n1}, ε_{n2}, λ_n, $\varkappa_n$ gehörenden, den Bedingungen der Eindeutigkeit und Stetigkeit genügenden Integrale von (19a, c, e) besitzen die sogenannte „*Orthogonalitätseigenschaft*", die wir nunmehr ableiten wollen. Aus (19a) folgt

$$B_m(y) \cdot \frac{d}{dy}\left(\sqrt{1-y^2}\, B_n'(y)\right) - B_n(y) \cdot \frac{d}{dy}\left(\sqrt{1-y^2}\, B_m'(y)\right) = (\varepsilon_m - \varepsilon_n) \cdot \frac{B_m(y) \cdot B_n(y)}{\sqrt{1-y^2}},$$

und durch Integration

$$\left[\sqrt{1-y^2}\left(B_m(y) \cdot B_n'(y) - B_n(y) B_m'(y)\right)\right]_{-1}^{+1} = (\varepsilon_m - \varepsilon_n) \cdot \int_{-1}^{+1} dy \cdot \frac{B_m(y) \cdot B_n(y)}{\sqrt{1-y^2}},$$

Wenn nun beide Functionen $B_n(y)$, $B_m(y)$ für $y = \pm 1$ von der Ordnung $\frac{1}{2}$ verschwinden, oder beide endlich sind, so verschwindet die linke Seite jedesmal von der Ordnung $\frac{1}{2}$, also ist

$$\int_{-1}^{+1} dy \, \frac{B_m(y) \cdot B_n(y)}{\sqrt{1-y^2}} = 0, \quad m \gtrless n. \tag{20a}$$

Analog ergiebt (19c)

$$\left[(1-y^2)\left(L_m(y) \cdot L_n'(y) - L_n(y) L_m'(y)\right)\right]_{-1}^{+1} = (\lambda_m - \lambda_n) \cdot \int_{-1}^{+1} dy \, L_m(y) L_n(y).$$

Da nun $L_m(y)$, $L_n(y)$ beide mit ihren Ableitungen für $y = \pm 1$ endlich sind, so folgt

$$\int_{-1}^{+1} dy\, L_m(y) L_n(y) = 0, \quad m \gtrless n. \tag{20b}$$

Endlich ergiebt (19e)

$$\left[E_n'(y) E_m(y) - E_m'(y) E_n(y)\right]_{-1}^{+1} = (\varkappa_m - \varkappa_n) \cdot \int_{-1}^{+1} dy\, \frac{E_m(y) \cdot E_n(y)}{1-y^2}.$$

Da $E_n(y)$, $E_m(y)$ für $y = \pm 1$ verschwinden, die Ableitungen aber endlich sind, so folgt

$$\int_{-1}^{+1} dy\, \frac{E_m(y) \cdot E_n(y)}{1-y^2} = 0, \quad m \gtrless n. \tag{20c}$$

Die Functionen $C_n(x)$, $M_n(x)$, $H_n(x)$, mit denen man $B_n(y)$, $L_n(y)$, $E_n(y)$ multipliciren muss, um eine particuläre Lösung der partiellen Differentialgleichungen (17) zu erhalten, werde ich mir gestatten, die zu jenen „complementären" Functionen zu nennen. Für einen von confocalen elliptischen Cylindern oder Rotationsellipsoiden begrenzten Bereich genügen also die complementären Functionen denselben Differentialgleichungen. Dieses ändert sich indessen, wenn wir von Ellipsen zu Kreisen übergehen. Wir haben dann den Abstand der Brennpunkte $(2f)$ gleich Null zu setzen, wobei der Radius $fx = r$ und y, der Cosinus des Winkels zweier Radien, endlich bleiben müssen; da nun $p = \vartheta f$ war, so ist in den Differentialgleichungen (19) zur Grenze $p = 0$ überzugehen bei endlichem y und endlichem $px = \vartheta r = z$. Es werden also für Bereiche, die von concentrischen Kugeln oder Kreiscylindern begrenzt sind, die complementären Functionen ganz verschiedenen Differentialgleichungen genügen. Dieselben lauten, wenn wir für die Constanten sogleich die aus den Bedingungen der Eindeutigkeit und Stetigkeit folgenden Werthe setzen:

Für die aus $B_n(y)$ entstehende Function $\Phi_n(y)$

$$\sqrt{1-y^2} \cdot \frac{d}{dy}\left(\sqrt{1-y^2} \cdot \Phi_n'(y)\right) + n^2 \Phi_n(y) = 0. \tag{21a}$$

Ihre Integrale $\Phi_{n1}(y) = \sin(n \arccos y)$ und $\Phi_{n2}(y) = \cos(n \arccos y)$ entsprechen den Functionen $B_{n1}(y)$ und $B_{n2}(y)$.

Die complementäre Function $G_n(z)$ genügt der Differentialgleichung

$$\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\left(z \cdot G_n'(z)\right) - G_n(z)\left(1 + \frac{n^2}{z^2}\right) = 0, \tag{21b}$$

die durch die Substitution $z = \vartheta i$ in die der Bessel'schen Functionen $J_n(\vartheta)$ übergeht (Heine I. Formel 42, p. 236).

Nach Heine's Formel I. 43, p. 237, wird somit ein im Endlichen endliches Integral von (21 b) erhalten

$$(22\,a) \qquad G_n(z) = z^n \left(\frac{1}{z} \cdot \frac{d}{dz}\right)^n \left(G_0(z)\right) = \pi (i)^n \cdot J_n(\vartheta),$$

wenn

$$G_0(z) = \pi J_0(\vartheta)$$

gesetzt wird.

Die Function $L_n(y)$ geht über in die zonale Kugelfunction $P_n(y)$, für welche die Differentialgleichung gilt

$$(21\,c) \qquad \frac{d}{dy}\left((1-y^2)P_n'(y)\right) + n \cdot (n+1) P_n(y) = 0.$$

Die zu $P_n(y)$ complementäre Function $T_n(z)$ hat der Gleichung zu genügen

$$(21\,d) \qquad \frac{1}{z^2}\frac{d}{dz}\left(z^2 \cdot T_n'(z)\right) - T_n(z) \cdot \left(1 + \frac{n \cdot (n+1)}{z^2}\right) = 0.$$

Dieselbe geht durch die Substitution $z = \vartheta i$ in die bei Heine (I. 44 e, p. 240) angegebene über, deren Integrale $\psi_n(\vartheta)$, $\Psi_n(\vartheta)$ sind. Man erhält somit aus Heine's Formeln (44 c, d) ein im Endlichen endliches Integral von (21 d)

$$(22\,b) \qquad T_n(z) = z^n \left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n \left(T_0(z)\right) = (i)^n \cdot \psi_n(\vartheta),$$

wenn

$$T_0(z) = \frac{e^{+z} - e^{-z}}{z} = \psi_0(\vartheta)$$

gesetzt wird, und ein im Punkte $z = 0$ unendliches

$$(22\,c) \qquad \bar{T}_n(z) = z^n \left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n \left(\bar{T}_0(z)\right) = (i)^{n-1} \Psi_n(\vartheta),$$

wenn

$$\bar{T}_0(z) = \frac{e^{+z}}{z} = (i)^{-1} \Psi_n(\vartheta)$$

gesetzt wird.

Die Function $E_n(y)$ endlich geht über in

$$(22\,d) \qquad R_n(y) = (1-y^2) \cdot P_n'(y),$$

welche der aus (21 c) durch Differentiation folgenden Gleichung genügt

$$(21\,e) \qquad R_n''(y) + R_n(y) \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{1-y^2} = 0.$$

Für die zu $R_n(y)$ complementäre Function $S_n(z)$ gilt die Gleichung

$$(21\,f) \qquad S_n''(z) - S_n(z) \cdot \left(\frac{n \cdot (n+1)}{z^2}\right) = 0.$$

Dieselbe besitzt, wie eine Vergleichung mit (21d) lehrt, die beiden Integrale

$$S_n(z) = n \,.\, (n+1) \,.\, z \,.\, T_n(z), \tag{22e}$$

$$\overline{S_n}(z) = n \,.\, (n+1) \,.\, z \,.\, \overline{T_n}(z). \tag{22f}$$

§ 4.

Reihenentwickelungen nach Normalfunctionen.

Im vorigen Abschnitte haben wir particuläre Lösungen der partiellen Differentialgleichungen (17) gefunden, welche den allgemeinsten, innerhalb eines Rotationsellipsoids oder elliptischen Cylinders möglichen, Schwingungszustand von den vorausgesetzten Symmetrieeigenschaften und der durch die Constante p bestimmten Periode und Dämpfung beherrschen. Die Hypothese nun, die wir den Entwickelungen dieses Paragraphen zu Grunde legen wollen, besagt: *Jeder beliebige Schwingungszustand, von bestimmter Periode und Dämpfung, lässt sich als Summe von Normalfunctionen des betreffenden Bereichs darstellen.* Oder, mathematisch formulirt: Jede, den Bedingungen der Eindeutigkeit und Stetigkeit genügende Lösung der Differentialgleichungen (17) lässt sich in eine nach den particulären Lösungen

$$Z_n = B_n(y) \,.\, C_n(x), \quad \sigma_n = L_n(y) \,.\, M_n(x), \quad A_n = E_n(y) \,.\, H_n(x)$$

fortschreitende, gleichmässig convergente Reihe entwickeln*).

Die aufgestellte Hypothese ist ähnlich derjenigen, welche Pockels benutzt und als „Rayleigh'sches Princip" bezeichnet**), ist aber keineswegs mit jener identisch. Dort wird die Constante p für jede einzelne particuläre Lösung aus den Grenzbedingungen bestimmt, und es wird behauptet, dass der allgemeinste, mit den Grenzbedingungen verträgliche Schwingungszustand sich aus solchen particulären Lösungen zusammensetzen lässt. Daraus folgt dann, dass eine solche, nach Normalfunctionen fortschreitende Reihe jedem beliebigen Anfangszustande angepasst werden kann. Hier dagegen ist die den zeitlichen Ablauf bestimmende Constante p für alle Normalfunctionen die gleiche, es ist daher der Anfangszustand nicht mehr willkürlich vorzuschreiben. Dagegen kann der Schwingungszustand an der Grenze des Bereichs willkürlich gegeben sein, nur muss er die gleiche Periode und Dämpfung besitzen und den Stetigkeitsbedingungen Genüge leisten. Daraus folgt,

*) Diese Hypothese hat schon Mathieu (Liouv. Journ. [2] XVII. p. 249—323. 1872) für d. Fall des ell. Cylinders aufgestellt, ohne sie indessen zur Herleitung der Relationen (24) zu verwerthen. Siehe auch Pockels l. c. p. 326—335.

**) Dieses Princip ist später von Poincaré, Rendic. del circ. math. di Palermo, 1894, Tom. 8, bewiesen worden.

dass jede beliebige, im Intervalle $-1 \leqq y \leqq +1$ stetige Function von y, sich in eine, für diese Werthe des Arguments gleichmässig convergente, nach den Functionen $B_{n1}(y)$, $B_{n2}(y)$, $L_n(y)$, $E_n(y)$ fortschreitende Reihe entwickeln lässt, vorausgesetzt nur, dass das Verhalten der Function an den Punkten $y = \pm 1$ dasselbe ist, wie das der Glieder der Entwickelung. Geht man von Ellipsen zu Kreisen über, so gelangt man zu den bekannten Fourier'schen und Kugelfunctionen-Reihen, deren Glieder in den Punkten $y = \pm 1$ dasselbe Verhalten zeigen, wie die Functionen, aus denen sie bei jenem Grenzübergange entstehen. Insbesondere sind daher die Functionen $B_{n1}(y)$, $B_{n2}(y)$, $L_n(y)$, $E_n(y)$ in Reihen entwickelbar, welche nach den Functionen

$$\sin(n \arccos y), \quad \cos(n \arccos y), \quad P_n(y), \quad R_n(y)$$

fortschreiten, und umgekehrt. Diese Reihen convergiren im Intervalle $-1 \leqq y \leqq +1$ gleichmässig, vorausgesetzt, dass die Constanten ε_{n1}, ε_{n2}, λ_n, $\varkappa_n$ den Bedingungen der Eindeutigkeit und Stetigkeit gemäss bestimmt sind. Andererseits kann man theoretisch aus der Bedingung der Convergenz der ersteren Entwickelungen auf die Werthe jener Constanten schliessen, ein Verfahren, das zuerst von Heine*) auf die Functionen des elliptischen Cylinders angewandt und dann von Niven**) auf die Functionen des Rotationsellipsoids ausgedehnt wurde.

Wir wollen nun weiter die Consequenzen der aufgestellten Hypothese verfolgen. Ist, wie wir in diesem Paragraphen voraussetzen, die die Brennpunkte verbindende Strecke ($x = 1$) in dem Bereich enthalten, so behauptet dieselbe: Jede für $y = \pm 1$ sowie für $x = 1$ von der Ordnung $\frac{1}{2}$ verschwindende Lösung von (17a) lässt sich nach Producten $B_{n1}(y) \cdot C_{n1}(x)$, jede daselbst endliche nach Producten $B_{n2}(y) \cdot C_{n2}(x)$ entwickeln; ferner lässt sich jede in diesen Punkten endliche Lösung von (17b) nach Producten $L_n(y) \cdot M_n(x)$, jede von der ersten Ordnung verschwindende von (17c) nach Producten $E_n(y) \cdot H_n(x)$ entwickeln. Die einfachsten derartigen Lösungen sind nun die folgenden.

$$Z_1 = e^{pxy} \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2}, \quad Z_2 = e^{pxy}, \quad \sigma = e^{pxy},$$
$$A = e^{pxy} \cdot (1-x^2)(1-y^2).$$

Sie entsprechen, wie man aus (16a) erkennt, in Richtung der grossen Axen der Ellipsen fortschreitenden Wellenzügen. Es müssen also die folgenden Entwickelungen möglich sein

---

*) Heine, Handbuch I, p. 404—413.

**) Niven, l. c. p. 133—135.

$$
\begin{aligned}
e^{pxy} \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n1} \cdot B_{n1}(y) \cdot C_{n1}(x), \\
e^{pxy} &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n2} \cdot B_{n2}(y) \cdot C_{n2}(x), \\
e^{pxy} &= \sum_{n=0}^{\infty} m_n \cdot L_n(y) \cdot M_n(x), \\
e^{pxy} \cdot (1-x^2)(1-y^2) &= \sum_{n=1}^{\infty} h_n \cdot E_n(y) \cdot H_n(x).
\end{aligned} \tag{23}
$$

Wir multipliciren diese Gleichungen mit

$$\frac{B_{n1}(y)}{\sqrt{1-y^2}}, \quad \frac{B_{n2}(y)}{\sqrt{1-y^2}}, \quad L_n(y), \quad \frac{E_n(y)}{1-y^2}$$

und integriren von $y = -1$ bis $y = +1$. Dann fallen, den Orthogonalitätseigenschaften (20) zufolge, alle Glieder fort, mit Ausnahme des n^{ten}. Setzen wir endlich der Kürze wegen

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{c_{n1}} &= \int_{-1}^{+1} B_{n1}^2(y) \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}, & \frac{1}{c_{n2}} &= \int_{-1}^{+1} B_{n2}^2(y) \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}, \\
\frac{1}{m_n} &= \int_{-1}^{+1} L_n^2(y)\, dy, & \frac{1}{h_n} &= \int_{-1}^{+1} E_n^2(y) \frac{dy}{1-y^2},
\end{aligned}
$$

was nur eine specielle Wahl der in den Functionen $C_{n1}(x)$, $C_{n2}(x)$, $M_n(x)$, $H_n(x)$ willkürlichen, multiplicativen Constanten bedeutet, so erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\frac{C_{n1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} &= \int_{-1}^{+1} e^{pxy} \cdot B_{n1}(y) \cdot dy, \\
C_{n2}(x) &= \int_{-1}^{+1} e^{pxy} \cdot \frac{B_{n2}(y)}{\sqrt{1-y^2}} \cdot dy, \\
M_n(x) &= \int_{-1}^{+1} e^{pxy} \cdot L_n(y)\, dy, \\
\frac{H_n(x)}{1-x^2} &= \int_{-1}^{+1} e^{pxy} \cdot E_n(y)\, dy.
\end{aligned} \tag{24}
$$

Die in den Gleichungen (24) enthaltenen Eigenschaften der Integrale der Differentialgleichungen (19) sind meines Wissens bisher nicht bekannt gewesen. Gehen wir indessen von Ellipsen zu Kreisen über, so gelangen wir zu bekannten Formeln

$$(25\,a)\quad \lim_{p=0}\left(C_{n1}(x)\cdot\frac{ip}{n}\right)=G_n(z)=\frac{z}{n}\int_{-1}^{+1}e^{zy}\,.\,\sin\,(n\,\text{arc cos}\,y)\,dy,$$

$$(25\,b)\quad \lim_{p=0}C_{n2}(x)\qquad =G_n(z)=\int_{-1}^{+1}e^{zy}\,.\,\cos\,(n\,\text{arc cos}\,y)\,\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

$$(25\,c)\quad \lim_{p=0}M_n(x)\qquad =T_n(z)=\int_{-1}^{+1}e^{zy}\,.\,P_n(y)\,dy,$$

$$(25\,d)\quad \lim_{p=0}H_n(x).(-p^2)=S_n(z)=z^2\,.\int_{-1}^{+1}e^{zy}\,.\,R_n(y)\,dy.$$

(25a) reducirt sich durch partielle Integration auf (25b), ebenso (25d) auf (25c), mit Rücksicht auf (22d, e) und (21c). Die Gleichungen (25b, c) aber sind mit Heine's Formeln I. 43a (p. 237) und 44e (p. 241) identisch, wie man erkennt, wenn man nach (22a, b) unsere Bezeichnungsweise auf die Heine'sche zurückführt. Jene Formeln folgen aus der bekannten Thatsache, die sich hier als Specialfall unseres Princips darstellt, dass bei der Entwickelung der Exponentialfunction $e^{i\vartheta\cos\varphi}$ nach Fourier'schen Reihen die Bessel'schen Functionen $J_n(\vartheta)$, bei der Entwickelung nach Kugelfunctionen die Functionen $\psi_n(\vartheta)$ auftreten*).

Wir werden im nächsten Paragraphen die Formeln (24), von den Differentialgleichungen (19) ausgehend, verificiren, und ziehen zunächst weitere Folgerungen aus denselben. Wir nehmen an, wir hätten die oben erwähnten, im Intervalle $-1\leqq y\leqq+1$ gleichmässig convergenten Entwickelungen gefunden

$$(26)\qquad \begin{aligned} B_{n1}(y)&=\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_{\nu1}\,.\,\sin\,(\nu\,.\,\text{arc cos}\,y),\\ B_{n2}(y)&=\sum_{\nu=0}^{\infty}\beta_{\nu2}\,.\,\cos\,(\nu\,.\,\text{arc cos}\,y),\\ L_n(y)&=\sum_{\nu=0}^{\infty}\gamma_\nu\,.\,P_\nu(y),\\ E_n(y)&=\sum_{\nu=1}^{\infty}\delta_\nu\,.\,R_\nu(y). \end{aligned}$$

Wir setzen diese Reihen in (24) ein und integriren gliedweise. Dann erhalten wir, mit Rücksicht auf (25), für die complementären Functionen die gleichmässig convergenten Entwickelungen

*) Heine I, Formel 14, 14b (p. 82).

$$
\begin{aligned}
&\frac{C_{n1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_{\nu 1} \cdot \nu \cdot \frac{G_\nu(s)}{s}, \qquad (s = px)\\
&C_{n2}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_{\nu 2} \cdot G_\nu(s),\\
&M_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu \cdot T_\nu(s),\\
&\frac{H_n(x)}{1-x^2} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \delta_\nu \cdot \frac{S_\nu(s)}{s^2}.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Wir können also den folgenden Satz aufstellen: *Haben wir die Constanten in den Differentialgleichungen* (19) *den Bedingungen der Eindeutigkeit und Stetigkeit gemäss so bestimmt, dass gleichmässig convergente Entwickelungen von der Form* (26) *nach den beim Uebergang von Ellipsen zu Kreisen auftretenden Functionen im Intervalle* $-1 \leqq y \leqq +1$ *möglich sind, so sind auch die complementären Functionen in Reihen entwickelbar, die, nach den bei demselben Grenzübergange aus ihnen entstehenden Functionen fortschreitend, für beliebige, endliche Werthe des Arguments gleichmässig convergiren, und zwar treten in beiden Entwickelungen dieselben Coefficienten auf.* Für die Functionen B_{n2} des elliptischen Cylinders ist dieser Satz von Heine*) auf anderem Wege gefunden worden.

Die durch (24) bestimmten Functionen $C_{n1}(x)$, $C_{n2}(x)$, $M_n(x)$, $H_n(x)$ sind von den Functionen $B_{n1}(x)$, $B_{n2}(x)$, $L_n(x)$, $E_n(x)$ nur durch eine multiplicative Constante unterschieden, da sie derselben Differentialgleichung genügen und für $x = \pm 1$ dasselbe Verhalten zeigen, wie jene. Unsere Resultate gewähren daher die Möglichkeit, diese Functionen für beliebig grosse Werthe des Arguments zu bestimmen, wenn wir sie im Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$ kennen. Im folgenden Abschnitte werden wir noch andere Darstellungen der Integrale für grosse Werthe des Arguments kennen lernen.

§ 5.

Verhalten der Integrale für grosse Werthe des Arguments.

Wir werden in diesem Abschnitte das Verhalten der Integrale in der Nähe des unendlich fernen Punktes untersuchen, der für unsere Differentialgleichungen eine Unbestimmtheitsstelle ist. Poincaré hat die Theorie einer Classe von Differentialgleichungen, zu der auch die

*) Heine, Handbuch, I, p. 414.

unsrigen gehören, begründet*), indem er nachwies, dass gewisse divergente Reihen, welche den Differentialgleichungen formal genügen, für grosse Werthe des Arguments die Integrale asymptotisch darstellen. Seine Resultate sind in neuester Zeit von Kneser**) und Horn***) ergänzt worden. In unserem Falle lehren diese Untersuchungen, dass es zwei particuläre Integrale giebt, die sich mit wachsendem Argumente x asymptotisch den Functionen $e^{+px} \cdot x^k$ und $e^{-px} \cdot x^k$ nähern. Mit $e^{-\vartheta ct}$ multiplicirt ergeben diese Integrale Lösungen der Wellengleichung, die sich mit wachsender Entfernung vom Schwingungscentrum den Functionen $e^{-\vartheta(ct-fx)} \cdot x^k$ beziehungsweise $e^{-\vartheta(ct+fx)} \cdot x^k$ nähern, sie entsprechen somit Wellen, die vom Centrum fort, beziehungsweise zu ihm hin eilen. Die stets endliche Constante k giebt an, mit welcher Potenz der Entfernung die Amplitude abnimmt. Die Existenz solcher Lösungen ist auch aus physikalischen Gründen evident. Poincaré hat die erwähnte asymptotische Darstellung mit Hilfe der Laplace'schen Transformation abgeleitet. *Die Ergebnisse des vorigen Paragraphen ermöglichen es* nun in unserem Falle, *jedesmal eine mit der Laplace'schen verwandte Transformation anzugeben, derart, dass die transformirte Differentialgleichung mit der ursprünglichen identisch ist.* Diese Eigenschaft unserer Differentialgleichungen gestattet es, nicht nur, die Werthe zu ermitteln, welche die Integrale annehmen, wenn das Argument sich der Unbestimmtheitsstelle nähert, sondern auch, sie in Beziehung zu setzen zu den Werthen, welche die Integrale in der Umgebung der beiden im Endlichen gelegenen singulären Punkte besitzen. Wir beginnen damit, die Resultate des vorigen Paragraphen, von den Differentialgleichungen ausgehend, zu beweisen, und andere particuläre Integrale durch andere Wahl der Integrationsgrenzen abzuleiten. Wir beschränken uns dabei auf reelle Argumente und nehmen ferner den reellen Theil der Constante p als wesentlich positiv an.

Wir fassen zunächst die drei zu untersuchenden Differentialgleichungen (19) in eine einzige zusammen.

$$(28)\quad \varphi(v,y) \equiv (1-y^2)v''(y) + 2(\nu-1)v'(y) + \nu(y)\left(\varepsilon - p^2(1-y^2)\right) = 0.$$

Die hier mit ε bezeichnete Constante war so bestimmt worden, dass es ein Integral giebt, welches für $y = \pm 1$ von der ν^{ten} Ordnung verschwindet. Dieses Integral hatten wir für $\nu = 0$ $L_n(y)$, für $\nu = \frac{1}{2}$ $B_{n1}(y)$, für $\nu = 1$ $E_n(y)$ genannt. Wir nennen es allgemein $v(y)$ und setzen

*) Poincaré, American Journal of Math. Bd, 7 und Acta Math. Bd. 8, siehe auch: Picard, „Traité d'Analyse" Bd. III, Cap. 14.

**) Kneser, Crelle's Journal Bd. 116, 117 und Math. Ann. Bd. 49.

***) Horn, Crelle's Journal Bd. 118.

$$\frac{w(x)}{(1-x^2)^\nu} = \int_\alpha^\beta e^{px\eta} \cdot v(y)\, dy. \tag{28a}$$

Wir setzen die Function $w(x)$ in die linke Seite der Differentialgleichung $\varphi(w, x) = 0$ ein, und erhalten nach einigen Umformungen

$$\frac{\varphi(w, x)}{(1-x^2)^\nu} = \int_\alpha^\beta e^{px\eta} \varphi(v, y)\, dy + \psi(\beta) - \psi(\alpha), \tag{29}$$

$$\psi(y) = (1-y^2)\left(px v(y) - v'(y)\right) e^{px\eta} - 2\nu y \cdot v(y) e^{px\eta}.$$

Da nun $v(y)$ der Differentialgleichung (28) genügt, so verschwindet das Integral auf der rechten Seite von (29). Für $y = \pm 1$ verschwindet das erste Glied von $\psi(y)$ für beliebige, endliche Werthe von x, es verschwindet auch das zweite, und zwar für $\nu = \frac{1}{2}$ und $\nu = 1$, weil es den von der ν^{ten} Ordnung verschwindenden Factor $v(\pm 1)$, für $\nu = 0$, weil es den Factor ν enthält. Ferner verschwindet $\psi(y)$ für $y = -\infty$, falls $x > 1$. Denn da $v(y)$ höchstens unendlich wird, wie $e^{-py} \cdot y^k$, so ist

$$\lim_{y=-\infty} \psi(y) = -px \cdot \lim_{y=-\infty} e^{py(x-1)} \cdot y^{k+2}.$$

Da nun k eine endliche Zahl und der reelle Theil von p positiv ist, so wird

$$\lim_{y=-\infty} \psi(y) = 0 \quad \text{für} \quad x > 1.$$

Somit erhält man ein für beliebige, endliche x gültiges Integral der Differentialgleichung $\varphi(w, x) = 0$

$$w(x) = (1-x^2)^\nu \cdot \int_{-1}^{+1} e^{px\eta} v(y)\, dy, \tag{29a}$$

und ein für $x > 1$ gültiges

$$\bar{w}(x) = (1-x^2)^\nu \cdot \int_{-\infty}^{+1} e^{px\eta} \cdot v(y)\, dy. \tag{29b}$$

Gleichung (29a) enthält (24, a, c, d) als specielle Fälle. Um auch (24b) zu erhalten, setzen wir

$$w(x) = \int_\alpha^\beta e^{px\eta} \cdot \frac{v(y)}{(1-y^2)^\nu} \cdot dy, \tag{30}$$

wo nunmehr $v(y)$ ein für $\nu = 0$, $\nu = \frac{1}{2}$ in den Punkten $y = \pm 1$ endliches, für $\nu = 1$ ein daselbst von der ersten Ordnung verschwindendes Integral von (28) darstellt. Es ergiebt sich

$$(30a) \qquad \varphi(w, x) = \int_{\alpha}^{\beta} e^{pxy} \cdot \frac{\varphi(v, y)}{(1-y^2)^{\nu}}\, dy + \chi(\beta) - \chi(a).$$

$$\chi(y) = \frac{e^{pxy}}{(1-y^2)^{\nu-1}} \cdot \left(px \cdot v(y) - v'(y)\right).$$

Durch ähnliche Ueberlegungen, wie oben, erkennt man, dass $\lim_{y=-\infty} \chi(y)$ verschwindet für $x > 1$, und dass bei beliebigem, endlichem x $\chi(\pm 1)$ verschwindet für $\nu = 0$, $\nu = \frac{1}{2}$, während für $\nu = 1$ dieses nicht stattfindet. Die für $\nu = 0$ aus (30a) abzuleitenden Beziehungen sind mit den aus (29a, b) folgenden identisch. Für $\nu = \frac{1}{2}$ wird $v(y) = B_{n2}(y)$, man erhält somit ein für beliebige, endliche x gültiges Integral der Differentialgleichung $\varphi(w, x) = 0$

$$(30b) \qquad C_{n2}(x) = \int_{-1}^{+1} e^{pxy} \cdot \frac{B_{n2}(y)}{\sqrt{1-y^2}} \cdot dy,$$

und ein für $x > 1$ gültiges

$$(30c) \qquad \bar{C}_{n2}(x) = \int_{-\infty}^{+1} e^{pxy} \cdot \frac{B_{n2}(y)}{\sqrt{1-y^2}}\, dy.$$

Die durch (29a), (30b) gegebenen Integrale zeigen in den Punkten $x = \pm 1$ dasselbe Verhalten, wie die unter dem Integralzeichen stehenden Lösungen derselben Differentialgleichung, sie sind also bis auf eine endliche, multiplicative Constante mit jenen identisch. Wir erhalten also die im *Endlichen endlichen Integrale* von (19, b, d, f)

$$(31) \qquad \begin{aligned} C_{n1}(x) &= b_{n1} \cdot B_{n1}(x) = \sqrt{1-x^2} \cdot \int_{-1}^{+1} e^{pxy} \cdot B_{n1}(y)\, dy, \\ C_{n2}(x) &= b_{n2} \cdot B_{n2}(x) = \int_{-1}^{+1} e^{pxy} \cdot \frac{B_{n2}(y)}{\sqrt{1-y^2}} \cdot dy, \\ M_n(x) &= l_n \cdot L_n(x) = \int_{-1}^{+1} e^{pxy} \cdot L_n(y)\, dy, \\ H_n(x) &= e_n \cdot E_n(x) = (1-x^2) \cdot \int_{-1}^{+1} e^{pxy} \cdot E_n(y)\, dy, \end{aligned}$$

und *die für $x > 1$ gültigen Integrale*, die, wie wir unten sehen werden, vom Schwingungscentrum fortlaufenden Wellen entsprechen

$$
\begin{aligned}
\bar{C}_{n1}(x) &= \sqrt{1-x^2} \cdot \int_{-\infty}^{+1} e^{pxy} \cdot B_{n1}(y)\, dy, \\
\bar{C}_{n2}(x) &= \int_{-\infty}^{+1} e^{pxy} \cdot \frac{B_{n2}(y)}{\sqrt{1-y^2}} \cdot dy, \\
\bar{M}_n(x) &= \int_{-\infty}^{+1} e^{pxy} \cdot L_n(y)\, dy, \\
\bar{H}_n(x) &= (1-x^2) \int_{-\infty}^{+1} e^{pxy} \cdot E_n(y)\, dy.
\end{aligned} \tag{32}
$$

Aus den mit den Gleichungen (31) identischen Gleichungen (24) leiteten wir die Formeln (25) für die im Endlichen endlichen Integrale der beim Uebergang von Ellipsen zu Kreisen aus den Differentialgleichungen (19 b, d, f) entstehenden Differentialgleichungen (21, b, d, f) ab. Aus (32) können wir eine analoge Darstellung der divergenten Wellen entsprechenden Integrale von (21, b, d, f) gewinnen

$$
\begin{aligned}
\bar{G}_n(z) &= \frac{z}{n} \cdot \int_{-\infty}^{+1} e^{zy} \sin(n \arccos y)\, dy, \\
\bar{G}_n(z) &= \int_{-\infty}^{+1} e^{zy} \cos(n \arccos y) \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}, \\
\bar{T}_n(z) &= \int_{-\infty}^{+1} e^{zy} P_n(y)\, dy, \\
\bar{S}_n(z) &= z^2 \cdot \int_{-\infty}^{+1} e^{zy} R_n(y)\, dy.
\end{aligned} \tag{33}
$$

Die Gleichungen (32) sind für die Bestimmung der auf der linken Seite stehenden Integrale nur dann verwendbar, wenn die unter dem Integralzeichen stehenden Functionen im Intervalle $-\infty < y \leqq +1$ bekannt sind. Dieses ist zunächst nicht der Fall, indessen werden durch die Gleichungen (31) die Werthe in jenem Intervalle zurückgeführt auf die im Intervalle $-1 \leqq y \leqq \pm 1$ geltenden. Wir setzen demnach die durch (31) gegebenen Ausdrücke in die rechten Seiten der Gleichungen (32) ein und erhalten

$$
\begin{aligned}
b_{n1}\cdot \bar{C}_{n1}(x) &= \sqrt{1-x^2}\cdot \int_{-\infty}^{+1} e^{pxy}\sqrt{1-y^2}\,dy \int_{-1}^{+1} e^{pya} B_{n1}(\alpha)\,d\alpha,\\
b_{n2}\cdot \bar{C}_{n2}(x) &= \int_{-\infty}^{+1} e^{pxy}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \int_{-1}^{+1} e^{pya}\frac{B_{n2}(\alpha)}{\sqrt{1-\alpha^2}}\,d\alpha,\\
l_n\cdot \bar{M}_n(x) &= \int_{-\infty}^{+1} e^{pxy}\,dy \int_{-1}^{+1} e^{pya} L_n(\alpha)\,d\alpha,\\
e_n\cdot \bar{H}_n(x) &= (1-x^2)\cdot \int_{-\infty}^{+1} e^{pxy}(1-y^2)\,dy \cdot \int_{-1}^{+1} e^{pya} E_n(\alpha)\,d\alpha.
\end{aligned}
\tag{34}
$$

Durch Vertauschung der Integrationsordnung folgt hieraus

$$
\begin{aligned}
b_{n1}\cdot \bar{C}_{n1}(x) &= \sqrt{1-x^2}\cdot \int_{-1}^{+1} d\alpha\cdot B_{n1}(\alpha)\cdot \int_{-\infty}^{+1} e^{py(x+\alpha)}\cdot\sqrt{1-y^2}\,dy,\\
b_{n2}\cdot \bar{C}_{n2}(x) &= \int_{-1}^{+1} d\alpha\cdot\frac{B_{n2}(\alpha)}{\sqrt{1-\alpha^2}}\cdot \int_{-\infty}^{+1} e^{py(x+\alpha)}\cdot\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}},\\
l_n\cdot \bar{M}_n(x) &= \int_{-1}^{+1} d\alpha\cdot L_n(\alpha) \int_{-\infty}^{+1} e^{py(x+\alpha)}\,dy,\\
e_n\cdot \bar{H}_n(x) &= (1-x^2)\cdot \int_{-1}^{+1} d\alpha\; E_n(\alpha) \int_{-\infty}^{+1} e^{py(x+\alpha)}(1-y^2)\,dy.
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Setzen wir $p(x+\alpha)=\xi$, so können wir diese, für $x>1$ gültigen, Gleichungen mit Rücksicht auf (33) schreiben

$$
\begin{aligned}
b_{n1}\cdot \bar{C}_{n1}(x) &= \sqrt{1-x^2}\cdot \int_{-1}^{+1} d\alpha\cdot B_{n1}(\alpha)\cdot\frac{\bar{G}_1(\xi)}{\xi},\\
b_{n2}\cdot \bar{C}_{n2}(x) &= \int_{-1}^{+1} d\alpha\cdot\frac{B_{n2}(\alpha)}{\sqrt{1-\alpha^2}}\cdot \bar{G}_0(\xi),\\
l_n\cdot \bar{M}_n(x) &= \int_{-1}^{+1} d\alpha\cdot L_n(\alpha)\cdot \bar{T}_0(\xi),\\
e_n\cdot \bar{H}_n(x) &= (1-x^2)\cdot \int_{-1}^{+1} d\alpha\cdot E_n(\alpha)\cdot\frac{\bar{S}_1(\xi)}{\xi^2}.
\end{aligned}
\tag{36}
$$

Durch analoge Operationen erhält man für die im Endlichen endlichen Integrale mit Rücksicht auf (25) die für alle reellen Werthe von x gültige Darstellung

$$b_{n1} \cdot C_{n1}(x) = b_{n1}^2 \cdot B_{n1}(x) = \sqrt{1-x^2} \cdot \int_{-1}^{+1} d\alpha \cdot B_{n1}(\alpha) \cdot \frac{G_1(\zeta)}{\zeta},$$

$$b_{n2} \cdot C_{n2}(x) = b_{n2}^2 \cdot B_{n2}(x) = \int_{-1}^{+1} d\alpha \cdot \frac{B_{n2}(\alpha)}{\sqrt{1-\alpha^2}} \cdot G_0(\zeta),$$

(37)

$$l_n \cdot M_n(x) = l_n^2 \cdot L_n(x) = \int_{-1}^{+1} d\alpha \cdot L_n(\alpha) \cdot T_0(\zeta),$$

$$e_n \cdot H_n(x) = e_n^2 \cdot E_n(x) = (1-x^2) \cdot \int_{-1}^{+1} d\alpha \cdot E_n(\alpha) \cdot \frac{S_1(\zeta)}{\zeta^2}.$$

Die Beziehungen (36), (37) bieten die Möglichkeit, die asymptotischen Darstellungen der Integrale für grosse Werthe des Arguments abzuleiten. Wir begnügen uns damit, das erste Glied der Entwickelung anzugeben, da man die weiteren alsdann leicht berechnen kann, indem man formal der Differentialgleichung zu genügen sucht. Nun erkennt man aus (22a) mit Hilfe der bekannten semiconvergenten Entwickelung der Bessel'schen Function, dass für grosse ζ wird

$$G_0(\zeta) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{e^{+\zeta}}{\sqrt{\zeta}} - \frac{e^{-\zeta}}{\sqrt{-\zeta}} \right), \quad \bar{G}_0(\zeta) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{e^{+\zeta}}{\sqrt{\zeta}};$$

somit wird für grosse ζ nach (22a)

$$G_1(\zeta) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{e^{+\zeta}}{\sqrt{\zeta}} + \frac{e^{+\zeta}}{\sqrt{-\zeta}} \right), \quad \bar{G}_1(\zeta) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{e^{+\zeta}}{\sqrt{\zeta}}.$$

Ferner ist nach (22b, c)

$$T_0(\zeta) = \frac{e^{+\zeta}}{\zeta} - \frac{e^{-\zeta}}{\zeta}, \quad \bar{T}_0(\zeta) = \frac{e^{+\zeta}}{\zeta}.$$

Nach (22b, c, e, f) wird daher für grosse ζ

$$S_1(\zeta) = 2\zeta T_0'(\zeta) = 2(e^{+\zeta} + e^{-\zeta}), \qquad \bar{S}_1(\zeta) = 2 \cdot e^{+\zeta}.$$

Da ferner $\zeta = p(x+\alpha)$ war, und α im Intervalle $-1 \leqq \alpha \leqq +1$ liegt, so erkennt man, dass die durch (36) bestimmten Integrale sich mit wachsendem x asymptotisch den Werthen nähern

$$b_{n1} \cdot \frac{\bar{C}_{n1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{e^{+px}}{\sqrt{(px)^3}} \cdot \int_{-1}^{+1} e^{p\alpha} \; B_{n1}(\alpha)\, d\alpha,$$

$$b_{n2} \cdot \bar{C}_{n2}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{e^{+px}}{\sqrt{px}} \cdot \int_{-1}^{+1} e^{p\alpha} \cdot \frac{B_{n2}(\alpha)}{\sqrt{1-\alpha^2}}\, d\alpha,$$

$$l_n \cdot \bar{M}_n(x) = \frac{e^{px}}{px} \cdot \int_{-1}^{+1} e^{p\alpha} \cdot L_n(\alpha)\, d\alpha,$$

$$e_n \cdot \frac{\bar{H}_n(x)}{1-x^2} = \frac{2 \cdot e^{+px}}{(px)^2} \cdot \int_{-1}^{+1} e^{p\alpha} \cdot E_n(\alpha)\, d\alpha.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{B_{n1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \mathfrak{B}_{n1}(x),$$

so erhält man mit Rücksicht auf (31) für grosse x

$$(38) \qquad \begin{aligned} \frac{\bar{C}_{n1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{e^{+px}}{\sqrt{(px)^3}} \cdot \mathfrak{B}_{n1}(+1), \\ \bar{C}_{n2}(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{e^{+px}}{\sqrt{px}} \cdot B_{n2}(+1), \\ \bar{M}_n(x) &= \frac{e^{+px}}{px} \cdot L_n(+1), \\ \bar{H}_n(x) &= \frac{e^{+px}}{p^2} \cdot E_n'(+1). \end{aligned}$$

Die durch (32), (36) *bestimmten Integrale ergeben somit Lösungen der Wellengleichung, die vom Centrum forteilenden Wellen entsprechen.* In derselben Weise*) erhält man aus (37) als asymptotischen Ausdruck der im Endlichen endlichen Integrale

$$(39) \qquad \begin{aligned} b_{n1} \cdot \mathfrak{B}_{n1}(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{e^{+px}}{px \cdot \sqrt{px}} \cdot \mathfrak{B}_{n1}(+1) + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{e^{-px}}{px \cdot \sqrt{-px}} \cdot \mathfrak{B}_{n1}(-1), \\ b_{n2} \cdot B_{n2}(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{e^{+px}}{\sqrt{px}} \cdot B_{n2}(+1) - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{e^{-px}}{\sqrt{-px}} \cdot B_{n2}(1), \\ l_n \cdot L_n(x) &= \frac{e^{+px}}{px} \cdot L_n(+1) + \frac{e^{-px}}{-px} \cdot L_n(-1), \\ e_n \cdot E_n(x) &= \frac{e^{+px}}{p^2} \cdot E_n'(1) - \frac{e^{-px}}{p^2} \cdot E_n'(-1). \end{aligned}$$

*) Die Ableitung der beiden ersten Formeln (39) setzt voraus, dass der reelle Theil der Constanten $\frac{p}{i}$ positiv ist.

Die durch (31), (37) bestimmten Integrale entsprechen Wellensystemen, die sich aus nach innen und nach aussen fortschreitenden Wellen derart zusammensetzen, dass der Wellenvector auf der die Brennpunkte verbindenden Strecke ($x = 1$) endlich bleibt. *Sie ergeben die Lösung der Wellengleichung für das Innere von Rotationsellipsoiden und elliptischen Cylindern. Die durch* (32), (36) *bestimmten*, mit Ausschluss der die Brennpunkte verbindenden Strecke ($x = 1$) gültigen *Integrale ergeben die Lösung der Wellengleichung für das Aeussere von Rotationsellipsoiden und elliptischen Cylindern, falls in grosser Entfernung nur vom Centrum forteilende Wellen vorhanden sind.* Die Werthe, welche diese Lösungen an der Grenze sehr gestreckter Rotationsellipsoide oder elliptischer Cylinder, d. h. für kleine Werthe von ($x-1$) annehmen, lassen sich mit Hilfe der Gleichungen (36) ermitteln. *Die gefundenen Eigenschaften unserer Differentialgleichungen ermöglichen es daher insbesondere, Probleme in Angriff zu nehmen, welche die, durch Ausstrahlung gedämpften, Schwingungen sehr gestreckter Rotationsellipsoide betreffen.* Derartige Probleme sind hauptsächlich auf electrodynamischem Gebiete von Interesse, da man sich zur Erregung und Fortleitung electrischer Wellen zweckmässig sehr gestreckter Leiter bedient. Eine Anwendung auf die Theorie der, um einen stabförmigen Hertz'schen Erreger stattfindenden, electromagnetischen Schwingungen habe ich in „Wiedemanns Annalen" veröffentlicht*).

Zum Schlusse wollen wir auf die Bedeutung hinweisen, die den Gleichungen (36), (37) im Sinne des im vorigen Abschnitte benutzten Princips zukommt. Diese Gleichungen sind nämlich identisch mit denjenigen, welche aus dem Bestehen der folgenden Entwickelungen sich ergeben:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\bar{G}_1(px+py)}{px+py} = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n1}\cdot c_{n1}\cdot \frac{B_{n1}(y)}{\sqrt{1-y^2}}\cdot\frac{\bar{C}_{n1}(x)}{\sqrt{1-x^2}},\\
&\bar{G}_0(px+py) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n2}\cdot c_{n2}\cdot B_{n2}(y)\cdot \bar{C}_{n2}(x),\\
&\bar{T}_0(px+py) = \sum_{n=0}^{\infty} l_n\cdot m_n\cdot L_n(y)\cdot \bar{M}_n(x).\\
&\frac{\bar{S}_1(px+py)}{(px+py)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} e_n\cdot h_n\cdot\frac{E_n(y)}{1-y^2}\cdot\frac{\bar{H}_n(x)}{1-x^2};
\end{aligned}
\tag{40}
$$

*) Wied. Ann. Bd. 66, p. 435—472. 1898.

$$
\begin{aligned}
&\frac{G_1(px+py)}{px+py} = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n1}\cdot c_{n1}\cdot \frac{B_{n1}(y)}{\sqrt{1-y^2}}\cdot\frac{C_{n1}(x)}{\sqrt{1-x^2}},\\
&G_0(px+py) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n2}\cdot c_{n2}\cdot B_{n2}(y)\cdot C_{n2}(x),\\
&T_0(px+py) = \sum_{n=0}^{\infty} l_n\cdot m_n\cdot L_n(y)\cdot M_n(x),\\
&\frac{S_1(px+py)}{(px+py)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} e_n\cdot h_n\cdot\frac{E_n(y)}{1-y^2}\cdot\frac{H_n(x)}{1-x^2}.
\end{aligned}
\tag{41}
$$

Man erkennt dieses mit Hilfe derselben Ueberlegungen, durch die wir die Integraldarstellungen (24) aus den Reihen (23) ableiteten. Dort waren es in Richtung der grossen Axe der Ellipsen fortschreitende Wellenzüge, die wir nach den, auf der Verbindungslinie der Brennpunkte endlichen, Normalfunctionen entwickelten. Hier sind es Wellen, deren Centrum sich im Brennpunkte $x = 1$, $y = -1$ befindet; denn, da $|fx|$, $|fy|$ die grossen Halbaxen der Ellipse und Hyperbel bestimmten, die sich in dem betreffenden Punkte schneiden, so giebt $(fx+fy)$ die Entfernung von jenem Brennpunkte an; derselbe ist für die Wellen ein Erregungspunkt einfachster Art. *Die Gleichungen* (41) *stellen eine Entwickelung eines im Erregungspunkte stetigen Wellensystems nach den Particulärlösungen der Wellengleichung für das Innere eines Rotationsellipsoids oder elliptischen Cylinders dar, die Gleichungen* (40) *eine Entwickelung eines vom Erregungspunkte ausgesandten Wellenzuges nach den forteilenden Wellen entsprechenden Particulärlösungen für das Aeussere dieser Flächen.* Jenes Princip führt also direct zu Gleichungen von der Form (36), (37), wie es überhaupt für die Ermittelung der charakteristischen Eigenschaften der bei Schwingungsproblemen auftretenden gewöhnlichen Differentialgleichungen von heuristischem Werthe sein dürfte.

Ueber die verschiedenen Wurzeln einer algebraischen Gleichung und deren Ordnungen.

Von

L. Baur in Darmstadt.

I.

Es sei

$$F(y) = a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \tag{1}$$

eine beliebige Gleichung n^{ten} Grades mit constanten Coefficienten, s_λ die Summe der λ^{ten} Potenzen ihrer Wurzeln und $D_1, D_2, \ldots, D_n$ die n aus der Determinante

$$|s_{h+i}| = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-2} \end{vmatrix} \quad (h, i = 0, 1, 2, \ldots, n-1) \tag{2}$$

gemäss des durch die Striche angedeuteten Schemas zu bildenden Hauptunterdeterminanten. Ein früher von mir bewiesener Satz kann dann für den jetzigen Zweck folgendermassen ausgesprochen werden:

Die vorliegende Gleichung besitzt immer dann und nur dann genau ϱ von einander verschiedene Wurzeln $y', y'', \ldots, y^{(\varrho)}$, wenn D_ϱ die letzte nicht verschwindende Hauptunterdeterminante aus der Reihe $D_1, D_2, \ldots, D_n$ ist und diese ϱ verschiedenen Wurzeln werden alsdann geliefert durch die Gleichung

$$B_\varrho(y) = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{\varrho-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_\varrho & y \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ s_{\varrho-1} & s_\varrho & \cdots & s_{2\varrho-2} & y^{\varrho-1} \\ s_\varrho & s_{\varrho+1} & \cdots & s_{2\varrho-1} & y^\varrho \end{vmatrix} = D_\varrho y^\varrho + \cdots = 0 \text{*}). \tag{3}$$

*) Vergl. meine Note im 50. Bd. dieser Annalen. Durch ein Versehen ist dort in der letzten Zeile dieser Determinante $s_{2\varrho-2}$ an Stelle von $s_{2\varrho-1}$ gesetzt worden. S. a. H. Weber, Algebra, 2. Aufl., I, S. 171.

Die Gleichung $B_\varrho(y) = 0$ bezeichne ich als die zur Gleichung $F(y) = 0$ gehörige „*Stammgleichung*“. Ihre Coefficienten sind rationale Funktionen der ursprünglichen Gleichungscoefficienten und aus ihrer Bedeutung folgt, das ihre Discriminante, die mit $\Delta(B_\varrho)$ oder auch kurz mit Δ bezeichnet werden möge, nicht verschwinden kann: eine Bemerkung, die sich leicht verificiren lässt. Es besitze nämlich $y^{(\alpha)}$ als Wurzel der ursprünglichen Gleichung die Ordnung λ_α. Componirt man dann beide Seiten der Identität

$$\left| y^{(\alpha)k} \right| = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_\varrho} \left| \lambda_\alpha y^{(\alpha)k} \right| \quad \begin{pmatrix} k = 0, 1, \dots, \varrho - 1 \\ \alpha = 1, 2, \dots, \varrho \end{pmatrix}$$

mit

$$\left| y^{(\alpha)k} \right| \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 1, 2, \dots, \varrho \\ k = 0, 1, \dots, \varrho - 1 \end{pmatrix}$$

und bezeichnet die *Summe der α^{ten} Potenzen der verschiedenen Wurzeln durch σ_α*, so erhält man die Gleichung

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} \sigma_0 & \sigma_1 & \dots & \sigma_{\varrho-1} \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_\varrho \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{\varrho-1} & \sigma_\varrho & \dots & \sigma_{2\varrho-2} \end{vmatrix} = \frac{D_\varrho}{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_\varrho},$$

mithin ist wegen (3)

$$(5) \qquad \Delta(B_\varrho) = \frac{D_\varrho^{2\varrho-1}}{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_\varrho} \text{*)},$$

so dass thatsächlich $\Delta(B_\varrho)$ nicht verschwindet.

Es folgt aber hieraus weiter:

> *Bei einer reellen Gleichung hat die Discriminante der Stammgleichung dasselbe Vorzeichen wie die letzte nicht verschwindende Hauptunterdeterminante D_ϱ der Determinante $|s_{k+i}|$;*

und die Anwendung eines bekannten Fundamentalsatzes auf die Stammgleichung führt daher zu folgender Erweiterung dieses Satzes:

> *Eine jede reelle Gleichung besitzt eine gerade oder ungerade Anzahl von verschiedenen conjugirt imaginären Wurzelpaaren, je nachdem die letzte nicht verschwindende Hauptunterdeterminante D_ϱ des Systems (s_{k+i}) positiv oder negativ ist.*

Beiläufig sei noch bemerkt:

Da die Discriminante der Stammgleichung nicht verschwindet, so lassen sich die Zeilen und Colonnen des Systems (4) immer so anordnen,

---

*) In dieser Gleichung ist eine neue Beziehung zwischen den Subdeterminanten des symmetrischen Systems (s_{k+i}) enthalten, auf die ich noch zurückzukommen gedenke.

dass in der Diagonale die Elemente $\sigma_0, \sigma_2, \ldots, \sigma_{2\varrho-2}$ in irgend welcher Reihenfolge stehen bleiben, dass aber nicht zwei aufeinander folgende Hauptunterdeterminanten dieses neu geordneten Systems verschwinden*). Bezeichnet man diese Hauptunterdeterminanten dann der Reihe nach durch $\Delta'_1, \Delta'_2, \ldots, \Delta'_\varrho$, so gilt der Satz:

Bei reellen Coefficienten ist (die Anzahl der imaginären Wurzelpaare der Stammgleichung oder, was dasselbe ist,) *die Anzahl der verschiedenen conjugirt imaginären Wurzelpaare der ursprünglichen Gleichung gleich der Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe*

$$1, \Delta'_1, \Delta'_2, \ldots, \Delta'_\varrho.$$

II.

Ihre besondere Wichtigkeit erhält die Gleichung (5) in der Form

$$\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_\varrho = \frac{D_\varrho^{2\varrho-1}}{\Delta(B_\varrho)} \tag{6}$$

weil man dann den Satz hat:

Das Product der Ordnungen der verschiedenen Wurzeln der gegebenen Gleichung ist gleich dem Quotienten aus der $(2\varrho-1)^{\text{ten}}$ *Potenz von* D_ϱ *und der Discriminante der Stammgleichung,*

und in diesem Satze die Lösung der Frage nach den Ordnungen der verschiedenen Wurzeln liegt. Ich behaupte nämlich:

ϱ *positive ganze rationale Zahlen sind durch Angabe ihrer Summe und ihres Productes vollständig bestimmt.*

Zum Beweise dieses bemerkenswerthen Satzes bezeichne ich die gegebene Summe durch $n \geqq \varrho$. Dann giebt es zunächst nur eine endliche Anzahl von Möglichkeiten, diese Zahl n in ϱ positive ganzzahlige Summanden zu zerlegen. Diese Summanden denke ich mir stets der Grösse nach geordnet in dem Sinne, dass, wenn $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\varrho$ irgend eine solche Zerlegung ist, die Beziehungen

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_\varrho = n$$
$$\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \cdots \geqq \lambda_\varrho$$

stattfinden. Als erste Zerlegung nehme ich die, bei welcher

$$\lambda_1 = n - \varrho + 1$$
$$\lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_\varrho = 1$$

ist. Von dieser Zerlegung ausgehend und immer an der durch die vorigen Ungleichungen ausgedrückten Forderung festhaltend, kann man dann alle übrigen successive dadurch herleiten, dass man immer

*) Vgl. Frobenius, Berl. Sitzungsberichte 1894, S. 247.

einen in der Reihe voranstehenden Summanden um 1 vermindert und zugleich einen folgenden um 1 vermehrt. Hiernach wird also, wenn jetzt wieder $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\varrho$ eine beliebige, $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\varrho$ die unmittelbar vorhergehende Zerlegung der Zahl n bedeutet, etwa

$$\varkappa_\alpha = \lambda_\alpha + 1, \quad \varkappa_\beta = \lambda_\beta - 1 \qquad (\alpha > \beta)$$

sein, während für alle übrigen Indices der Werth eines $\varkappa$ gleich dem Werthe des entsprechenden λ ist. Man hat dann

$$\varkappa_\alpha \varkappa_\beta = \lambda_\alpha \lambda_\beta - (\lambda_\alpha - \lambda_\beta) - 1,$$

mithin

$$\varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_\varrho = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_\varrho - \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_\varrho \frac{(\lambda_\alpha - \lambda_\beta) + 1}{\lambda_\alpha \lambda_\beta}$$

und da die Differenz $\lambda_\alpha - \lambda_\beta$ sicher nicht negativ ist, so folgt:

$$\varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_\varrho < \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_\varrho .$$

Schreitet man also in der vorhin angegebenen Weise von Zerlegung zu Zerlegung weiter, so wird das Product der jedesmaligen Summanden fortwährend grösser, es können mithin nie zwei solche Zerlegungen auftreten, bei denen die Producte der entsprechenden Summanden den gleichen Werth erhalten. Da man andererseits auf diesem Wege alle überhaupt möglichen Zerlegungen erhält, so folgt das Gesagte.

Hiernach ergiebt sich ohne Weiteres der Satz:

Die Ordnungen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\varrho$ der ϱ verschiedenen Wurzeln der gegebenen Gleichung sind eindeutig bestimmt durch die beiden Relationen:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_\varrho = n,$$

$$\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_\varrho = \frac{D_\varrho^{2\varrho-1}}{\Delta(B_\varrho)}$$

und hieraus wiederum folgt:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die ϱ verschiedenen Wurzeln von $F(y) = 0$ bezüglich die Ordnungen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\varrho$ besitzen, ist die, dass

$$D_\varrho^{2\varrho-1} = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_\varrho \cdot \Delta(B_\varrho), \tag{7}$$

d. h. die, dass die $(2\varrho - 1)^{\text{te}}$ Potenz der letzten nicht verschwindenden Hauptunterdeterminante D_ϱ des Systems (s_{k+i}) gleich dem Producte aus jenen Ordnungen und der Discriminante der Stammgleichung (3) *ist.*

Bringt man diesen Satz in Verbindung mit dem Eingangs erwähnten, so wird dadurch eine Reihe fundamentaler Fragen aus der Theorie der Gleichungen entschieden.

So besitzt z. B. die biquadratische Gleichung

$$F(y) = y^4 + f_2 y^2 + f_3 y + f_4 = 0$$

dann und nur dann 2 verschiedene Wurzeln y' und y'' von bez. den Ordnungen λ_1 und λ_2, wenn

$$D_4 = D_3 = 0$$

und

$$D_2^3 = \lambda_1 \lambda_2 \Delta(B_2) \neq 0,$$

während wir in

$$B_2(y) = 0$$

die *Stammgleichung* mit den verschiedenen Wurzeln y' und y'' haben.

Nun ist hier, wenn man durch

$$A = f_2^2 + 12 f_4$$
$$B = 2 f_2^3 - 72 f_2 f_4 + 27 f_3^2$$

die bekannten zugehörigen Invarianten 2ter und 3ter Ordnung bezeichnet,

$$D_4 = \tfrac{1}{27}(4A^3 - B^2)$$
$$D_3 = -4(2 f_2^3 - 8 f_2 f_4 + 9 f_3^2) = -\tfrac{4}{3}(4 f_2 A + B),$$
$$D_2 = -8 f_2,$$

und

$$B_2(y) = -8 f_2 y^2 + 12 f_3 y - 4 f_2^2 = 0.$$

Also folgt

$$\Delta(B_2) = 144 f_3^2 - 128 f_2^3,$$

so dass die letzte der obigen Bedingungsgleichungen übergeht in

$$8(4 - \lambda_1 \lambda_2) f_2^3 + 9 \lambda_1 \lambda_2 f_3^2 = 0.$$

Es besitzt demnach die biquadratische Gleichung dann und nur dann 2 Doppelwurzeln, wenn

$$f_3 = 0, \quad f_2 \neq 0, \quad 4 f_4 = f_2^2$$

und diese Doppelwurzeln sind reell oder conjugirt complex, je nachdem $\Delta(B_2)$, oder was jetzt auf dasselbe hinauskommt, $-f_2$ positiv oder negativ ist —; die Gleichung besitzt dann und nur dann eine 3-fache und eine 1-fache Wurzel, wenn

$$8 f_2^3 + 27 f_3^2 = 0, \quad f_2 \neq 0,$$
$$D_3 = D_4 = 0,$$

welche Bedingungen wieder den anderen

$$A \neq 0, \quad B = 0, \quad f_2 \neq 0$$

äquivalent sind. Die Stammgleichung liefert in diesem Falle für y' und y'' die reellen und rationalen Werthe $\frac{3}{4} f_3 (1 \pm 2)$.

Je nachdem ferner

$$D_4 = 0, \quad D_3 \neq 0$$

oder

$$D_4 = D_3 = D_2 = 0,$$

erhält man zwei 1-fache und eine 2-fache, oder eine 4-fache Wurzel u.s.w., alles in Uebereinstimmung mit auf anderem Wege gefundenen Resultaten.

III.

Die bei unseren Untersuchungen auftretenden Functionen stehen in einem einfachen Zusammenhang mit der Sylvester'schen Determinante. Das Resultat der Elimination von y aus der Reihe der Functionen

$$y^{n-1}F(y), \ldots, yF(y), F(y), F'(y), yF'(y), \ldots, y^nF'(y)$$

erscheint nämlich in Form einer Determinante, die sich von der Sylvester'schen blos durch die Reihenfolge der Colonnen unterscheidet und durch R bezeichnet werden möge, so dass $\frac{1}{a_0} \cdot R$ die Discriminante der Gleichung (1) ist. Durch eine geeignete Darstellung und zweckmässige Composition des Systems

$$(s_{k+l}) \qquad (k, l = 0, 1, \ldots, \varrho-1)$$

ergiebt sich dann die Relation

$$D_\varrho = \frac{1}{a_0^{2\varrho-1}} R_\varrho \text{ *)}. \tag{8}$$

D_ϱ ist also abgesehen von dem Factor $a_0^{1-2\varrho}$ nichts anderes als die Determinante R_ϱ, die aus der in der obigen Weise modificirten Sylvester'schen Determinante R dadurch entsteht, dass man ringsherum die $(n-\varrho)$ äussersten Zeilen weglässt.

In entsprechender Weise erhält man die Gleichung

$$B_\varrho(y) = \frac{1}{a_0^{2\varrho}} F_\varrho(y), \tag{9}$$

wenn man durch $a_0 F_\varrho(y)$ diejenige ganze Function ϱ^{ten} Grades von y bezeichnet, die aus $R_{\varrho+1}$ hervorgeht, wenn man darin die ϱ ersten Elemente der letzten Colonnen durch 0, die $(\varrho+1)$ letzten aber der Reihe nach durch die bekannten Functionen

$$Y_\alpha = \sum a_\beta y^{\alpha-\beta} \qquad \begin{pmatrix} \beta = 0, 1, \ldots, \alpha \\ \alpha = 0, 1, \ldots, \varrho \end{pmatrix}$$

ersetzt.

*) Das Verfahren ist ähnlich dem, durch welches Hesse die Identität von Sylvester's Determinante und Euler's Resultante nachweist (Tortolini's Ann. di Matem., Tomo II, 1859; vergl. auch Werke, S. 475).

Durch diese Beziehungen ist jener Zusammenhang klargestellt, *gleichzeitig aber sind durch sie unsere Functionen in explicite rationale Functionen der Gleichungscoefficienten verwandelt.*

Schliesslich bemerke ich noch: Sind die Coefficienten der gegebenen Gleichung etwa ganze rationale Functionen von beliebig vielen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so bleiben die vorstehenden Entwicklungen durchaus bestehen in dem Sinne, dass sie sich dann auf die Verhältnisse beziehen, die an einer bestimmten Stelle $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ im Gebiete jener Veränderlichen stattfinden.

Heppenheim a. B., October 1898.

Kürzeste und geradeste Linien im Möbius'schen Nullsystem.

Von

H. Liebmann in Göttingen.

§ 1.

Einleitung.

Auf den folgenden Seiten beabsichtige ich ein einfaches Beispiel zu construiren um den von Hertz*) in seiner principiellen Bedeutung zuerst scharf hervorgehobenen Mangel des Princips der kleinsten Wirkung $\left(\delta \int \sqrt{T}\, dt = 0\right)$, zu zeigen, dass es im Falle einer nicht holonomen**) Bedingung *nicht* die richtigen Bahncurven liefert. Bekanntlich hat übrigens Herr Hölder***) später gezeigt, dass man das Princip der kleinsten Wirkung so modificiren kann, dass es doch die richtigen Bahncurven ergiebt.

Eine kurze Orientirung über die Frage ist nun hier am Platze:

Betrachten wir den kräftefreien Fall, so beschreibt der Punkt eine Curve, die nach dem „Princip der geradesten Bahn"†) zu bestimmen ist. Das Princip der kleinsten Wirkung aber, welches hier sich einfach so schreiben lässt: $\delta \int ds = 0$, liefert nicht diese Bahncurven, sondern kürzeste Linien, die mit den geradesten nur im holonomen Fall übereinstimmen.

Das lehrt schon die folgende einfache Betrachtung.

Bahncurven giebt es im kräftefreien Fall dreifach unendlich viele, weil von jedem Raumpunkt einfach unendlich viele ausgehen. Kürzeste Linien aber giebt es im nicht holonomen Fall vierfach unendlich viele,

*) Hertz, Principien der Mechanik p. 23. Vergleiche übrigens auch Voss, Ueber die Differentialgleichungen der Mechanik, Math. Annalen 25.

**) Der Ausdruck „holonom" für „integrabel" ist von Hertz eingeführt worden a. a. O. p. 162.

***) Göttinger Nachrichten 1896. Man vergleiche übrigens hierzu: E. J. Routh, Advanced rigid dynamics, 4te Auflage. London 1884, p. 445.

†) Hertz, a. a O. p. 283.

weil man von jedem Punkt zu jedem andern gelangen kann, und unter diesen Verbindungslinien sich auch eine *kürzeste* befindet.

Die geradesten Linien sind also durch die Anfangsrichtung in einem Punkt vollkommen bestimmt, die kürzesten erst, wenn man auch den Anfangskrümmungsradius kennt.

Die kürzesten Linien haben aber nicht nur ein mechanisches, sondern auch ein rein geometrisches Interesse. Wir haben hier die Uebertragung eines bestimmten Begriffes der Flächentheorie, nämlich des Begriffs der geodätischen Linien, auf nicht integrable Pfaff'sche Gleichungen. So ist es überhaupt wichtig, alle Curvenclassen, die man in der Flächentheorie kennt, nun bei den nicht integrabeln Pfaff'schen Gleichungen wieder zu suchen. Ansätze in dieser Richtung rühren von Kummer*) her; später ist dann die Theorie von Herrn Voss**), in neuester Zeit von Herrn v. Lilienthal***) weitergeführt worden, ohne dass sie indessen an einem concreten Beispiel durchgeführt wurde. Dies soll nun im Folgenden bei einem sehr einfachen Fall geschehen.

§ 2.

Die Differentialgleichung der kürzesten Linien im Möbius'schen Nullsystem.

Am geeignetsten für den Zweck, die kürzesten Linien zu bestimmen, erscheint der lineare Complex oder das Möbius'sche Nullsystem, welches durch die Gleichung

$$x\,dy - y\,dx - dz = 0 \tag{1}$$

gegeben ist. Hier sind bekanntlich die geradesten Bahnen einfach gerade Linien, nämlich die Strahlen des Complexes. *Um so auffallender zeigt sich der Unterschied von den kürzesten Linien, die das „Princip der kleinsten Wirkung liefert.*

An dieses Beispiel wollen wir daher anknüpfen, indem wir dabei von den Formeln ausgehen, welche Herr Voss†) gegeben hat.

Die kürzesten Linien im Nullsystem sind gegeben durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} x'' &= -\lambda' y - 2\lambda y', \\ y'' &= \lambda' x + 2\lambda x', \\ z'' &= -\lambda', \end{aligned}$$

*) E. Kummer, Allgemeine Theorie der Strahlencomplexe, Crelle's Journ. 57, p. 189—230.

**) A. Voss, Zur Theorie der allgemeinen Punktebenensysteme. Math. Annalen 23, p. 45—81.

***) v. Lilienthal, Krümmungslehre der Curvenscharen, Leipzig 1896, p. 99 ff.

†) A. Voss, Ueber die Differentialgleichungen der Mechanik. Mathem. Annalen 25. Vgl. besonders p. 283.

wozu als Nebenbedingung kommt:

$$xy' - yx' - z' = 0.$$

Als unabhängige Variable ist hier einfach die Bogenlänge s genommen.

Diese Formeln wollen wir nun durch Einführung von Polarcoordinaten (ϱ, φ) umgestalten. Wir setzen also

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi,$$

und erhalten dann die folgenden Formeln:

$$\varrho'' - \varrho \varphi'^2 = -2\lambda \varrho \varphi',$$
$$\varrho^2 \varphi'' + 2\varrho \varrho' \varphi' = \varrho^2 \lambda' + 2\varrho \varrho' \lambda.$$

Die zweite Gleichung können wir unmittelbar integriren und erhalten:

$$\varrho^2 \varphi' = \varrho^2 \lambda + a.$$

Ebenso können wir

$$z'' = -\lambda'$$

unmittelbar integriren. Es folgt

$$z' = -\lambda + b.$$

Aus den beiden erhaltenen Gleichungen folgt wegen

$$\varrho^2 \varphi' - z' = 0$$

(in dieser Form können wir (1) schreiben)

$$\lambda(\varrho^2 + 1) - c = 0,$$

wo

$$c = a - b$$

ist. Endlich bekommt man, indem man λ eliminirt und für ds seinen Werth $\sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2 d\varphi^2 + \varrho^4 d\varphi^2}$ einsetzt:

$$(2) \qquad \frac{\varrho^2 d\varphi}{\sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2 d\varphi^2 (1+\varrho^2)}} = \frac{\varrho^2 c}{\varrho^2 + 1} + a$$

eine Gleichung, die zusammen mit

$$(3) \qquad \varrho^2 d\varphi - dz = 0$$

die kürzesten Linien bestimmt.

Wir haben also das Ergebniss:

Zunächst bestimmt sich φ als Function von ϱ durch eine Quadratur und hierauf z durch eine zweite Quadratur.

Man kann also vorerst die verschiedenen Arten von kürzesten Linien im Grundriss (Projection auf die xy-Ebene) bestimmen, und erhält sodann den räumlichen Verlauf. Wir werden hier nur die erste Aufgabe eingehend behandeln, die zweite erledigt sich dann von selbst.

Doch zuvor ist es nöthig, die Formel (2) noch durch eine bessere zu ersetzen. Wir können dafür schreiben:

$$\frac{d\varphi}{du} = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{a}{u}\right)\frac{1}{\sqrt{(u+1)\{u(u+1) - (\alpha u+u)^2\}}}, \tag{4}$$

wo $u = \varrho^2$ ist, und α eine neue Constante.

Noch geeigneter ist die Form

$$\frac{d\varphi}{du} = \frac{\alpha}{2}\left(1 - \frac{u_0}{u}\right)\frac{1}{\sqrt{(u+1)\{u(u+1) - \alpha^2(u-u_0)^2\}}}. \tag{5}$$

§ 3.

Discussion der durch das Integral

$$\varphi = \frac{\alpha}{2}\int du\left(1-\frac{u_0}{u}\right)\frac{1}{\sqrt{(u+1)\{u(u+1) - \alpha^2(u-u_0)^2\}}}$$

bestimmten Curven.

Bevor wir die verschiedenen Typen der durch dieses Integral definirten Curven aufstellen, wollen wir zwei Bemerkungen vorausschicken, die für die Untersuchung der Gestalt sehr wichtig sind.

1. Die Curven haben keine Wendepunkte.

Dies zeigt folgende Betrachtung: Da die Curven orthogonale Projectionen von Raumcurven sind, so würden sie Wendepunkte nur dann haben, wenn entweder die Raumcurven selbst Wendepunkte haben oder wenn die Projectionsrichtung zur Osculationsebene parallel ist.

Beide Fälle sind aber ausgeschlossen, der zweite, weil die Flächenelemente des Nullsystems, die ja die Osculationsebenen der kürzesten Linien sind, nicht zur z-Axe parallel sind, der erste, weil die kürzesten Linien durch ihren Anfangskrümmungsradius bestimmt sind. In einem Wendepunkt ist aber die Krümmung Null, und die betreffende kürzeste Linie, die dann die sie berührende Gerade des Nullsystems osculiren würde, würde in ihrer ganzen Ausdehnung mit ihr zusammenfallen.

2. Die Curven haben auch keine Spitzen.

Spitzen würden nur da auftreten, wo $\frac{d\varphi}{du} = 0$ wird, also $u = u_0$ und gleichzeitig die Wurzel im Nenner des Integranden ihr Zeichen wechselt. Der Radicand ist aber für $u = u_0$ immer positiv, kann also nicht verschwinden und sein Zeichen wechseln. —

Wir wollen nun sehen, welche verschiedenen Classen von Curven sich ergeben, ohne dabei uns mit einer numerischen Auswerthung des elliptischen Integrales dritter Gattung aufzuhalten, auf das wir gestossen sind.

Wir bekommen vier verschiedene Classen von Curven.

(1) $\qquad u_0 = 0, \quad \alpha^2 > 1.$

Diese Curven verlaufen rosettenähnlich zwischen dem Nullpunkt und einem Kreis vom Radius $\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}}$, und zwar ist die Winkeldistanz der einzelnen Rosetten für $\alpha = 1$ unendlich klein, sie nimmt dann zu und wird für $\alpha = \infty$ unendlich gross. Man erkennt dies, wenn man die Periode des Integrals abschätzt, die gegeben ist durch das bestimmte Integral:

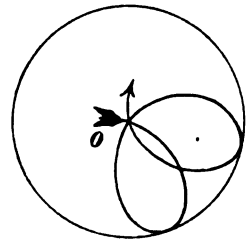


Fig. 1.

$$2\int_0^{u_1} \frac{\sqrt{(u_1+1)}\,du}{\sqrt{u(u+1)\left\{1-\frac{u}{u_1}\right\}}}, \quad \text{wo} \quad u_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}}.$$

Diese Periode giebt die Winkeldistanz der Rosettenscheitel; wir haben dem Integral hier eine Form gegeben, welche unmittelbar eine Abschätzung ermöglicht (Fig. 1).

Für $\alpha = 1$ ist der Radius des Kreises unendlich gross, die Curve erstreckt sich logarithmisch ins Unendliche.

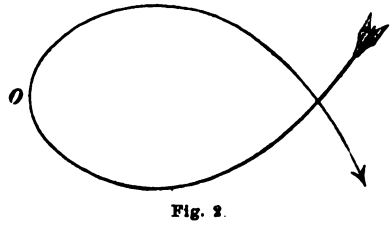


Fig. 2.

(2) $\quad u_0 = 0, \quad 1-\alpha^2 > 0$

Diese Curven gehen vom Nullpunkt aus, erstrecken sich ins Unendliche und haben eine Symmetrieebene (Fig. 2).

Für $\alpha = 0$ bekommen wir eine vom Nullpunkt ausgehende Gerade, mit zunehmendem α bekommen wir Curven, deren Doppelpunkte auf der Symmetrielinie liegen, für $\alpha = 1$ erhalten wir wieder die schon unter 1 genannte, sich logarithmisch ins Unendliche erstreckende Curve.

(3) $\qquad 1-\alpha^2 < 0; \quad \bar{u}(\bar{u}+1) - \alpha^2(\bar{u}-u_0)^2 > 0,$

wo

$$\bar{u} = \frac{2\alpha^2 u_0 - 1}{2(1-\alpha^2)}$$

ist.

Diese Curven verlaufen zwischen zwei Kreisen, und wir können sie am besten untersuchen, wenn wir die Radien dieser Kreise $r_1 = \sqrt{u_1}$ und $r_2 = \sqrt{u_2}$ als gegeben annehmen und hinterher u_0 und α bestimmen.

Es zeigt sich, dass für u_0 zwei Werthe kommen, nämlich die Wurzeln von

$$u_0^2 \frac{(1-u_1+u_2)}{u_1 u_2} - 2u_0 - 1 = 0.$$

Zu jeder Wurzel u_0 gehört nun ein, wie man sich leicht überzeugt, positives α^2, also zwei reelle α, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden.

Ein Werth u_0 ist nun negativ, der andere ist positiv und liegt zwischen u_1 und u_2.

Zwischen zwei Kreisen mit vorgeschriebenen Radien verlaufen also vier verschiedene Curven, unter denen die mit verschiedenem u_0 wesentlich von einander verschieden sind.

Nehmen wir die negative Wurzel, so erhalten wir eine *Curve, die sich beständig in einer durch das Vorzeichen von α bestimmten Richtung zwischen den Kreisen herumschlingt*, beide Kreise berührend (Fig. 3).

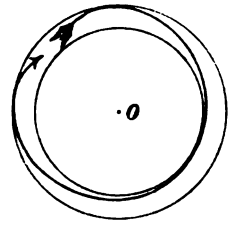


Fig. 3.

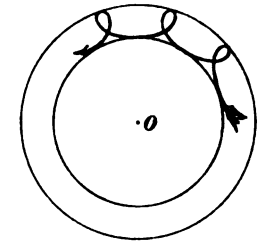


Fig. 4.

Im andern Fall erhalten wir eine Curve mit Schleifen, weil auf dem Kreis $r = \sqrt{u_0}$ der Radiusvector der Curve immer umkehrt $\left(\frac{d\varphi}{du}\right.$ wird sein Zeichen ändern$\left.\right)$. Vgl. Figur 4.

Es ist auch leicht, für die Lage der Scheitel der Schleife eine Grenze anzugeben. Dieselben müssen jedenfalls enger liegen, als die Ecken eines Polygons, dass dem äusseren Kreise einbeschrieben, dem inneren umbeschrieben ist. Sonst würden nothwendig Wendepunkte vorkommen, was, wie wir wissen, ausgeschlossen ist.

Hieraus folgt, dass wenn die Radien der Kreise sich einander immer mehr nähern, gleichzeitig die Schleifen immer enger auf einander folgen, weil die Anzahl der Polygonseiten dann unbegrenzt zunimmt.

(4) $1 - \alpha^2 > 0, \quad u_0 \neq 0.$

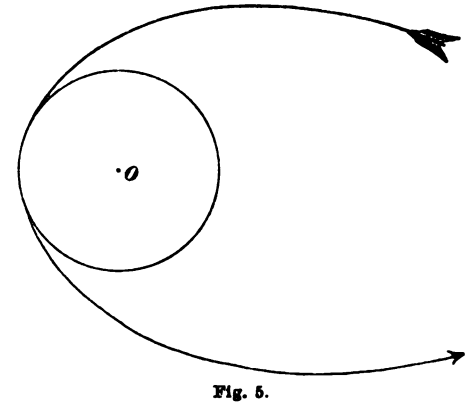


Fig. 5.

Diese Curven tangiren einen Kreis von aussen und verlaufen dann ins Unendliche mit bestimmten Asymptoten. Unter diesen Curven finden wir als Specialfall die Tangenten an den Kreis (Fig. 5).

§ 4.

Die kürzesten Linien im Nullsystem.

Es ist nun sehr leicht, nachdem wir die verschiedenen Typen in der Projection classificirt haben, sich den räumlichen Verlauf derselben vorzustellen, und wir wollen nur einige wichtige Punkte hervorheben.

Man kann alles aus der Gleichung

$$\varrho^2 d\varphi = dz$$

ablesen, welche uns Folgendes lehrt:

1. Wenn $d\varphi$ beständig dasselbe Zeichen hat, so ändert sich auch z monoton.

Beispielsweise werden sich also die durch Fig. 3 angedeuteten Curven schraubenartig zwischen den beiden Cylindern in die Höhe winden.

2. Die Curven, wo $d\varphi$ das Zeichen wechselt (also beispielsweise die durch Fig. 5 angedeuteten) deren Projectionen Schleifen zeigen, steigen und fallen abwechselnd, sie winden sich also im ganzen genommen viel langsamer in die Höhe als die ohne Schleifen.

Als Specialfall finden wir ferner die Geraden des Nullsystems und die auf dem Cylinder liegenden, dem Nullsystem angehörigen Schraubenlinien, wie man sich leicht überzeugt. —

Geschlossene Curven finden sich unter den kürzesten Linien überhaupt nicht.

Jedenfalls geht aus unserer Untersuchung hervor, dass bei nicht integrabeln Pfaff'schen Gleichungen sehr viel complicirtere Verhältnisse walten, als auf Flächen, und dass es sich wohl der Mühe lohnen wird, in diesem Sinne weiter zu arbeiten und namentlich weitere einfache Beispiele zu discutiren.

Ueber eine Invariante der trilinearen ternären Form.

Von

M. Pasch in Giessen.

In der Abhandlung „Ueber abhängige Punktsysteme und deren Bedeutung für die reciproke Verwandtschaft zweier Ebenen", Journal f. d. r. u. a. Mathematik 1883 Band 95, betrachtet Herr Rosanes in § 4 das System dreier trilinearen ternären Formen

$$f(xy) = \Sigma a_{ik} x_i y_k, \quad f'(xy) = \Sigma b_{ik} x_i y_k, \quad f''(xy) = \Sigma c_{ik} x_i y_k$$

mit $i, k = 1, 2, 3$ und gelangt zu einer Invariante dieses Systems, die hier mit D bezeichnet werden mag, nämlich:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 & -b_{31} & -b_{32} & -b_{33} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 0 & -c_{31} & -c_{32} & -c_{33} & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 & -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 & 0 & 0 & -b_{11} & -b_{12} & -b_{13} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0 & -c_{11} & -c_{12} & -c_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ -b_{21} & -b_{22} & -b_{23} & b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 & 0 & 0 \\ -c_{21} & -c_{22} & -c_{23} & c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

einer Invariante, mit der sich noch die Arbeiten von B. Igel, Monatshefte für Mathematik und Physik 1894 Jahrgang 5, und Ph. Maennchen, die Transformation der trilinearen ternären Form in eine theilweise symmetrische, Giessener Dissertation, Leipzig 1898*), beschäftigen. Im Hinblick auf die genannten Arbeiten ist es wünschenswerth, dass die Irreducibilität der Invariante D sichergestellt werde. Dies soll im Folgenden geschehen, und zwar unter Benutzung des Umstandes, dass D zu einer besonderen Art von Invarianten gehört.

Als (rationale ganze) Invariante des Systemes $f|f'|f''$ wird man für gewöhnlich jede homogene ganze Function der Coefficienten be-

*) In dieser Dissertation ist S. 5 Z. 2 v. o. 1883 statt 1887, S. 6 Z. 8 v. u. 1894 statt 1884 zu lesen.

zeichnen, die sich bis auf einen Factor wiedererzeugt, wenn man die Formen durch Anwendung einer und derselben linearen Substitution auf die x und die y transformirt und in jene Function die Coefficienten der transformirten Formen einsetzt. Der Ausdruck D wird sich aber, seiner Herleitung zufolge, auch dann wiedererzeugen, wenn man auf die x und die y beliebige, von einander verschiedene, lineare Substitutionen anwendet. Eine Invariante dieser Art mag hier eine „vollkommene" genannt werden.

Der Ausdruck D ist ferner eine Combinante der drei bilinearen Formen. Ich bilde deshalb aus den letzteren, wie es schon in der Dissertation des Herrn Maennchen geschieht, die trilineare ternäre Form

$$\varphi(xyz) = z_1 f + z_2 f' + z_3 f'' = \Sigma a_{ikl}\, x_i y_k z_l$$

mit $i, k, l = 1, 2, 3$ und schreibe demgemäss:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_{311} & -a_{321} & -a_{331} & a_{211} & a_{221} & a_{231} \\ 0 & 0 & 0 & -a_{312} & -a_{322} & -a_{332} & a_{212} & a_{222} & a_{232} \\ 0 & 0 & 0 & -a_{313} & -a_{323} & -a_{333} & a_{213} & a_{223} & a_{233} \\ a_{311} & a_{321} & a_{331} & 0 & 0 & 0 & -a_{111} & -a_{121} & -a_{131} \\ a_{312} & a_{322} & a_{332} & 0 & 0 & 0 & -a_{112} & -a_{122} & -a_{132} \\ a_{313} & a_{323} & a_{333} & 0 & 0 & 0 & -a_{113} & -a_{123} & -a_{133} \\ -a_{211} & -a_{221} & -a_{231} & a_{111} & a_{121} & a_{131} & 0 & 0 & 0 \\ -a_{212} & -a_{222} & -a_{232} & a_{112} & a_{122} & a_{132} & 0 & 0 & 0 \\ -a_{213} & -a_{223} & -a_{233} & a_{113} & a_{123} & a_{133} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Jetzt erscheint D als „vollkommene" Invariante von φ.

Bezüglich der vollkommenen Invarianten der Form φ gilt Folgendes: Jede homogene ganze Function der Coefficienten von φ, die sich bis auf einen Factor wiedererzeugt, wenn man φ durch Anwendung einer linearen Substitution auf irgend eine einzelne Reihe der Veränderlichen transformirt und in jene Function die Coefficienten der transformirten Form einsetzt, ist eine vollkommene Invariante von φ. — Jede vollkommene Invariante des Systemes $f|f'|f''$ mit Combinanten-Eigenschaft ist vollkommene Invariante von φ. — Jede vollkommene Invariante der Form φ ist homogen in denjenigen Coefficienten a_{ikl}, in denen ein Index einen festen Werth hat; sie ist vollkommene Invariante des Systemes $f|f'|f''$ mit Combinanten-Eigenschaft; sie ist von gleichem Grade in den a_{ik}, b_{ik}, c_{ik}, überhaupt in jeder Reihe der a_{ikl}, in der ein Index einen festen Werth hat; ihr Grad in der Gesammtheit der a_{ikl} ist durch 3 theilbar. — Jeder Theiler einer vollkommenen Invariante φ ist eine ebensolche Invariante.

Um zu ermitteln, ob es eine vollkommene Invariante dritten Grades von φ giebt, schreiben wir symbolisch:

$$\varphi(xyz) = a_x b_y c_z = a'_x b'_y c'_z = a''_x b''_y c''_z,$$

wo z. B. $a_x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$. Die gesuchte Invariante ist linear in den Symbolen a, in den b, u. s. w.; sie enthält einen symbolischen Factor, der wie eine Invariante des Systemes $a_x | a'_x | a''_x$ gebaut ist, also den Factor $(aa'a'')$, d. i. $\Sigma \pm a_1 a_2' a_3''$; sie enthält ebenso die Factoren $(bb'b'')$ und $(cc'c'')$. Da aber das Product

$$(aa'a'')\,(bb'b'')\,(cc'c'')$$

den Werth Null liefert, so folgt: Die trilineare ternäre Form besitzt keine vollkommene Invariante dritten Grades.

Wäre nun D reducibel, so wäre jeder Theiler eine vollkommene Invariante von φ, sein Grad durch 3 theilbar. Da D vom Grade 9 ist, so wäre mindestens ein Theiler vom Grade 3. Da es aber keine vollkommene Invariante dritten Grades von φ giebt, so folgt: Die Invariante D ist irreducibel.

Giessen, October 1898.

Ueber bilineare Relationen zwischen hypergeometrischen Integralen höherer Ordnung.

Von

Arthur Hirsch in Zürich.

Die unter dieser Bezeichnung von Herrn Pochhammer*) eingeführten hypergeometrischen Integrale r-ter Ordnung bilden eine naheliegende Verallgemeinerung derjenigen bestimmten Integrale, durch welche sich die Gauss'sche hypergeometrische Reihe darstellen lässt. Als Functionen eines ihrer Verzweigungswerthe aufgefasst erfüllen sie eine lineare homogene Differentialgleichung r-ter Ordnung mit rationalen Coefficienten, aus welchem Gesichtspunkte sie bereits mehrfach und eingehend behandelt worden sind. Während die Untersuchung des genannten Autors sich vornehmlich auf die Construction der Differentialgleichung aus der Definition ihrer Integrale durch Unstetigkeits- und Verzweigungsbedingungen richtet, gelangt eine Abhandlung des Herrn Hossenfelder**) unmittelbar von dem Ausdruck der hypergeometrischen Integrale ausgehend zu derselben Differentialgleichung, sowie zur Aufstellung der linearen Transformationen, welche die Integrale bei Umlauf des Arguments um die singulären Punkte erfahren. In einem allgemeineren Rahmen treten die in Rede stehenden Integrale in den Untersuchungen zahlreicher anderer Autoren***) auf.

Wenn wir gleichwohl im Beginne der folgenden Ausführungen noch einmal auf die Aufstellung der erwähnten Differentialgleichung zurückkommen, so geschieht dies in der Absicht, dabei den Gesichtspunkt der Formentheorie zur Geltung zu bringen, auf dessen Bedeutung im Gebiete der linearen Differentialgleichungen — mit dem besonderen Hinweis auf die vorliegende Materie — Herr Klein†) die Aufmerksam-

*) „Ueber hypergeometrische Functionen n-ter Ordnung", Crelle's Journ., Bd. 71.

**) „Ueber die Integration einer linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung", Mathem. Annalen, Bd. 4.

***) Goursat, Acta Mathematica, Bd. 2; Jordan, Cours d'Analyse, t. III; Nekrassoff, Mathem. Ann., Bd. 38; Schlesinger, Crelle's Journ., Bd. 116, 117.

†) „Ueber Normirung der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung", Mathem. Annalen, Bd. 38, pag. 149.

keit gelenkt hat. Die Consequenzen dieser invariantentheoretischen Auffassung der linearen Differentialgleichungen finden sich ausführlich dargestellt in der Inaugural-Dissertation*) des Verfassers.

Unter Verwendung der dort entwickelten Principien zeigt sich nun, dass unsere Differentialgleichung, die in den älteren Darstellungen in wenig durchsichtiger Gestalt erscheint, thatsächlich eine höchst einfache Structur besitzt. Indem wir ferner die zu ihr adjungirte Differentialgleichung aufstellen, wird uns deren Aufbau unmittelbar erkennen lassen, dass sie gleichfalls durch hypergeometrische Integrale gelöst wird. Die Integranden, welche in diesen Lösungen der beiden Differentialgleichungen auftreten, stellen sich in der geeignet zerschnittenen complexen Ebene als „Functionen mit Multiplicatoren“**) dar; und zwar ist ihr gegenseitiges Verhältniss dadurch charakterisirt, dass die Multiplicatoren der einen Function zu den correspondirenden der andern reciprok sind. Aus der bekannten Beziehung, welche zwischen den Integralen von zwei adjungirten linearen Differentialgleichungen stattfindet, fliessen nun die bilinearen Relationen, deren Aufstellung das Ziel dieser Mittheilung bildet. Dieselben umfassen als speciellen Fall die Relationen unter den Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale erster Gattung.

Wenngleich sich so die hiermit angedeutete Herleitung der fraglichen Relationen ganz ungezwungen anbietet, so erscheint doch aus einem höheren Standpunkte der dabei benutzte Durchgang durch die lineare Differentialgleichung als ein Umweg. In der That gelingt es durch Erweiterung eines Riemann'schen Gedankens, dieselben Relationen in grösserer Reinheit der Methode und zugleich in vollständigerer Weise zu construiren.

Aus dem Abel-Jacobi'schen Theorem***) über die Vertauschung von Parameter und Argument hat Herr Fuchs†) eine Klasse von bilinearen Relationen gewonnen, welche unter den zwischen je zwei singulären Punkten erstreckten Integralen von Lösungen linearer Differentialgleichungen stattfinden. Der specielle Fall, wo die letzteren von der ersten Ordnung sind, liefert ein Formelsystem, welches sich als algebraisch äquivalent mit dem unseren erweist.

---

*) Zur Theorie der linearen Differentialgleichung mit rationalem Integral, Königsberg i. Pr., 1892. Vergl. auch E. Waelsch, Zur Geometrie der linearen algebraischen Differentialgleichungen und binären Formen, Prag. Math. Ges. 1892.

**) Vergl. über „Functionen mit Multiplicatoren“ auf einer Riemann'schen Fläche A. Hurwitz, Zur Theorie der Abel'schen Functionen, Göttinger Nachr. 1892, Nr. 7.

***) Abel, OEuvres complètes (1881) t. II, Nr. VIII, IX; Jacobi, Ges. Werke (1882), Bd. II.

†) Crelle's Journal, Bd. 76 und Berliner Sitzungsber. 1892, pag. 1113.

In einer sich an die vorliegende anschliessenden Abhandlung beabsichtigen wir, die hier benutzte Auffassung und Methode auf den umfassenderen Gegenstand der erwähnten Untersuchungen des Herrn Fuchs zu übertragen.

§ 1.

Die Differentialgleichung der hypergeometrischen Integrale r-ter Ordnung.

Es seien

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_r, a_{r+1}$$

$(r+2)$ endliche und von einander verschiedene Punkte der complexen Ebene; ihnen seien bezüglich zugeordnet die Zahlen

$$s_0, s_1, s_2, \ldots, s_r, s_{r+1},$$

welche der Beschränkung unterliegen, dass ihre Summe

$$(1) \qquad s_0 + s_1 + s_2 + \cdots + s_r + s_{r+1} = r$$

sei, im übrigen aber willkürliche Werthe haben mögen. Durch diese Festsetzung wird es erreicht, dass die Function

$$(2) \quad U(u) = (u-a_0)^{s_0-1}(u-a_1)^{s_1-1}\ldots(u-a_r)^{s_r-1}(u-a_{r+1})^{s_{r+1}-1}$$

sich nur in den Punkten $u = a_0, a_1, \ldots, a_r, a_{r+1}$ verzweigt, dagegen in der Umgebung von $u = \infty$ sich endlich und eindeutig verhält wie u^{-2}, dass demnach auch das Integral

$$\int U du$$

für grosse Werthe von u endlich und eindeutig bleibt. Unter einem hypergeometrischen Integral r-ter Ordnung verstehen wir nun ein Integral

$$(3) \quad y = \int_L (u-a_0)^{s_0-1}(u-a_1)^{s_1-1}\ldots(u-a_r)^{s_r-1}(u-a_{r+1})^{s_{r+1}-1}du,$$

wobei die Integration längs eines Doppelumlaufs*) L um irgend zwei der Verzweigungspunkte a geführt wird. Fassen wir dasselbe als Function des Verzweigungswerthes a_0 auf, der im weiteren mit x bezeichnet werde, so genügt y einer linearen homogenen Differentialgleichung r-ter Ordnung, die zunächst aufgestellt werden soll. Durch Differentiation von (3) erhält man:

$$(4) \quad \frac{d^{r-\varkappa}y}{dx^{r-\varkappa}} = (-1)^{r-\varkappa}\frac{(s_0-1)!}{(s_0-1-r+\varkappa)!}\int_L (u-x)^{s_0-1-r+\varkappa}\prod_{\lambda=1}^{r+1}(u-a_\lambda)^{s_\lambda-1}du,$$

$$(\varkappa = 0, 1, \ldots r),$$

*) Siehe Pochhammer, Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf, Mathem. Annalen, Bd. 35; Klein l. c.

wobei das Zeichen $t!$ gleichbedeutend mit $\Gamma(t+1)$ gebraucht wird. Ferner ist

$$(5)\quad \frac{d}{du}\left\{(u-x)^{s_0-r}\prod_{\lambda=1}^{r+1}(u-a_\lambda)^{s_\lambda}\right\} = (u-x)^{s_0-r-1}\prod_{\lambda=1}^{r+1}(u-a_\lambda)^{s_\lambda-1}.\psi(u),$$

worin

$$(6)\qquad \psi(u) = (u-x)\prod_{\lambda=1}^{r+1}(u-a_\lambda)\,.\left\{\frac{s_0-r}{u-x}+\sum_{\lambda=1}^{r+1}\frac{s_\lambda}{u-a_\lambda}\right\}$$

eine ganze Function von u darstellt, die wegen der in (1) getroffenen Festsetzung nur die Ordnung r erreicht. Entwickelt man $\psi(u)$ nach Potenzen von $(u-x)$, so ergiebt sich daher:

$$(5')\qquad \frac{d}{du}\left\{(u-x)^{s_0-r}\prod_{\lambda=1}^{r+1}(u-a_\lambda)^{s_\lambda}\right\}$$

$$= \sum_{\varkappa=0}^{r}\frac{\psi^{(\varkappa)}(x)}{\varkappa!}(u-x)^{s_0-1-r+\varkappa}\prod_{\lambda=1}^{r+1}(u-a_\lambda)^{s_\lambda-1}.$$

Integriren wir diese Gleichung längs dem Doppelumlauf L, so verschwindet das Integral der linken Seite, und wir erhalten mit Berücksichtigung von (4) die Differentialgleichung:

$$(7)\qquad \sum_{\varkappa=0}^{r}(-1)^{\varkappa}\frac{(s_0-r+\varkappa-1)!}{(s_0-1)!}\,\frac{\psi^{(\varkappa)}(x)}{\varkappa!}\,\frac{d^{r-\varkappa}y}{dx^{r-\varkappa}} = 0.$$

Führen wir nun die Bezeichnungen ein:

$$(8)\qquad f(x) = \prod_{\lambda=1}^{r+1}(x-a_\lambda),$$

$$(9)\qquad \varphi(x) = -\frac{1}{r}f(x)\sum_{\lambda=1}^{r+1}\frac{1}{x-a_\lambda}\left\{\frac{s_0-r}{r+1}+s_\lambda\right\},$$

so bedeutet $f(x)$ eine ganze rationale Function der Ordnung $(r+1)$, $\varphi(x)$ auf Grund von (1) eine solche der Ordnung $(r-1)$; und mit ihrer Hülfe stellt sich $\psi(u)$ in der Form dar:

$$\psi(u) = (s_0-r)f(u) - (u-x)\left\{\left(\frac{s_0-r}{r+1}\right)f'(u) + r\varphi(u)\right\}.$$

Differentiiren wir diese Gleichung $\varkappa$-mal nach u und tragen sogleich $u = x$ ein, so findet sich:

$$\psi^{(\varkappa)}(x) = (s_0-r)f^{(\varkappa)}(x) - \varkappa\left\{\left(\frac{s_0-r}{r+1}\right)f^{(\varkappa)}(x) + r\varphi^{(\varkappa-1)}(x)\right\}$$

$$= \frac{(s_0-r)(r-\varkappa+1)}{(r+1)}f^{(\varkappa)}(x) - r\varkappa\varphi^{(\varkappa-1)}(x),$$

und die Differentialgleichung (7) erhält somit die Gestalt:

$$(7') \qquad \sum_{\varkappa=0}^{r} (-1)^{\varkappa} \frac{(s_0-r+\varkappa-1)!}{(s_0-1)!\,\varkappa!} \cdot$$

$$\left\{ \frac{(s_0-r)(r-\varkappa+1)}{(r+1)} f^{(\varkappa)}(x) - r\varkappa\varphi^{(\varkappa-1)}(x) \right\} \frac{d^{r-\varkappa}y}{dx^{r-\varkappa}} = 0.$$

Um jetzt den invarianten Charakter der linken Seite von (7') ins Licht zu setzen, bedienen wir uns der von Herrn Hilbert*) eingeführten Darstellung von Covarianten durch einseitige Derivirte der Grundformen, derzufolge die λ-te Ableitung einer Function $F(x)$ von der Ordnung ϱ durch

$$(10) \qquad \frac{d^{\lambda}F(x)}{dx^{\lambda}} = \frac{\varrho!}{(\varrho-\lambda)!} F_{\lambda}(x)$$

ausgedrückt wird. In dieser Schreibweise stellt sich die p-te Ueberschiebung zweier Formen φ und ψ durch den Ausdruck

$$(11) \qquad \{\varphi, \psi\}_p = \sum_{\varkappa=0}^{p} (-1)^{\varkappa} p_{\varkappa} \varphi_{\varkappa} \psi_{p-\varkappa}$$

dar, worin unter $p_{\varkappa}$ der Binomialcoefficient $\frac{p!}{\varkappa!(p-\varkappa)!}$ zu verstehen ist. — Da nun, wie der Integralausdruck in (3) zeigt, der Function y von x die Ordnung $n = (s_0 - 1)$ beizulegen ist, so setzen wir gemäss (10):

$$\frac{(s_0-r+\varkappa-1)!}{(s_0-1)!} \frac{d^{r-\varkappa}y}{dx^{r-\varkappa}} = y_{r-\varkappa},$$

ebenso

$$f^{(\varkappa)}(x) = \frac{(r+1)!}{(r+1-\varkappa)!} f_{\varkappa}, \quad \varphi^{(\varkappa-1)}(x) = \frac{(r-1)!}{(r-\varkappa)!} \varphi_{\varkappa-1},$$

wodurch (7') übergeht in:

$$\sum_{\varkappa=0}^{r} (-1)^{\varkappa} \left\{ (s_0-r) r_{\varkappa} f_{\varkappa} - r(r-1)_{\varkappa-1} \varphi_{\varkappa-1} \right\} y_{r-\varkappa} = 0,$$

oder:

$$(s_0-r) \sum_{\varkappa=0}^{r} (-1)^{\varkappa} r_{\varkappa} f_{\varkappa} y_{r-\varkappa} + r \sum_{\varkappa=0}^{r-1} (-1)^{\varkappa} (r-1)_{\varkappa} \varphi_{\varkappa} y_{r-1-\varkappa} = 0,$$

oder, nach (11), in:

$$(12) \qquad (s_0-1)_r \{f, y\}_r + (s_0-1)_{r-1} \{\varphi, y\}_{r-1} = 0^{**}).$$

---

*) „Ueber eine Darstellungsweise der invarianten Gebilde im binären Formengebiete", Mathem. Annalen, Bd. 30, pag. 15.

**) Für den Fall $r = 2$ und ganzzahliges s_0 ist diese Gleichung bereits von Herrn Hilbert l. c. pag. 22 aufgestellt worden.

Die Differentialgleichung gehört der Fuchs'schen Klasse an, und zwar sind die Wurzeln der determinirenden Gleichung für $x = a_\lambda$:

$$\varrho = 0, 1, \ldots, (r-2); (s_0 + s_\lambda - 1),$$

für $x = \infty$:

$$\varrho = (1 - s_0), (2 - s_0), \ldots, (r - s_0).$$

Will man die in (12) zu Grunde liegende homogene Auffassung auch in der Darstellung zum Ausdruck bringen, so spalte man x in $x_2 : x_1$, a_λ in $a_{\lambda 2} : a_{\lambda 1}$, u in $u_2 : u_1$ und setze

$$(3') \quad y(x_1, x_2) = \int_L (x_1 u_2 - x_2 u_1)^{s_0 - 1} \prod_{\lambda=1}^{r+1} (a_{\lambda 1} u_2 - a_{\lambda 2} u_1)^{s_\lambda - 1} (u_1 du_2 - u_2 du_1),$$

$$(8') \quad f(x_1, x_2) = \prod_{\lambda=1}^{r+1} (a_{\lambda 1} x_2 - a_{\lambda 2} x_1),$$

$$(9') \quad \varphi(x_1, x_2) = -\frac{1}{r} f(x_1, x_2) \sum_{\lambda=1}^{r+1} \frac{a_{\lambda 1}}{x_1 (a_{\lambda 1} x_2 - a_{\lambda 2} x_1)} \left\{ \frac{s_0 - r}{r+1} + s_\lambda \right\};$$

dann lautet die Differentialgleichung:

$$(12') \quad (s_0 - 1)_r \{ f(x_1, x_2), y(x_1, x_2) \}_r + (s_0 - 1)_{r-1} \{ \varphi(x_1, x_2), y(x_1, x_2) \}_{r-1} = 0,$$

worin f, φ, y als Formen von den bez. Ordnungen $(r+1), (r-1), (s_0 - 1)$ zu behandeln sind.

Hiernach stellen sich die hypergeometrischen Integrale (3') *als transcendente Covarianten von zwei rationalen Formen f und φ dar.*

Lassen wir den Verzweigungspunkt a_{r+1} ins Unendliche rücken, so werde

$$(3'') \quad \bar{y} = \int_L (u - x)^{s_0 - 1} \prod_{\lambda=1}^{r} (u - a_\lambda)^{s_\lambda - 1} du,$$

$$(8'') \quad \bar{f}(x) = \prod_{\lambda=1}^{r} (x - a_\lambda),$$

$$(9'') \quad \bar{\varphi}(x) = -\frac{1}{r} \bar{f}(x) \sum_{\lambda=1}^{r} \frac{1}{x - a_\lambda} \left\{ \frac{s_0 - r}{r+1} + s_\lambda \right\}$$

gesetzt; alsdann lautet die Differentialgleichung bei inhomogener Schreibweise:

$$(7'') \quad \sum_{\varkappa=0}^{r} (-1)^\varkappa \frac{(s_0 - r + \varkappa - 1)!}{(s_0 - 1)!} \cdot \left\{ \frac{(s_0 - r)(r - \varkappa + 1)}{(r+1)} \bar{f}^{(\varkappa)}(x) - r\varkappa \bar{\varphi}^{(\varkappa - 1)}(x) \right\} \frac{d^{r-\varkappa} \bar{y}}{dx^{r-\varkappa}} = 0,$$

während in der homogenen Darstellung (12') nur $a_{r+1,1} = 0$, $a_{r+1,2} = 1$ zu setzen ist.

Sehen wir nunmehr in Umkehrung des bisherigen Gedankenganges eine lineare Differentialgleichung von der Gestalt (12) als gegeben an, in der Art, dass (s_0-1) als Ordnung von y beliebig vorgeschrieben ist, und dass $f(x)$ und $\varphi(x)$ allgemeine Formen der bez. Ordnungen $(r+1)$ und $(r-1)$ darstellen, wobei indes die Linearfactoren von $f(x)$ als verschieden vorausgesetzt werden, so hat die betreffende Differentialgleichung hypergeometrische Integrale der Form (3) zu Lösungen. In der That bestimmen sich die Verzweigungswerthe $a_1, a_2, \ldots, a_{r+1}$ als Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$; und die zugehörigen Exponenten $s_1, s_2, \ldots, s_{r+1}$ gewinnen wir aus der Partialbruchzerlegung:

$$-r\,\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \sum_{\lambda=1}^{r+1} \frac{1}{x-a_\lambda}\left\{\frac{s_0-r}{r+1}+s_\lambda\right\},$$

wobei, da die Ordnung von $\varphi(x)$ um zwei Einheiten niedriger ist als die von $f(x)$, die Summe der Residuen

$$\sum_{\lambda=1}^{r+1}\left\{\frac{s_0-r}{r+1}+s_\lambda\right\} = (s_0+s_1+\cdots+s_{r+1})-r$$

verschwinden muss, also von selbst der Forderung (1) Genüge geleistet wird.

Indem wir im Folgenden stets die reellen Theile der Zahlen $s_0, s_1, \ldots, s_{r+1}$ als positive echte Brüche voraussetzen, lässt sich der Doppelumlauf L um zwei Verzweigungspunkte durch die Integration von einem zum andern ersetzen. Der genaueren Vorstellung halber nehmen wir an, dass ein durch den Nullpunkt der complexen Ebene gezogener Halbstrahl bei Drehung um denselben in positiver Richtung der Reihe nach die Punkte $a_0 \equiv x, a_1, a_2, \ldots, a_r, a_{r+1}$ trifft, die wir in derselben Reihenfolge durch sich selbst und einander nicht kreuzende Schnitte verbinden, so dass ein zwischen a_{r+1} und a_0 offenes Polygon entsteht. In Anlehnung an die bez. Dispositionen von Herrn Hossenfelder*) heisse die bei der Wanderung von a_0 nach a_{r+1} links liegende Berandung der Verzweigungsschnitte die positive, die rechts liegende die negative. In der so zerschnittenen u-Ebene ist alsdann die Function $U(u)$ nach Fixirung der Ausgangswerthe der Factoren $(u-a_\lambda)^{s_\lambda-1}$ eindeutig definirt, und zwar gilt längs des Verzweigungsschnittes $(a_{\varkappa-1}, a_\varkappa)$, wenn

$$e^{2\pi i(s_0+s_1+\cdots+s_\lambda)} = \varrho_\lambda \qquad (\lambda=0,1,\ldots,(r+1)) \tag{13}$$

gesetzt wird, wobei also $\varrho_{r+1}=1$ ist,

$$\text{längs } (a_{\varkappa-1}, a_\varkappa): \quad U^- = \varrho_{\varkappa-1}U^+. \qquad (\varkappa=1,2,\ldots,(r+1)) \tag{14}$$

*) l. c. pag. 201—202.

Wir führen nun $(r+1)$ particuläre Lösungen der Differentialgleichung (12) ein:

$$y_i = \int_x^{a_i} U(u)\,du, \qquad \big(i = 1, 2, \ldots, (r+1)\big) \tag{15}$$

wobei die Integration längs des positiven Ufers zu erstrecken ist. Zwischen denselben besteht eine homogene lineare Relation, welche wir erhalten, wenn wir das Integral

$$\int U\,du$$

von a_0 längs des positiven Ufers nach a_{r+1} und von da auf dem negativen Ufer nach a_0 zurückführen. Da sich dieser Weg durch das Unendliche auf einen Punkt zusammenziehen lässt, so folgt:

$$\sum_{x=1}^{r+1} (1 - \varrho_{x-1}) \int_{a_{x-1}}^{a_x} U\,du \equiv 0,$$

oder:

$$\sum_{x=1}^{r+1} (\varrho_{x-1} - \varrho_x) y_x \equiv 0. \tag{16}$$

Man überzeugt sich leicht davon, dass je r von den Integralen, etwa $y_1, y_2, \ldots, y_r$, ein Fundamentalsystem bilden, wenn keine der Grössen s_x gleich einer ganzen Zahl ist, — was durch unsere Annahme ohnehin ausgeschlossen ist*).

§ 2.

Die adjungirte Differentialgleichung.

Zur Aufstellung der zu (12) adjungirten Differentialgleichung dient der folgende Satz, welcher sich in der Dissertation des Verf. § 9 bewiesen findet**):

Es liege die Differentialgleichung vor:

$$\sum_{x=0}^{r} n_{r-x} \{M_x, y\}_{r-x} = 0,$$

worin die Formen y und M_x bez. die Ordnungen n und $(m-2x)$ besitzen. Bezeichnen wir mit η einen integrirenden Factor dieser Differentialgleichung, so ist η eine Form der Ordnung

$$v = (2r - 2 - m - n);$$

*) Cf. Hossenfelder, l. c. pag. 208 ff.

**) Derselbe ist gleichzeitig von Herrn Pick, Wiener Berichte, Bd. 101, pag. 893, aufgestellt worden.

und die zu der gegebenen adjungirte Differentialgleichung, welche η erfüllt, lautet:

$$\sum_{x=0}^{r} (-1)^{r-x} \nu_{r-x} \{M_x, \eta\}_{r-x} = 0.$$

Im Falle der Differentialgleichung (12) ist nun $n = (s_0 - 1)$, $m = (r+1)$, also $\nu = (r - 2 - s_0)$, oder, wenn wir der Analogie halber $\nu = (\sigma_0 - 1)$ setzen, $\sigma_0 = (r - 1 - s_0)$; und die zu (12) adjungirte Differentialgleichung lautet demgemäss:

(17) $(-1)^r(\sigma_0 - 1)_r \{f, \eta\}_r + (-1)^{r-1}(\sigma_0 - 1)_{r-1} \{\varphi, \eta\}_{r-1} = 0.$

Da sie die gleiche Structur wie (12) aufweist, so schliessen wir auf Grund einer in § 1 gemachten Bemerkung sofort, dass sie ebenfalls hypergeometrische Integrale zu Lösungen hat; und zwar sind die Verzweigungswerthe des Integranden wiederum die Punkte

$$v = x \equiv a_0, a_1, \ldots, a_r, a_{r+1}.$$

Nennen wir die ihnen zugeordneten Exponenten $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_r, \sigma_{r+1}$, so ist zunächst σ_0 identisch mit der bereits eingeführten Grösse $(\nu+1) \equiv (r-1-s_0)$; die weiteren Grössen σ_λ ergeben sich, wenn wir die Form $\left(-\varphi(x)\right)$ mit dem Ausdruck

$$-\frac{1}{r} f(x) \sum_{\lambda=1}^{r+1} \frac{1}{x - a_\lambda} \left\{\frac{\sigma_0 - r}{r+1} + \sigma_\lambda\right\}$$

identificiren, woraus hervorgeht:

$$\left\{\frac{s_0 - r}{r+1} + s_\lambda\right\} + \left\{\frac{\sigma_0 - r}{r+1} + \sigma_\lambda\right\} = 0,$$

oder:

(18) $$\sigma_\lambda = (1 - s_\lambda). \qquad \left(\lambda = 1, 2, \ldots, (r+1)\right).$$

Demnach ist der gesuchte Integrand:

(19) $$V(v) = (v-x)^{\sigma_0 - 1} \prod_{\lambda=1}^{r+1} (v - a_\lambda)^{\sigma_\lambda - 1} = (v-x)^{r-2-s_0} \prod_{\lambda=1}^{r+1} (v - a_\lambda)^{-s_\lambda};$$

und da die reellen Theile der Zahlen σ wegen unserer Voraussetzung inbetreff der Zahlen s positiv sind, so darf man die Integration von einem Verzweigungspunkte zum andern erstrecken, und erhält mithin $(r+1)$ particuläre Integrale von (17):

(20) $$\eta_x = \int_x^{a_x} V(v)\, dv, \qquad \left(x = 1, 2, \ldots, (r+1)\right)$$

zwischen welchen die Identität stattfindet:

$$\sum_{x=1}^{r+1}\left(\frac{1}{\varrho_{x-1}}-\frac{1}{\varrho_x}\right)\eta_x \equiv 0, \tag{21}$$

und von denen je r, etwa $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r$, ein Fundamentalsystem bilden. Die Function $V(v)$ hat in der zerschnittenen Ebene einen eindeutigen Verlauf, und ihre Werthe unterscheiden sich an den Ufern eines Verzweigungsschnittes um constante Factoren; und zwar gilt

$$\text{längs } (a_{x-1}, a_x): \quad V^- = \frac{1}{\varrho_{x-1}} V^+, \quad \left(x = 1,2,\ldots,(r+1)\right), \tag{22}$$

so dass die Multiplicatorsysteme der Integranden U und V zu einander reciprok sind.

Hervorhebung verdient der besondere Fall, in welchem die Differentialgleichung (12) zu sich selbst adjungirt, also mit (17) identisch wird. Derselbe tritt ein, wenn r eine gerade Zahl $(2p)$, $s_0 = \left(p-\frac{1}{2}\right)$, $s_1 = s_2 = \cdots = s_{r+1} = \frac{1}{2}$ ist. Die Differentialgleichung erhält alsdann die einfache Gestalt:

$$\{f, y\}_{2p} = 0; \tag{12*}$$

sie wird integrirt durch die $(2p+1)$ Perioden eines hyperelliptischen Integrals erster Gattung vom Geschlechte p:

$$y_i = \int_x^{a_i} \frac{(u-x)^{p-\frac{3}{2}}\, du}{\sqrt{f(u)}}, \quad \left(i = 1,2,\ldots,(2p+1)\right), \tag{15*}$$

zwischen denen die Relation

$$\sum_{i=1}^{2p+1} (-1)^i y_i \equiv 0 \tag{16*}$$

besteht*). — In diesem Umstande, dass obige Differentialgleichung zu sich selbst adjungirt ist, liegt, wie man sogleich erschliesst, die Existenz bilinearer Relationen unter den Perioden der hyperelliptischen Integrale begründet.

*) Die Differentialgleichungen der Perioden der hyperelliptischen Integrale hat Herr Fuchs studirt in einer Abhandlung in Crelle's Journal, Bd. 71.

§ 3.

Aufstellung der bilinearen Relationen.

Als Fundamentalsysteme von Integralen der beiden zu einander adjungirten Differentialgleichungen (12) und (17) wählen wir die

$$y_i = \int_x^{a_i} U(u)\, du$$

und

$$(i, x = 1, 2, \ldots, r).$$

$$\eta_x = \int_x^{a_x} V(v)\, dv.$$

Bilden nun die Functionen $\widetilde{\eta}_1, \widetilde{\eta}_2, \ldots, \widetilde{\eta}_r$ ein System von Integralen der Gleichung (17), welche den Lösungen $y_1, y_2, \ldots, y_r$ von (12) adjungirt sind, so finden bekanntlich unter ihnen die Relationen statt:

$$(23) \qquad \begin{cases} \sum_{i=1}^{r} y_i \widetilde{\eta}_i^{(\lambda)} = 0, & \big(\lambda = 0, 1, \ldots, (r-2)\big) \\ \sum_{i=1}^{r} y_i \widetilde{\eta}_i^{(r-1)} = \frac{(-1)^{r-1} r!}{f(x)}. \end{cases}$$

Weiter aber sind die Fundamentalsysteme der η und $\widetilde{\eta}$ durch lineare Gleichungen

$$\widetilde{\eta}_i = \sum_{x=1}^{r} C_{ix}\, \eta_x \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

mit constanten Coefficienten C_{ix} verbunden, deren Determinante von Null verschieden ist. Folglich existirt ein System von bilinearen Relationen unter den hypergeometrischen Integralen $(y_1, y_2, \ldots, y_r)$ und $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r)$ und ihren Ableitungen, der Gestalt:

$$(24) \qquad \sum_{i,x=1}^{r} C_{ix} y_i \eta_x^{(\lambda)} = 0, \qquad \big(\lambda = 0, 1, \ldots, (r-2)\big)$$

$$(25) \qquad \sum_{i,x=1}^{r} C_{ix} y_i \eta_x^{(r-1)} = \frac{C}{f(x)}.$$

Hier sind aber die Coefficienten C_{ix} nicht nur unabhängig von $x \equiv a_0$, sondern, wie eine kleine Ueberlegung zeigt, auch von den andern Verzweigungspunkten $a_1, a_2, \ldots, a_{r+1}$; sie stellen sich mithin ausschliesslich als Functionen der Zahlen $s_0, s_1, \ldots, s_{r+1}$ dar.

Zu ihrer näheren Bestimmung ziehen wir die linearen Transformationen heran, welche die Fundamentalsysteme der y und η bei

Umlauf von x um einen der singulären Punkte erfahren. Man überzeugt sich leicht davon, dass bei unserer Wahl der Verzweigungsschnitte ein positiver Umlauf von x um a_λ folgende Substitutionen der Integrale veranlasst*):

$$(26_1)\qquad \begin{cases} \bar{y}_i = y_i - (1-e^{2\pi i s_\lambda})\, y_\lambda, & i < \lambda, \\ \bar{y}_i = e^{2\pi i (s_0+s_i)} y_i, & i = \lambda, \\ \bar{y}_i = y_i - e^{2\pi i s_0}(1-e^{2\pi i s_\lambda})\, y_\lambda, & i > \lambda, \end{cases}$$

$$(26_2)\qquad \begin{cases} \bar{\eta}_\varkappa = \eta_\varkappa - (1-e^{-2\pi i s_\lambda})\, \eta_\lambda, & \varkappa < \lambda, \\ \bar{\eta}_\varkappa = e^{-2\pi i (s_0+s_\varkappa)} \eta_\varkappa, & \varkappa = \lambda, \\ \bar{\eta}_\varkappa = \eta_\varkappa - e^{-2\pi i s_0}(1-e^{-2\pi i s_\lambda})\, \eta_\lambda, & \varkappa > \lambda, \end{cases}$$

worin $\bar{y}_i$, $\bar{\eta}_\varkappa$ die Werthe von y_i, $\eta_\varkappa$ nach dem Umlauf bezeichnen. Durch denselben geht die Relation

$$\sum_{i,\varkappa} C_{i\varkappa}\, y_i \eta_\varkappa = 0$$

in

$$\sum_{i,\varkappa} C_{i\varkappa}\, \bar{y}_i \bar{\eta}_\varkappa = 0$$

über, welche ihrerseits nach Einführung der Substitutionen (26) die Form

$$\sum_{i,\varkappa} \bar{C}_{i\varkappa} y_i \eta_\varkappa = 0$$

erhält. Wir behaupten nun, dass

$$(27)\qquad \bar{C}_{i\varkappa} = C_{i\varkappa} \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \ldots, r)$$

sein muss. Denn da der Umlauf die Relationen (24) und (25) in die folgenden:

$$(24')\qquad \sum_{i,\varkappa} \bar{C}_{i\varkappa} y_i \eta_\varkappa^{(\lambda)} = 0, \qquad \big(\lambda = 0, 1, \ldots, (r-2)\big)$$

$$(25')\qquad \sum_{i,\varkappa} \bar{C}_{i\varkappa} y_i \eta_\varkappa^{(r-1)} = \frac{C}{f(x)}$$

überführt, so ergiebt sich durch Subtraction:

$$\sum_{\varkappa=1}^{r} \eta_\varkappa^{(\lambda)} \sum_{i=1}^{r} (C_{i\varkappa} - \bar{C}_{i\varkappa})\, y_i = 0, \qquad \big(\lambda = 0, 1, \ldots, (r-1)\big)$$

mithin, da die Determinante der $\eta_\varkappa^{(\lambda)}$ von Null verschieden ist:

---

*) Cf. Hossenfelder, l. c. pag. 202—206.

$$\sum_{i=1}^{r}(C_{i\varkappa}-\bar{C}_{i\varkappa})\,y_i=0, \qquad (\varkappa=1,2,\ldots,r)$$

und, da die y_i linear-unabhängig sind:

$$\bar{C}_{i\varkappa}=C_{i\varkappa}. \qquad (i,\varkappa=1,2,\ldots,r)$$

Führt man die hier angedeutete Transformation aus und stellt die Forderung (27) auf, so erhält man nach einigen Reductionen folgendes System von Gleichungen zur Bestimmung der Coefficienten $C_{i\varkappa}$:

$$\left.\begin{aligned}
\text{I.}\quad & (1-e^{2\pi i(s_0+s_\lambda)})C_{\lambda\varkappa}+(1-e^{2\pi i s_\lambda})\sum_{\nu=1}^{\lambda-1}C_{\nu\varkappa} \\
& \qquad +e^{2\pi i s_0}\,(1-e^{2\pi i s_\lambda})\sum_{\nu=\lambda+1}^{r}C_{\nu\varkappa}=0, \\
\text{II.}\quad & (1-e^{-2\pi i(s_0+s_\lambda)})C_{\varkappa\lambda}+(1-e^{-2\pi i s_\lambda})\sum_{\nu=1}^{\lambda-1}C_{\varkappa\nu} \\
& \qquad +e^{-2\pi i s_0}(1-e^{-2\pi i s_\lambda})\sum_{\nu=\lambda+1}^{r}C_{\varkappa\nu}=0,
\end{aligned}\right\}$$

$$(\varkappa,\lambda=1,2,\ldots,r;\ \varkappa\neq\lambda)$$

$$\text{III.}\quad \sum_{\nu=1}^{\lambda-1}C_{\nu\lambda}+e^{2\pi i s_0}\sum_{\nu=\lambda+1}^{r}C_{\nu\lambda}-e^{2\pi i s_0}\sum_{\nu=1}^{\lambda-1}C_{\lambda\nu}-\sum_{\nu=\lambda+1}^{r}C_{\lambda\nu}=0.$$

$$(\lambda=1,2,\ldots,r).$$

Die Auflösung dieser Gleichungen lässt sich ohne Schwierigkeit bewerkstelligen; wir beschränken uns daher darauf, das Resultat anzugeben, in welchem bereits über den allen $C_{i\varkappa}$ gemeinschaftlichen Proportionalitätsfactor verfügt ist. Man erhält:

$$(28)\quad \begin{cases}
C_{ii}=\dfrac{(-1)^{r+1}}{4}e^{\pi i s_{r+1}}(\varrho_{i-1}\varrho_r-\varrho_i)\left(\dfrac{1}{\varrho_{i-1}}-\dfrac{1}{\varrho_i}\right), & \\
C_{i\varkappa}=\dfrac{(-1)^{r+1}}{4}e^{\pi i s_{r+1}}\quad(\varrho_{i-1}-\varrho_i)\left(\dfrac{1}{\varrho_{\varkappa-1}}-\dfrac{1}{\varrho_\varkappa}\right), & \varkappa<i, \\
C_{i\varkappa}=\dfrac{(-1)^{r+1}}{4}e^{-\pi i s_{r+1}}\,(\varrho_{i-1}-\varrho_i)\left(\dfrac{1}{\varrho_{\varkappa-1}}-\dfrac{1}{\varrho_\varkappa}\right), & \varkappa>i,
\end{cases}$$

wobei die Werthe der Grössen ϱ_λ aus (13) zu entnehmen sind.

Wir lassen nun den Punkt a_{r+1} ins Unendliche rücken und bezeichnen die Summe

$$s_0+s_1+\cdots+s_r=s,$$

so dass $s_{r+1}=(r-s)$ zu setzen ist. Alsdann liefert eine kleine Umformung von (28):

$$(28') \quad \begin{cases} C_{ii} = \sin(\pi s_i)\sin\big(\pi(s-s_i)\big), \\ C_{ix} = -e^{\pi i(s_x-s_i-s)}\dfrac{\varrho_i}{\varrho_x}\sin(\pi s_i)\sin(\pi s_x), & x<i, \\ C_{ix} = -e^{\pi i(s_x-s_i+s)}\dfrac{\varrho_i}{\varrho_x}\sin(\pi s_i)\sin(\pi s_x); & x>i, \end{cases}$$

und die Relationen (24) lauten jetzt:

$$\sum_{i,x=1}^{r} C_{ix}\int_{a_0}^{a_i}(u-a_0)^{s_0-1}\prod_{\lambda=1}^{r}(u-a_\lambda)^{s_\lambda-1}\,du \cdot\int_{a_0}^{a_x}(v-a_0)^{-s_0+\nu}\prod_{\lambda=1}^{r}(v-a_\lambda)^{-s_\lambda}dv = 0.$$
$$\big(\nu=0,1,\ldots,(r-2)\big).$$

Beschränken wir hier den laufenden Index ν auf die Werthe

$$\nu=\mu,\ (\mu+1),\ldots,(r-2),$$

so gilt diese Formel, so lange der reelle Theil von s_0 kleiner als $(\mu+1)$ ist. Ersetzt man daher s_0 durch $(s_0+\mu)$ und schreibt für ν $(\nu+\mu)$, so folgt, da das Verhältniss der C_{ix} durch diese Verschiebung keine Veränderung erleidet, allgemeiner:

$$\sum_{i,x=1}^{r} C_{ix}\int_{a_0}^{a_i}(u-a_0)^{s_0-1+\mu}\prod_{\lambda=1}^{r}(u-a_\lambda)^{s_\lambda-1}\,du \cdot\int_{a_0}^{a_x}(v-a_0)^{-s_0+\nu}\prod_{\lambda=1}^{r}(v-a_\lambda)^{-s_\lambda}dv = 0;$$
$$\big(\mu,\ \nu\geqq 0,\ (\mu+\nu)\leqq(r-2)\big)$$

und durch lineare Combination dieser Gleichungen ergiebt sich, wenn wir

$$(29) \quad \begin{cases} Y_{\mu i} = \displaystyle\int_{a_0}^{a_i}\prod_{\lambda=0}^{r}(u-a_\lambda)^{s_\lambda-1}u^\mu\,du, \\ H_{\nu x} = \displaystyle\int_{a_0}^{a_x}\prod_{\lambda=0}^{r}(v-a_\lambda)^{-s_\lambda}v^\nu\,dv \end{cases}$$

setzen, das System von $\frac{(r-1)r}{2}$ Relationen:

$$\sum_{i,x=1}^{r} C_{ix} Y_{\mu i} H_{\nu x} = 0. \quad \left(\mu,\ \nu \geqq 0,\ (\mu+\nu) \leqq (r-2)\right) \tag{30}$$

Wir wenden uns nun zur genaueren Formulirung der Relation (25). Nehmen wir wieder $\lim a_{r+1} = \infty$, und führen die Bezeichnung ein:

$$\xi_x = \int_x^{a_x} (v-x)^{r-1-s_0} \prod_{\lambda=1}^{r} (v-a_\lambda)^{-s_\lambda}\, dv,$$

so lassen sich die Gleichungen (24) und (25) wie folgt schreiben:

$$\sum_{i,x} C_{ix} Y_{0i} \xi_x^{(\lambda)} = 0, \qquad \left(\lambda = 1, 2, \ldots, (r-1)\right) \tag{24''}$$

$$\sum_{i,x} C_{ix} Y_{0i} \xi_x^{(r)} = \frac{C}{\bar{f}(x)}, \tag{25''}$$

wo wieder

$$\bar{f}(x) = \prod_{\lambda=1}^{r} (x-a_\lambda). \tag{8''}$$

Wie die Formeln (3'') und (7'') erkennen lassen, genügen die ξ_x einer Differentialgleichung der Gestalt:

$$\sum_{\lambda=0}^{r} \psi_\lambda(x)\, \xi^{(\lambda)} = 0,$$

worin $\psi_r(x) = \bar{f}(x)$, $\psi_\lambda(x)$ eine ganze Function von der Ordnung λ, also speciell ψ_0 eine Constante ist. In Verbindung mit (24'') und (25'') geht daraus eine Beziehung hervor:

$$\sum_{i,x} C_{ix} Y_{0i} \xi_x = C',$$

oder, unter nochmaliger Anwendung von (24''):

$$\sum_{i,x} C_{ix} Y_{0i} H_{r-1,x} = C_r. \tag{31}$$

Hier ist C_r, oder ausführlicher geschrieben:

$$C_r \begin{Bmatrix} a_0, & a_1, & a_2, & \ldots, & a_r \\ s_0, & s_1, & s_2, & \ldots, & s_r \end{Bmatrix}$$

thatsächlich von a_0 unabhängig. Lässt man behufs Bestimmung von C_r a_0 in a_1 hineinrücken, so ergiebt sich leicht die Recursionsgleichung:

$$C_r \begin{Bmatrix} a_0, & a_1, \ldots, & a_r \\ s_0, & s_1, \ldots, & s_r \end{Bmatrix} = - C_{r-1} \begin{Bmatrix} a_1 & , a_2, \ldots, & a_r \\ (s_0+s_1-1), & s_2, \ldots, & s_r \end{Bmatrix}$$

$$= \cdots = (-1)^{r-1} C_1 \begin{Bmatrix} a_{r-1} & , a_r \\ (s_0+s_1+\cdots+s_{r-1}-r+1), & s_r \end{Bmatrix}.$$

Nun lautet im Falle $r = 1$ die Relation (31):

$$C_{11}\, Y_{01}\, \mathsf{H}_{01} = C_1 \begin{Bmatrix} a_0, & a_1 \\ s_0, & s_1 \end{Bmatrix},$$

und zwar ist

$$C_{11} = \sin(\pi s_0) \sin(\pi s_1),$$

$$Y_{01} = \int_{a_0}^{a_1} (u-a_0)^{s_0-1} (u-a_1)^{s_1-1}\, du = (a_1-a_0)^{s_0+s_1-1} e^{\pi i (s_1-1)} \frac{\Gamma(s_0)\,\Gamma(s_1)}{\Gamma(s_0+s_1)},$$

$$\mathsf{H}_{01} = \int_{a_0}^{a_1} (v-a_0)^{-s_0} (v-a_1)^{-s_1}\, dv = (a_1-a_0)^{1-s_0-s_1} e^{-\pi i s_1} \frac{\Gamma(1-s_0)\,\Gamma(1-s_1)}{\Gamma(2-s_0-s_1)}.$$

Daraus ergiebt sich:

$$C_1 \begin{Bmatrix} a_0, & a_1 \\ s_0, & s_1 \end{Bmatrix} = \frac{\pi \sin(\pi . \overline{s_0+s_1})}{(s_0+s_1-1)},$$

mithin

$$C_r \begin{Bmatrix} a_0, \ldots, & a_r \\ s_0, \ldots, & s_r \end{Bmatrix} = \frac{\pi \sin(\pi s)}{(s-r)};$$

endlich erschliesst man hieraus sofort die allgemeinere Gleichung:

$$(32) \qquad \sum_{i,\varkappa=1}^{r} C_{i\varkappa}\, Y_{\mu i}\, \mathsf{H}_{\nu\varkappa} = \frac{\pi \sin(\pi s)}{(s+\mu-r)} \cdot \qquad (\mu+\nu) = (r-1).$$

Damit sind wir zu folgendem Resultat gelangt:

Constituirt man mit den Zahlen $s_0, s_1, \ldots, s_r$, deren reelle Theile positive echte Brüche sind, die hypergeometrischen Integrale

$$Y_{\mu i} = \int_{a_0}^{a_i} \prod_{\lambda=0}^{r} (u-a_\lambda)^{s_\lambda-1} u^\mu\, du, \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\ldots,r \\ \mu=0,1,2,\ldots \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{H}_{\nu\varkappa} = \int_{a_0}^{a_\varkappa} \prod_{\lambda=0}^{r} (v-a_\lambda)^{-s_\lambda} v^\nu\, dv, \qquad \begin{pmatrix} \varkappa=1,2,\ldots,r \\ \nu=0,1,2,\ldots \end{pmatrix}$$

so erfüllen dieselben die $\frac{r \cdot r+1}{2}$ bilinearen Relationen:

$$\begin{cases} \sum_{i,x=1}^{r} C_{ix}\, Y_{\mu i}\, H_{\nu x} = 0, & (\mu+\nu) < (r-1) \\ \sum_{i,x=1}^{r} C_{ix}\, Y_{\mu i}\, H_{\nu x} = \frac{\pi^r \sin(\pi s)}{(s+\mu-r)}, & (\mu+\nu) = (r-1) \end{cases}$$

in denen die Coefficienten C_{ix} die in (28′) angegebenen Werthe haben.

Indem wir $r = 2p$, $s_0 = s_1 = \cdots = s_r = \frac{1}{2}$ setzen, erhalten wir den Specialfall der hyperelliptischen Perioden. *Die Integrale*

$$(29^*) \qquad J_{\mu i} = \int_{a_0}^{a_i} \frac{u^\mu\, du}{\sqrt{\prod_{\lambda=0}^{2p}(u-a_\lambda)}}$$

erfüllen die bilinearen Relationen:

$$(30^*) \qquad \sum_{\substack{i,x=1 \\ i \cdot x}}^{2p} (-1)^{i+x} \{J_{\mu i} J_{\nu x} - J_{\mu x} J_{\nu i}\} = 0, \qquad (\mu+\nu) < (2p-1)$$

$$(32^*) \qquad \sum_{\substack{i,x=1 \\ i<x}}^{2p} (-1)^{i+x} \{J_{\mu i} J_{\nu x} - J_{\mu x} J_{\nu i}\} = \frac{2\pi i}{(\mu-\nu)}, \quad (\mu+\nu) = (2p-1).$$

Die Anzahl dieser Gleichungen ist p^2; sie umfassen für $\mu, \nu = 0, 1, \ldots, (p-1)$ sämmtliche $\frac{p\cdot(p-1)}{2}$ Beziehungen, die zwischen den Perioden der Integrale erster Gattung existiren, für $\mu = 0, 1, \ldots, (p-1)$, $\nu = p, (p+1), \ldots, (2p-1-\mu)$ noch $\frac{p\cdot(p+1)}{2}$ von den p^2 Relationen, die es unter den Perioden je eines Integrals erster und eines zweiter Gattung giebt. — Setzt man

$$\left.\begin{aligned} K_{\mu,\lambda} &= -J_{\mu,2\lambda-1} - \sum_{x=2\lambda+1}^{2p} (-1)^x J_{\mu x} \\ K_{\mu,p+\lambda} &= \sum_{x=2\lambda}^{2p} (-1)^x J_{\mu x}, \end{aligned}\right\} \quad \begin{pmatrix} \mu = 0, 1, \ldots, (2p-1) \\ \lambda = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix}$$

so geht die alternirende bilineare Form auf der linken Seite von (30*) in die canonische Gestalt

$$\sum_{\lambda=1}^{p} \{K_{\mu,\lambda} K_{\nu,p+\lambda} - K_{\nu,\lambda} K_{\mu,p+\lambda}\}$$

über*).

) Die Formeln (30), soweit sie sich auf Integrale erster Gattung beziehen,

Indem man die überzähligen Integrale y_{r+1} und η_{r+1} heranzieht, gelingt es, die Relation

$$\sum_{i,x=1}^{r} C_{ix}\, y_i \eta_x = 0$$

auf eine symmetrische Gestalt zu bringen. Setzen wir zur Abkürzung

$$(\varrho_{i-1} - \varrho_i) = \alpha_i, \qquad \left(\frac{1}{\varrho_{x-1}} - \frac{1}{\varrho_x}\right) = \beta_x,$$

so bestehen nach (16) und (21) die Identitäten:

$$\sum_{i=1}^{r+1} \alpha_i y_i \equiv 0, \tag{16}$$

$$\sum_{x=1}^{r+1} \beta_x \eta_x \equiv 0; \tag{21}$$

und wir können, wie die Werthe der C_{ix} in (28) zeigen, unsere Relation jetzt so schreiben:

$$e^{\pi i s_{r+1}} \sum_{\substack{i,x=1 \\ i>x}}^{r} \alpha_i y_i \beta_x \eta_x + e^{-\pi i s_{r+1}} \sum_{\substack{i,x=1 \\ i<x}}^{r} \alpha_i y_i \beta_x \eta_x$$

$$+ 4 \sum_{i=1}^{r} \sin(\pi s_i) \sin\left(\pi \overline{s_i + s_{r+1}}\right) y_i \eta_i = 0.$$

Die Anordnung nach $\cos(\pi s_{r+1})$ und $\sin(\pi s_{r+1})$ liefert:

$$\cos(\pi s_{r+1}) \cdot C + 4 \sin(\pi s_{r+1}) \sum_{i=1}^{r} \sin(\pi s_i) \cos(\pi s_i)\, y_i \eta_i$$

$$- i \sin(\pi s_{r+1}) \cdot S = 0,$$

worin

$$C = \sum_{\substack{i,x=1 \\ i>x}}^{r} \alpha_i y_i \beta_x \eta_x + \sum_{\substack{i,x=1 \\ i<x}}^{r} \alpha_i y_i \beta_x \eta_x + 4 \sum_{i=1}^{r} \sin^2(\pi s_i) y_i \eta_i,$$

$$S = \sum_{\substack{i,x=1 \\ i<x}}^{r} \alpha_i y_i \beta_x \eta_x - \sum_{\substack{i,x=1 \\ i>x}}^{r} \alpha_i y_i \beta_x \eta_x$$

gesetzt ist. Da nun

---

sowie die Transformation auf die canonische Gestalt hat bereits Herr Richard Fuchs angegeben; vergl. „Ueber die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale als Functionen eines Verzweigungspunktes" Crelle's Journal, Bd. 119, pag. 15—16.

$$\alpha_i \beta_i = 4 \sin^2 (\pi s_i)$$

ist, so ergiebt sich

$$C = \sum_{i,x=1}^{r} \alpha_i y_i \beta_x \eta_x = \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i y_i\right)\left(\sum_{x=1}^{r} \beta_x \eta_x\right)$$
$$= \alpha_{r+1} y_{r+1} \beta_{r+1} \eta_{r+1} = 4 \sin^2 (\pi s_{r+1}) y_{r+1} \eta_{r+1}.$$

Ferner darf man in dem Ausdruck für S die Summationen bis $(r+1)$ führen, so dass

$$S = \sum_{\substack{i,x=1 \\ i<x}}^{r+1} \{\alpha_i y_i \beta_x \eta_x - \alpha_x y_x \beta_i \eta_i\}$$

wird. Durch diese Umformung reducirt sich die Relation nach Division mit $\sin (\pi s_{r+1})$ auf folgende symmetrische Gestalt:

$$2i \sum_{i=1}^{r+1} \sin (2\pi s_i) y_i \eta_i + \sum_{\substack{i,x=1 \\ i<x}}^{r+1} \{\alpha_i y_i \beta_x \eta_x - \alpha_x y_x \beta_i \eta_i\} = 0.$$

Allgemein erhalten wir die $\frac{r.(r-1)}{2}$ *Gleichungen:*

$$(33)\quad 2i \sum_{i=1}^{r+1} \sin (2\pi s_i) y_i^{(\mu)} \eta_i^{(\nu)} + \sum_{\substack{i,x=1 \\ i<x}}^{r+1} \{\alpha_i y_i^{(\mu)} \beta_x \eta_x^{(\nu)} - \alpha_x y_x^{(\mu)} \beta_i \eta_i^{(\nu)}\} = 0.$$
$$(\mu + \nu) \leq (r-2).$$

Wir wollen dieses Resultat, soweit es sich auf überall endliche Integrale bezieht, mit einer gewissen Modification der bisherigen Auffassung noch etwas anders formuliren. Wir gehen jetzt davon aus, als das ursprüngliche Element die „Multiplicatoren" $\varrho_0, \varrho_1, \ldots, \varrho_r, \varrho_{r+1}$ zu betrachten, welche an den Schnitten

$$(a_0, a_1), (a_1, a_2), \ldots, (a_r, a_{r+1}), (a_{r+1}, a_0)$$

willkürlich vorgeschrieben sind, bis auf ϱ_{r+1}, welcher den Werth 1 haben soll. Der Werth der Zahlen s_x, welche den Gleichungen

$$e^{2\pi i (s_0 + s_1 + \cdots + s_x)} = \varrho_x \qquad (x = 0, 1, \ldots, (r+1))$$

genügen, werde dadurch eindeutig fixirt, dass man ihre reellen Theile als positive echte Brüche oder gleich 1 wählt; und zwar habe das Zeichen ε_x den Werth 0, wenn der reelle Theil von s_x kleiner als 1 ausfällt, während ε_x gleich 1 gesetzt werde, wenn jener gleich 1 ist. Setzen wir

$$s = \sum_{x=0}^{r+1} s_x, \qquad \varepsilon = \sum_{x=0}^{r+1} \varepsilon_x,$$

so ist s eine ganze Zahl, und zwar

$$\varepsilon \leqq s \leqq (r+2),$$

wenn aber sämmtliche $\varepsilon_\varkappa$ verschwinden,

$$1 \leqq s \leqq (r+1).$$

Wir setzen nun speciell voraus, dass

$$(2+\varepsilon) \leqq s \leqq r$$

sei; dann sind die allgemeinen überall endlichen Integrale, welche zu den Multiplicatorsystemen

$$(\varrho_0, \varrho_1, \ldots, \varrho_r, \varrho_{r+1})$$

und

$$\left(\frac{1}{\varrho_0}, \frac{1}{\varrho_1}, \ldots, \frac{1}{\varrho_r}, \frac{1}{\varrho_{r+1}}\right)$$

gehören:

$$Y = \int \prod_{\lambda=0}^{r+1} (a_{\lambda 1} u_2 - a_{\lambda 2} u_1)^{\varrho_\lambda - 1} \cdot F_{r-s}(u_1, u_2) \cdot (u_1 du_2 - u_2 du_1),$$

resp.:

$$\mathsf{H} = \int \prod_{\lambda=0}^{r+1} (a_{\lambda 1} v_2 - a_{\lambda 2} v_1)^{\varrho_\lambda - s_\lambda} \cdot G_{s-2-s}(v_1, v_2) \cdot (v_1 dv_2 - v_2 dv_1),$$

worin F und G beliebige ganze rationale Formen von der Ordnung ihres Index bedeuten *).

Unser Resultat lässt sich jetzt in einfachster Weise so aussprechen:

Die Perioden der überall endlichen Integrale

$$(\varrho_{i-1} - \varrho_i) \int_{a_0}^{a_i} dY = Y_i,$$

$$\left(\frac{1}{\varrho_{\varkappa-1}} - \frac{1}{\varrho_\varkappa}\right) \int_{a_0}^{a_\varkappa} d\mathsf{H} = \mathsf{H}_\varkappa \qquad \left(i, \varkappa = 1, 2, \ldots, (r+1)\right)$$

genügen den linearen Identitäten:

$$\sum_{i=1}^{r+1} Y_i \equiv 0, \quad \sum_{\varkappa=1}^{r+1} \mathsf{H}_\varkappa \equiv 0,$$

und befriedigen die bilineare Relation:

$$(34) \qquad i \sum_{\varkappa=1}^{r+1} \operatorname{cotg}(\pi s_\varkappa)\, Y_\varkappa \mathsf{H}_\varkappa + \sum_{\substack{i,\varkappa=1 \\ i<\varkappa}}^{r+1} (Y_i \mathsf{H}_\varkappa - Y_\varkappa \mathsf{H}_i) = 0.$$

---

*) Vergl. hierzu Hurwitz, l, c. pag. 5.

§ 4.

Die Determinanten der Coefficienten und der Integrale.

Setzen wir zur Abkürzung

$$\sum_{i,\varkappa=1}^{r} C_{i\varkappa}\, Y_{\mu i}\, \mathsf{H}_{\nu\varkappa} = \Gamma_{\mu\nu}, \quad \big(\mu,\nu = 0,1,\ldots,(r-1)\big) \tag{35}$$

so haben wir in den Gleichungen (30) und (32) gefunden, dass

$$\Gamma_{\mu\nu} = 0 \qquad \text{für } (\mu+\nu) < (r-1), \tag{30}$$

$$\Gamma_{\mu\nu} = \frac{\pi \sin(\pi s)}{(s+\mu-r)} \text{ für } (\mu+\nu) = (r-1) \tag{32}$$

stattfindet.[1] Da die Integrale $Y_{\mu i}$ und $\mathsf{H}_{\nu\varkappa}$, als Functionen von a_0 aufgefasst, dieselben Umlaufstransformationen erfahren, wie Y_{0i} resp. $\mathsf{H}_{0\varkappa}$, so können wir sofort schliessen, dass die $\Gamma_{\mu\nu}$ allgemein eindeutige, also, da nur polare Unstetigkeiten auftreten, rationale Functionen von a_0 und entsprechend den andern Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_r$ sind, — ohne dass uns die bisher angewandte Methode in den Stand setzt, ihre Werthe in einfacher Weise zu berechnen. — Doch lässt sich der Werth der Determinante

$$\Gamma = |\Gamma_{\mu\nu}| \qquad \big(\mu,\nu = 0,1\ldots,(r-1)\big)$$

wegen der bei $(\mu+\nu) < (r-1)$ verschwindenden Elemente $\Gamma_{\mu\nu}$ unmittelbar angeben; es ist

$$\Gamma = (-1)^{\frac{r.r-1}{2}} \prod_{\mu=0}^{r-1} \Gamma_{\mu,r-1-\mu},$$

also

$$\Gamma = (-1)^{\frac{r.r-1}{2}}\, \pi^r \sin^r(\pi s)\, \frac{(s-r-1)!}{(s-1)!}. \tag{36}$$

Setzen wir ferner:

$$C = |C_{i\varkappa}|, \quad Y = |Y_{\mu i}|, \quad \mathsf{H} = |\mathsf{H}_{\nu\varkappa}|, \quad \begin{pmatrix} i,\varkappa = 1,2,\ldots,r \\ \mu,\nu = 0,1,\ldots,(r-1) \end{pmatrix}$$

so geht aus (35) hervor:

$$C \,.\, Y \,.\, \mathsf{H} = \Gamma. \tag{37}$$

Wir wollen zunächst die Determinante C berechnen. Indem man aus ihren Horizontal- und Verticalreihen gewisse Factoren absondert, kann man sie leicht auf die Form bringen:

$$C = (-1)^r \prod_{\varkappa=1}^{r} \sin^2(\pi s_\varkappa) \,.\, \Delta_r\{\varepsilon;\, c_1, c_2, \ldots, c_r\},$$

worin Δ_r die folgende Determinante bedeutet:

$$\Delta_r\{\varepsilon;\ c_1, c_2, \ldots, c_r\} = \begin{vmatrix} c_1 & \varepsilon & \varepsilon & \cdots & \varepsilon & \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon} & c_2 & \varepsilon & \cdots & \varepsilon & \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon} & \frac{1}{\varepsilon} & c_3 & \cdots & \varepsilon & \varepsilon \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{\varepsilon} & \frac{1}{\varepsilon} & \frac{1}{\varepsilon} & \cdots & c_{r-1} & \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon} & \frac{1}{\varepsilon} & \frac{1}{\varepsilon} & \cdots & \frac{1}{\varepsilon} & c_r \end{vmatrix},$$

und in unserem Falle

$$\varepsilon = e^{\pi i s}, \quad c_x = -\frac{\sin \pi(s - s_x)}{\sin(\pi s_x)}$$

ist. — Entwickelt man in den einfachsten Fällen $r = 1, 2, 3, \ldots$ die Determinante Δ_r unter Beibehaltung der Zeichen $\varepsilon, c_1, \ldots, c_r$, und formt die Resultate in geeigneter Weise um, so findet man durch Induction das Bildungsgesetz:

$$(38) \qquad \Delta_r = \frac{1}{(1-\varepsilon^2)}\left\{\prod_{x=1}^{r}(c_x - \varepsilon) - \varepsilon^2 \prod_{x=1}^{r}\left(c_x - \frac{1}{\varepsilon}\right)\right\}.$$

Wir nehmen dasselbe für die Determinanten der Grade 1, 2, ..., $(r-1)$ als richtig an, und wollen zeigen, dass es auch für den Grad r, mithin allgemein, gilt. — Die Subdeterminante von c_1 in Δ_r hat den Werth

$$\Delta_{r-1}\{\varepsilon;\ c_2, c_3, \ldots, c_r\};$$

bilden wir also die Differenz

$$\Delta' = \Delta_r\{\varepsilon; c_1, c_2, \ldots, c_r\} - (c_1 - 1)\Delta_{r-1}\{\varepsilon; c_2, c_3, \ldots, c_r\},$$

so entsteht Δ' aus Δ_r, wenn wir darin an Stelle von c_1 1 eintragen. Offenbar ändert sich der Werth von Δ' nicht, wenn wir sämmtliche Elemente der ersten Horizontal- und Verticalreihe durch 1 ersetzen. Subtrahiren wir nun die erste Horizontalreihe von allen anderen, so reducirt sich Δ' auf die Determinante $(r-1)$-ten Grades:

$$\begin{vmatrix} (c_2 - 1) & (\varepsilon - 1) & \cdots & (\varepsilon - 1) \\ \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) & (c_3 - 1) & \cdots & (\varepsilon - 1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) & \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) & \cdots & (c_r - 1) \end{vmatrix}.$$

Multipliciren wir aber die Horizontalreihen der letzteren mit $\frac{\sqrt{\varepsilon}\, i}{\varepsilon - 1}$, so zeigt sich, dass

$$\Delta' = \left(\frac{\varepsilon - 1}{\sqrt{\varepsilon}\, i}\right)^{r-1} \Delta_{r-1}\left\{\sqrt{\varepsilon}\, i;\ (c_2 - 1)\frac{\sqrt{\varepsilon}\, i}{\varepsilon - 1}, \cdots, (c_r - 1)\frac{\sqrt{\varepsilon}\, i}{\varepsilon - 1}\right\}$$

ist, wodurch wir die Recursionsformel erlangt haben:

$$\Delta_r\{\varepsilon;\ c_1, c_2, \ldots, c_r\} = (c_1-1)\Delta_{r-1}\{\varepsilon;\ c_2, \ldots, c_r\}$$
$$+\left(\frac{\varepsilon-1}{\sqrt{\varepsilon}\,i}\right)^{r-1}\Delta_{r-1}\left\{\sqrt{\varepsilon}\,i;\ (c_2-1)\frac{\sqrt{\varepsilon}\,i}{\varepsilon-1}, \ldots, (c_r-1)\frac{\sqrt{\varepsilon}\,i}{\varepsilon-1}\right\}.$$

Auf Grund unserer Voraussetzung ist nun der zweite Term der rechten Seite gleich:

$$\left(\frac{\varepsilon-1}{\sqrt{\varepsilon}\,i}\right)^{r-1}\cdot\frac{1}{1+\varepsilon}\left\{\prod_{x=2}^{r}\left[(c_x-1)\frac{\sqrt{\varepsilon}\,i}{\varepsilon-1}-\sqrt{\varepsilon}\,i\right]+\varepsilon\prod_{x=2}^{r}\left[(c_x-1)\frac{\sqrt{\varepsilon}\,i}{\varepsilon-1}-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}\,i}\right]\right\}$$
$$=\frac{1}{1+\varepsilon}\left\{\prod_{x=2}^{r}(c_x-\varepsilon)+\varepsilon\prod_{x=2}^{r}\left(c_x-\frac{1}{\varepsilon}\right)\right\}.$$

Daher wird

$$\Delta_r = \frac{(c_1-1)}{1-\varepsilon^2}\prod_{x=2}^{r}(c_x-\varepsilon)-\frac{(c_1-1)}{1-\varepsilon^2}\varepsilon^2\prod_{x=2}^{r}\left(c_x-\frac{1}{\varepsilon}\right)$$
$$+\frac{1}{1+\varepsilon}\prod_{x=2}^{r}(c_x-\varepsilon)+\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\prod_{x=2}^{r}\left(c_x-\frac{1}{\varepsilon}\right)$$
$$=\frac{1}{(1-\varepsilon^2)}\cdot\left\{\prod_{x=1}^{r}(c_x-\varepsilon)-\varepsilon^2\prod_{x=1}^{r}\left(c_x-\frac{1}{\varepsilon}\right)\right\}.\quad \text{q. e. d.}$$

In unserm Falle ist nun:

$$c_x = \cos(\pi s) - \sin(\pi s)\operatorname{cotg}(\pi s_x),$$
$$\varepsilon = \cos(\pi s) + i\sin(\pi s),$$

also:

$$(c_x-\varepsilon) = -\frac{\sin(\pi s)}{\sin(\pi s_x)}e^{\pi i s_x},\quad \left(c_x-\frac{1}{\varepsilon}\right) = -\frac{\sin(\pi s)}{\sin(\pi s_x)}e^{-\pi i s_x},$$

$$\prod_{x=1}^{r}(c_x-\varepsilon) = \frac{(-1)^r\sin^r(\pi s)}{\prod_{x=1}^{r}\sin(\pi s_x)}\cdot\varepsilon e^{-\pi i s_0},$$

$$\prod_{x=1}^{r}\left(c_x-\frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{(-1)^r\sin^r(\pi s)}{\prod_{x=1}^{r}\sin(\pi s_x)}\cdot\frac{1}{\varepsilon}e^{\pi i s_0},$$

$$\Delta_r = \frac{(-1)^r\sin^r(\pi s)}{\prod_{x=1}^{r}\sin(\pi s_x)}\cdot\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\left(e^{-\pi i s_0}-e^{\pi i s_0}\right)$$
$$=\frac{(-1)^r\sin^{r-1}(\pi s)\sin(\pi s_0)}{\prod_{x=1}^{r}\sin(\pi s_x)}.$$

Daraus ergiebt sich der Werth der Determinante

$$C = \sin^{r-1}(\pi s) \prod_{x=0}^{r} \sin(\pi s_x), \tag{39}$$

und zufolge (36) und (37):

$$Y.\mathsf{H} = (-1)^{\frac{r.r-1}{2}} \pi^r \frac{\sin(\pi s)}{\prod_{x=0}^{r} \sin(\pi s_x)} \cdot \frac{(s-r-1)!}{(s-1)!}. \tag{40}$$

Aber die Determinanten Y und H lassen sich auch einzeln leicht auswerthen. Wir schlagen zu dem Zweck denselben Weg ein, den Tissot*) in einem ähnlichen Falle zur Berechnung einer Determinante von Integralen benutzt hat.

Fassen wir die Integrale $Y_{\mu i}$ wieder als Functionen von $a_0 \equiv x$ auf, und setzen

$$z_i = \int_x^{a_i} (u-x)^{s_0+r-2} \prod_{\lambda=1}^{r} (u-a_\lambda)^{s_\lambda - 1} du,$$

so zeigt sich sofort, dass die Determinante Y bis auf einen von x unabhängigen Factor gleich

$$D(z_1, z_2, \ldots, z_r) \equiv \left| \frac{d^{\varkappa-1} z_i}{dx^{\varkappa-1}} \right| \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \ldots, r)$$

ist. Aus (7″) entnimmt man aber, indem man s_0 durch (s_0+r-1) ersetzt, dass die Differentialgleichung der Integrale z_i lautet:

$$z^{(r)} - z^{(r-1)} \sum_{\lambda=1}^{r} \frac{s_0 + s_\lambda - 1}{(x-a_\lambda)} + \cdots = 0,$$

woraus

$$D(z_1, z_2, \ldots, z_r) = c \prod_{\lambda=1}^{r} (x-a_\lambda)^{s_0+s_\lambda-1}$$

hervorgeht. Folglich ist

$$Y = M \cdot \prod_{\substack{\mu,\nu=0 \\ \mu>\nu}}^{r} (a_\mu - a_\nu)^{s_\mu+s_\nu-1},$$

worin der Factor M nur noch von den Zahlen $s_0, s_1, \ldots, s_r$ abhängt.

*) „Sur un déterminant d'intégrales définies", Liouville's Journal, Bd. 17, 1852. — Der von Tissot behandelte Fall lässt sich als Grenzfall des unseren ansehen, wenn man a_r und s_r gleichzeitig unendlich wachsen lässt.

Indem man a_r in a_{r-1} hineinrücken lässt, erhält man für M eine Recursionsgleichung, deren Auflösung das Resultat liefert:

$$(41) \quad Y = (-1)^{\frac{r.r+1}{2}} e^{\pi i \sum_{x=1}^{r} x s_x} \frac{\prod_{\lambda=0}^{r} \Gamma(s_\lambda)}{\Gamma(s)} \cdot \prod_{\substack{\mu,\nu=0 \\ \mu>\nu}}^{r} (a_\mu - a_\nu)^{s_\mu + s_\nu - 1}.$$

Entsprechend ist

$$H = e^{-\pi i \sum_{x=1}^{r} x s_x} \frac{\prod_{\lambda=0}^{r} \Gamma(1-s_\lambda)}{\Gamma(r+1-s)} \cdot \prod_{\substack{\mu,\nu=0 \\ \mu>\nu}}^{r} (a_\mu - a_\nu)^{1-s_\mu-s_\nu},$$

wodurch sich (40) bestätigt.

Als speciellen Fall von (41) heben wir hervor, dass die Determinante J $(2p)$-ten Grades der hyperelliptischen Perioden (29*) den Werth hat:

$$(41^*) \qquad J = \frac{(2\pi i)^p}{1.3.5\ldots(2p-1)},$$

ein Resultat, welches bereits von Herrn Fuchs*) auf einem andern Wege abgeleitet worden ist.

§ 5.

Auswerthung eines Randintegrals.

Um die in (35) definirten rationalen Functionen $\Gamma_{\mu\nu}$ der Verzweigungswerthe $a_0, a_1, \ldots, a_r$ auch für den Fall $(\mu+\nu) > (r-1)$, welcher sich der bisher verfolgten Methode entzieht, auf directem Wege zu berechnen, bedienen wir uns eines Randintegrals in analoger Weise, wie Riemann**) mittels eines solchen die bilinearen Relationen unter den Perioden der Abel'schen Integrale abgeleitet hat.

Wir markiren in der complexen Ebene die Verzweigungspunkte $a_0, a_1, \ldots, a_r$ und schlagen um den Nullpunkt als Mittelpunkt einen Kreis K, der sie sämmtlich einschliesst. Ferner führen wir von a_0 aus einen Schnitt über $a_1, a_2, \ldots, a_r$ bis zu einem Punkte der Kreisperipherie, und zwar heisse der Endpunkt desselben auf der positiven (linken) Seite b, auf der negativen b'. Dann bilden die beiden Ufer dieses Schnittes zusammen mit dem Kreise K die Randcurve R eines einfach zusammenhängenden Gebietes. Setzen wir nun

---

*) „Ueber eine rationale Verbindung der Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale", Crelle's Journal, Bd. 71, pag. 135, (11).

**) „Theorie der Abel'schen Functionen", Nr. 20.

$$M(u) = \int_{a_0}^{u} \prod_{\lambda=0}^{r} (u-a_\lambda)^{s_\lambda - 1} u^{\mu}\, du,$$

$$N(u) = \int_{a_0}^{u} \prod_{\lambda=0}^{r} (u-a_\lambda)^{-s_\lambda} u^{\nu}\, du,$$

so verhalten sich $M(u)$ und $N(u)$ in diesem Gebiete eindeutig und endlich, wenn wir, wie bisher, voraussetzen, dass die reellen Theile der Zahlen s_λ positive echte Brüche sind; desgleichen nehmen wir wieder ihre Summe

$$s = \sum_{\lambda=0}^{r} s_\lambda$$

als von einer ganzen Zahl verschieden an. Neben den schon früher benutzten Bezeichnungen

$$Y_{\mu i} = \int_{a_0}^{a_i} dM^+(u), \qquad \mathsf{H}_{\nu\varkappa} = \int_{a_0}^{a_\varkappa} dN^+(u), \qquad (i, \varkappa = 1,2,\ldots,r)$$

die wir jetzt kürzer Y_i, bez. $\mathsf{H}_\varkappa$ schreiben, führen wir noch ein:

$$\int_{a_0}^{b} dM^+(u) = M(b), \qquad \int_{a_0}^{b} dN^+(u) = N(b),$$

$$\int_{b}^{b'} dM(u) = M', \qquad \int_{b}^{b'} dN(u) = N',$$

wobei die letzteren beiden Integrationen längs K zu erstrecken sind. Nach (14) und (22) gilt

$$\text{längs } (a_{\varkappa-1}, a_\varkappa): \begin{cases} dM^- = \varrho_{\varkappa-1}\, dM^+, \\ dN^- = \dfrac{1}{\varrho_{\varkappa-1}}\, dN^+, \end{cases} \qquad (\varkappa = 1,2,\ldots,r)$$

$$\text{längs } (a_r, b): \begin{cases} dM^- = \varrho_r\, dM^+, \\ dN^- = \dfrac{1}{\varrho_r}\, dN^+. \end{cases}$$

Entwickelt man zunächst die Gleichungen

$$\int_K dM(u) = 0, \qquad \int_K dN(u) = 0,$$

so ergeben sich sogleich die linearen Beziehungen:

$$(42)\qquad \begin{cases} (1-\varrho_r)\, M(b) = \sum_{i=1}^{r} (\varrho_{i-1} - \varrho_i)\, Y_i - M', \\ \left(1 - \frac{1}{\varrho_r}\right) N(b) = \sum_{x=1}^{r} \left(\frac{1}{\varrho_{x-1}} - \frac{1}{\varrho_x}\right) \mathsf{H}_x - N'. \end{cases}$$

Nach dieser Vorbereitung treten wir an die Untersuchung des Randintegrals

$$\int_R M(u)\, dN(u) = 0$$

heran. Die Zerlegung desselben nach den Theilstrecken liefert die Gleichung:

$$(43)\qquad \sum_{x=1}^{r} \int_{a_{x-1}}^{a_x} (M^+ dN^+ - M^- dN^-) + \int_{a_r}^{b} (M^+ dN^+ - M^- dN^-) + \int_R M\, dN = 0.$$

Nun ist der Werth, welchen $M^-(u)$ längs (a_{x-1}, a_x) erhält:

$$M^-(u) = \sum_{\lambda=1}^{x-1} \varrho_{\lambda-1} (Y_\lambda - Y_{\lambda-1}) + \varrho_{x-1} \left(M^+(u) - Y_{x-1}\right),$$

oder:

$$M^-(u) = \varrho_{x-1} M^+(u) + \sum_{\lambda=1}^{x-1} (\varrho_{\lambda-1} - \varrho_\lambda)\, Y_\lambda;$$

also wird längs (a_{x-1}, a_x):

$$(M^+ dN^+ - M^- dN^-) = \left(M^+(u) - \frac{1}{\varrho_{x-1}} M^-(u)\right) dN^+(u)$$

$$= -\frac{1}{\varrho_{x-1}} \left\{ \sum_{\lambda=1}^{x-1} (\varrho_{\lambda-1} - \varrho_\lambda)\, Y_\lambda \right\} dN^+(u),$$

mithin:

$$\int_{a_{x-1}}^{a_x} (M^+ dN^+ - M^- dN^-) = -\frac{1}{\varrho_{x-1}} (\mathsf{H}_x - \mathsf{H}_{x-1}) \sum_{\lambda=1}^{x-1} (\varrho_{\lambda-1} - \varrho_\lambda)\, Y_\lambda,$$

und ebenso:

$$\int_{a_r}^{b} (M^+ dN^+ - M^- dN^-) = -\frac{1}{\varrho_r} \left(N(b) - \mathsf{H}_r\right) \sum_{\lambda=1}^{r} (\varrho_{\lambda-1} - \varrho_\lambda)\, Y_\lambda.$$

Trägt man diese Ausdrücke in (43) ein, so ergiebt sich nach Reduction:

$$(44)\quad \sum_{\varkappa=1}^{r}\sum_{i=1}^{\varkappa-1}(\varrho_{i-1}-\varrho_i)\left(\frac{1}{\varrho_{\varkappa-1}}-\frac{1}{\varrho_\varkappa}\right)Y_i\mathsf{H}_\varkappa-\sum_{\varkappa=1}^{r}\left(\frac{\varrho_{\varkappa-1}-\varrho_\varkappa}{\varrho_\varkappa}\right)Y_\varkappa\mathsf{H}_\varkappa$$

$$=\int_K M\,dN-\frac{N(b)}{\varrho_r}\sum_{\lambda=1}^{r}(\varrho_{\lambda-1}-\varrho_\lambda)\,Y_\lambda.$$

Weiter zerlegen wir das Integral auf der rechten Seite:

$$\int_K M\,dN=\int_K\{M(u)-M(b)\}\,dN+M(b)N',$$

und eliminiren vermittelst der Gleichungen (42) die Grössen $M(b)$ und $N(b)$ aus (44), soweit sie ausserhalb des Integralzeichens auftreten. Dann erhalten wir zusammenfassend:

$$\frac{1}{1-\varrho_r}\sum_{i=1}^{r}(\varrho_{i-1}\varrho_r-\varrho_i)\left(\frac{1}{\varrho_{i-1}}-\frac{1}{\varrho_i}\right)Y_i\mathsf{H}_i$$

$$+\frac{1}{1-\varrho_r}\sum_{\substack{i,\varkappa=1\\ i>\varkappa}}^{r}(\varrho_{i-1}-\varrho_i)\left(\frac{1}{\varrho_{\varkappa-1}}-\frac{1}{\varrho_\varkappa}\right)Y_i\mathsf{H}_\varkappa$$

$$+\frac{\varrho_r}{1-\varrho_r}\sum_{\substack{i,\varkappa=1\\ i<\varkappa}}^{r}(\varrho_{i-1}-\varrho_i)\left(\frac{1}{\varrho_{\varkappa-1}}-\frac{1}{\varrho_\varkappa}\right)Y_i\mathsf{H}_\varkappa$$

$$=\frac{M'N'}{1-\varrho_r}-\int_K\{M(u)-M(b)\}\,dN.$$

Hier stellt nun die linke Seite, wie man sich mittels der in (28) angegebenen Werthe der $C_{i\varkappa}$ sofort überzeugt, nichts anderes dar als den Ausdruck:

$$\frac{-2i}{\sin(\pi s)}\sum_{i,\varkappa=1}^{r}C_{i\varkappa}\,Y_i\mathsf{H}_\varkappa,$$

so dass wir jetzt haben:

$$(45)\qquad \Gamma_{\mu\nu}=\frac{i\sin(\pi s)}{2}\left\{\frac{M'N'}{1-\varrho_r}-\int_K\{M(u)-M(b)\}\,dN\right\}.$$

Es handelt sich nunmehr um die Auswerthung der rechten Seite. Zu dem Zweck wenden wir die Entwicklung nach fallenden Potenzen von u an und setzen:

$$(46)\qquad \begin{cases} \prod_{\lambda=0}^{r}\left(1-\frac{a_\lambda}{u}\right)^{s_\lambda-1}=\sum_{\sigma=0}^{\infty}A_\sigma u^{-\sigma}, \\ \prod_{\lambda=0}^{r}\left(1-\frac{a_\lambda}{u}\right)^{-s_\lambda}=\sum_{\tau=0}^{\infty}B_\tau u^{-\tau}; \end{cases}$$

diese Potenzreihen convergiren auf dem Kreise K; ihre Coefficienten A_σ, B_τ sind ganze rationale homogene Functionen der Grössen $a_0, a_1, \ldots, a_r$ von der Ordnung ihres Index. Dann ist

$$\frac{dM(u)}{du}=\sum_{\sigma=0}^{\infty}A_\sigma u^{s-r-1+\mu-\sigma},$$

$$\frac{dN(u)}{du}=\sum_{\tau=0}^{\infty}B_\tau u^{-s+\nu-\tau},$$

und, indem wir das Resultat der gliedweisen Integration von $dM(u)$ mit $\bar{M}(u)$ bezeichnen:

$$\bar{M}(u)=\sum_{\sigma=0}^{\infty}A_\sigma\frac{u^{s-r+\mu-\sigma}}{s-r+\mu-\sigma}.$$

Da ferner

$$M(u)-M(b)=\bar{M}(u)-\bar{M}(b),$$

so ist

$$\int_K\{M(u)-M(b)\}\,dN=\int_K\bar{M}(u)\,dN-\bar{M}(b).N',$$

$$\Gamma_{\mu\nu}=\frac{i\sin(\pi s)}{2}\left\{N'\left[\frac{M'}{1-\varrho_r}+\bar{M}(b)\right]-\int_K\bar{M}(u)\,dN\right\}.$$

Weiter ist aber

$$M'=\bar{M}(b')-\bar{M}(b),$$

oder, da

$$\bar{M}(b')\equiv\bar{M}(b\,e^{2\pi i})=e^{2\pi i s}\bar{M}(b)\equiv\varrho_r\bar{M}(b),$$

$$M'=-(1-\varrho_r)\bar{M}(b),$$

so dass wir einfach erhalten:

$$\Gamma_{\mu\nu}=-\frac{i\sin(\pi s)}{2}\int_K\bar{M}(u)\frac{dN(u)}{du}\,du.$$

Endlich ist

$$\bar{M}(u)\frac{dN(u)}{du}=\sum_{\sigma,\tau=0}^{\infty}\frac{A_\sigma B_\tau u^{\mu+\nu-\sigma-\tau-r}}{s-r+\mu-\sigma},$$

also

$$\int_K\bar{M}(u)\frac{dN(u)}{du}\,du=2\pi i\sum_{\sigma,\tau}\frac{A_\sigma B_\tau}{s-r+\mu-\sigma},$$

$$(\sigma+\tau=\mu+\nu-r+1)$$

und demnach:

$$(47) \qquad \Gamma_{\mu\nu} = \pi \sin(\pi s) \sum_{\sigma=0}^{\mu+\nu-r+1} \frac{A_\sigma B_{\mu+\nu-r+1-\sigma}}{s-r+\mu-\sigma},$$

woraus sich speciell wiederum ergiebt:

$$(30) \qquad \Gamma_{\mu\nu} = 0, \qquad \mu+\nu < r-1,$$

$$(32) \qquad \Gamma_{\mu\nu} = \frac{\pi \sin(\pi s)}{s-r+\mu}, \qquad \mu+\nu = r-1.$$

Allgemein stellt sich $\Gamma_{\mu\nu}$ *als ganze rationale homogene Function der Grössen* $a_0, a_1, \ldots, a_r$ *von der Ordnung* $(\mu+\nu-r+1)$ *dar.*

Im speciellen Falle der hyperelliptischen Perioden finden wir:

$$(47^*) \qquad \sum_{\substack{i,\varkappa=1 \\ i<\varkappa}}^{2p} (-1)^{i+\varkappa} \{J_{\mu i} J_{\nu\varkappa} - J_{\mu\varkappa} J_{\nu i}\} = 2\pi i \sum_{\sigma,\tau} \frac{A_\sigma A_\tau}{(\mu-\nu-\sigma+\tau)},$$

$$(\sigma+\tau = \mu+\nu-2p+1)$$

wobei

$$(46^*) \qquad \left\{ \prod_{\lambda=0}^{2p} \left(1 - \frac{a_\lambda}{u}\right) \right\}^{-\frac{1}{2}} = \sum_{\sigma=0}^{\infty} A_\sigma u^{-\sigma}.$$

Auf demselben Wege liesse sich eine analoge Relation herleiten, wenn $M(u)$ und $N(u)$ Integrale dritter Gattung bedeuten, die an einer Stelle eine logarithmische Unstetigkeit erleiden; doch gehen wir darauf nicht näher ein. — Legt man eine beliebige Riemann'sche Fläche vom Geschlechte p zu Grunde, und fasst die allgemeinen von Herrn Hurwitz l. c. behandelten Functionen ins Auge, welche an den $2p$ Querschnitten und weiteren nach Verzweigungspunkten gerichteten Schnitten Multiplicatoren annehmen, so ist ersichtlich, dass das im Vorigen benutzte Verfahren in jedem Falle zur Aufstellung bilinearer Relationen führt, welche unter den Perioden von zwei zu inversen Multiplicatorsystemen gehörenden Integralfunctionen stattfinden. — Für den besonderen Fall, in welchem keine Verzweigungspunkte angenommen sind, ist dieser Gedanke bereits von den Herren Prym*) und Appell**) ausführlich entwickelt worden.

---

*) „Ueber ein Randintegral", Crelle's Journal, Bd. 71.

**) „Sur les intégrales de fonctions à multiplicateurs et leur application au développement des fonctions abéliennes en séries trigonométriques". Mémoire couronné, Acta mathematica, Bd. 13, pag. 35.

§ 6.

Anwendung des Princips der Vertauschung von Parameter und Argument.

Die Beziehungen unter den hypergeometrischen Integralen $Y_{\mu i}$ und $H_{\nu x}$, welche durch die r^2 Relationen

$$\sum_{i,x=1}^{r} C_{ix}\, Y_{\mu i} H_{\nu x} = \Gamma_{\mu\nu} \qquad (\mu,\nu = 0,1,\ldots,(r-1)) \tag{35}$$

ausgedrückt sind, lassen sich noch auf eine zweite Art darstellen.

Die Systeme

$$\{C_{ix}\} \quad \text{und} \quad \{C'_{ix}\}, \qquad (i,x = 1,2,\ldots,r)$$

desgleichen

$$\{\Gamma_{\mu\nu}\} \quad \text{und} \quad \{\Gamma'_{\mu\nu}\}, \qquad (\mu,\nu = 0,1,\ldots,(r-1))$$

seien zu einander reciprok; es gelte also:

$$\sum_{i=1}^{r} C_{ix}\, C'_{i\lambda} = \delta_{x\lambda}, \qquad (x,\lambda = 1,2,\ldots,r) \tag{48}$$

$$\sum_{\nu=0}^{r-1} \Gamma_{\mu\nu}\Gamma'_{\lambda\nu} = \delta_{\mu\lambda}, \qquad (\mu,\lambda = 0,1,\ldots,(r-1)) \tag{49}$$

worin $\delta_{ix} = 0$, wenn $i \neq x$, $\delta_{ii} = 1$. Sind nun $z_0, z_1, \ldots, z_{r-1}$ r unbestimmte Grössen, und setzen wir

$$\sum_{\mu=0}^{r-1} Y_{\mu i} z_\mu = \xi_i, \qquad (i = 1,2,\ldots,r) \tag{50}$$

so lassen sich die r^2 Gleichungen (35) zusammenfassen zu:

$$\sum_{i,x=1}^{r} C_{ix}\, H_{\nu x}\, \xi_i = \sum_{\mu=0}^{r-1} \Gamma_{\mu\nu} z_\mu. \qquad (\nu = 0,1,\ldots,(r-1)) \tag{51}$$

Während die Elimination der ξ_i aus (50) und (51) auf (35) zurückführt, sollen jetzt die z_μ eliminirt werden. Lösen wir die Gleichungen (51) nach den z_μ auf, so folgt auf Grund von (49):

$$z_\mu = \sum_{i',x',\nu} C_{i'x'}\, \Gamma'_{\mu\nu}\, H_{\nu x'}\, \xi_{i'};$$

die Eintragung dieser Werthe in (50) liefert:

$$\sum_{i',x',\mu,\nu} C_{i'x'}\, \Gamma'_{\mu\nu}\, Y_{\mu i}\, H_{\nu x'}\, \xi_{i'} = \xi_i,$$

und, wenn wir speciell $\xi_i = C'_{ix}$ setzen, zufolge (48):

$$(52) \qquad \sum_{\mu,\nu=0}^{r-1} \Gamma'_{\mu\nu} Y_{\mu i} H_{\nu\varkappa} = C'_{i\varkappa}. \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \ldots, r)$$

Die Gleichungssysteme (35) und (52) sind also algebraisch äquivalent.

In dieser zweiten Gestalt (52) finden sich die fraglichen Relationen im wesentlichen bereits in einer Abhandlung des Herrn Fuchs*) aufgestellt, woselbst sie aus einem sehr umfassenden Theorem durch Specialisirung für den einfachsten Fall hervorgehen. Es sei gestattet, dieselben hier direct aus der gleichen Quelle, nämlich dem Abel'schen Princip der Vertauschung von Parameter und Argument, in Kürze noch einmal abzuleiten.

Setzen wir

$$f(x) = \prod_{\varkappa=0}^{r} (x - a_\varkappa), \quad U(x) = \prod_{\varkappa=0}^{r} (x - a_\varkappa)^{s_\varkappa - 1}, \quad V(x) = \prod_{\varkappa=0}^{r} (x - a_\varkappa)^{-s_\varkappa},$$

wobei die reellen Theile der Zahlen $s_\varkappa$ wieder als positive echte Brüche angenommen sind, so lautet die Abel-Jacobi'sche Identität:

$$(53) \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{U(x)}{U(y)\,(x-y)}\right\} - \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{V(y)}{V(x)\,(y-x)}\right\} = U(x) \cdot V(y) \cdot F(x, y);$$

hier stellt

$$(54) \qquad F(x, y) \equiv \left\{ \frac{f(x) \sum_{\varkappa=0}^{r} \frac{s_\varkappa}{x - a_\varkappa} + f(y) \sum_{\varkappa=0}^{r} \frac{1 - s_\varkappa}{y - a_\varkappa}}{(x - y)} - \frac{f(x) - f(y)}{(x - y)^2} \right\},$$

wie aus dem Umstande, dass

$$\lim_{x=y} (x - y)\, F(x, y) = 0$$

ist, hervorgeht, eine ganze Function dar, die in den Argumenten x und y zusammen vom Grade $(r - 1)$ ist. Integriren wir nun Gleichung (53) über x und y längs der positiven Seite der Schnitte $(a_{\mu-1}, a_\mu)$, bez. $(a_{\nu-1}, a_\nu)$, die weder zusammenfallen, noch einen Eckpunkt des Polygons gemeinsam haben sollen, so ergiebt sich sofort:

$$(55) \qquad \int_{a_{\mu-1}}^{a_\mu} dx \int_{a_{\nu-1}}^{a_\nu} dy\, U(x)\, V(y)\, F(x, y) = 0. \qquad \begin{pmatrix} \mu < (\nu - 1) \text{ oder} \\ \nu < (\mu - 1) \end{pmatrix}$$

*) „Ueber die Relationen, welche die zwischen je zwei singulären Punkten erstreckten Integrale der Lösungen linearer Differentialgleichungen mit den Coefficienten der Fundamentalsubstitutionen der Gruppe derselben verbinden". Berliner Berichte, 1892, pag. 1113.

Führen wir ferner die Integration über x von $a_{\mu-1}$ bis $(a_\mu - \sigma)$, über y von $(a_\mu + \tau)$ bis $a_{\mu+1}$, so erhalten wir:

$$\int_{a_{\mu-1}}^{a_\mu} dx \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} dy \,.\, U(x)V(y)F(x,y)$$

$$= \lim_{\substack{\sigma=0\\ \tau=0}} \left\{ - \int_{a_{\mu-1}}^{a_\mu - \sigma} \frac{U(x)\,dx}{U(a_\mu+\tau)\cdot(x-a_\mu-\tau)} - \int_{a_\mu+\tau}^{a_{\mu+1}} \frac{V(y)\,dy}{V(a_\mu-\sigma)\cdot(y-a_\mu+\sigma)} \right\}$$

$$= \lim_{\substack{\sigma=0\\ \tau=0}} \left\{ \int_{\sigma}^{a_\mu - a_{\mu-1}} \frac{U(a_\mu-\xi)\,d\xi}{U(a_\mu+\tau)\,(\xi+\tau)} - \int_{\tau}^{a_{\mu+1}-a_\mu} \frac{V(a_\mu+\eta)\,d\eta}{V(a_\mu-\sigma)\,(\eta+\sigma)} \right\}.$$

Es ist nun leicht zu sehen, dass man hier das Integrationsintervall auf die Umgebung der kritischen Grenze beschränken und die Integranden durch die ersten Terme ihrer Potenzentwicklungen ersetzen darf. Da in erster Annäherung

$$\frac{U(a_\mu-\xi)}{U(a_\mu+\tau)} = \left(\frac{-\xi}{\tau}\right)^{s_\mu-1}, \quad \frac{V(a_\mu+\eta)}{V(a_\mu-\sigma)} = \left(\frac{\eta}{-\sigma}\right)^{-s_\mu}$$

ist, so erhält man:

$$- e^{\pi i s_\mu} \lim \left\{ \int_{\sigma}^{\sigma'} \left(\frac{\xi}{\tau}\right)^{s_\mu-1} \frac{d\xi}{\xi+\tau} + \int_{\tau}^{\tau'} \left(\frac{\eta}{\sigma}\right)^{-s_\mu} \frac{d\eta}{\eta+\sigma} \right\},$$

und weiter durch Substitution von

$$\xi = \tau\zeta, \quad \eta = \frac{\sigma}{\zeta}:$$

$$- e^{\pi i s_\mu} \lim \left\{ \int_{\frac{\sigma}{\tau}}^{\frac{\sigma'}{\tau}} \zeta^{s_\mu-1} \frac{d\zeta}{1+\zeta} + \int_{\frac{\sigma}{\tau'}}^{\frac{\sigma}{\tau}} \zeta^{s_\mu-1} \frac{d\zeta}{1+\zeta} \right\}$$

$$= - e^{\pi i s_\mu} \lim_{\substack{\sigma=0\\ \tau=0}} \int_{\frac{\sigma}{\tau'}}^{\frac{\sigma'}{\tau}} \zeta^{s_\mu-1} \frac{d\zeta}{1+\zeta} = - e^{\pi i s_\mu} \int_0^\infty \zeta^{s_\mu-1} \frac{d\zeta}{1+\zeta} = - \frac{e^{\pi i s_\mu}\pi}{\sin(\pi s_\mu)}.$$

Also haben wir:

$$\int_{a_{\mu-1}}^{a_\mu} dx \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} dy \,.\, U(x)V(y)F(x,y) = - \frac{e^{\pi i s_\mu}\pi}{\sin(\pi s_\mu)}, \tag{56}$$

und analog:

$$(56') \qquad \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} dx \int_{a_{\mu-1}}^{a_\mu} dy \,.\, U(x)V(y)F(x,y) = -\frac{e^{-\pi i s_\mu}\pi}{\sin(\pi s_\mu)}.$$

Die Formeln (55) und (56) sind dieselben, welche schon Herr Fuchs*) angegeben hat.

Es bleibt noch übrig, den Fall zu verfolgen, in welchem als Integrationsweg der Variabeln x und y ein und derselbe, zwei Verzweigungspunkte verbindende, Schnitt dient. Freilich ist zu dem Zweck die Gleichung (53) in ihrer ursprünglichen Gestalt nicht brauchbar; doch führt uns eine geringfügige Modification derselben auch hier leicht zum Ziele. Da nämlich

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x-y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y-x}\right)$$

ist, so lässt sich (53) in folgende Gestalt setzen:

$$(53') \qquad U(x)V(y)F(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{U(x)-U(y)}{x-y}\cdot\frac{1}{U(y)}\right\} - \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{V(y)-V(x)}{y-x}\cdot\frac{1}{V(x)}\right\},$$

worin jetzt die Ausdrücke unter den Differentialzeichen der rechten Seite stetige Functionen von x und y sind, so lange nicht x oder y in einen Verzweigungspunkt hineinfallen. Integriren wir nun Gleichung (53') über x und y auf dem gleichen Wege von $\alpha = (a_{\nu-1} + \sigma)$ bis $\beta = (a_\nu - \tau)$, so erhalten wir auf der rechten Seite:

$$\int_\alpha^\beta dx \left\{\frac{U(x)-U(\beta)}{x-\beta}\cdot\frac{1}{U(\beta)} - \frac{U(x)-U(\alpha)}{x-\alpha}\cdot\frac{1}{U(\alpha)}\right\}$$

$$-\int_\alpha^\beta dy \left\{\frac{V(y)-V(\beta)}{y-\beta}\cdot\frac{1}{V(\beta)} - \frac{V(y)-V(\alpha)}{y-\alpha}\cdot\frac{1}{V(\alpha)}\right\},$$

oder, wenn wir die Integrationsvariable y durch x ersetzen und zusammenfassen:

$$\int_\alpha^\beta \frac{dx}{x-\beta}\left\{\frac{U(x)}{U(\beta)} - \frac{V(x)}{V(\beta)}\right\} - \int_\alpha^\beta \frac{dx}{x-\alpha}\left\{\frac{U(x)}{U(\alpha)} - \frac{V(x)}{V(\alpha)}\right\},$$

*) l. c. pag. 1123, (8) (9).

so dass

$$\int_{a_{\nu-1}}^{a_\nu}\int_{a_{\nu-1}}^{a_\nu} dx\,dy\,U(x)\,V(y)\,F(x,y)$$

$$= \lim_{\tau=0}\int_{a_{\nu-1}}^{a_\nu-\tau} \frac{dx}{x-a_\nu+\tau}\left\{\frac{U(x)}{U(a_\nu-\tau)} - \frac{V(x)}{V(a_\nu-\tau)}\right\}$$

$$- \lim_{\sigma=0}\int_{a_{\nu-1}+\sigma}^{a_\nu} \frac{dx}{x-a_{\nu-1}-\sigma}\left\{\frac{U(x)}{U(a_{\nu-1}+\sigma)} - \frac{V(x)}{V(a_{\nu-1}+\sigma)}\right\}$$

wird. Das erste Integral der rechten Seite geht durch die Substitution $x = (a_\nu - \xi)$ in

$$- \lim_{\tau=0}\int_{\tau}^{a_\nu-a_{\nu-1}} \frac{d\xi}{\xi-\tau}\left\{\frac{U(a_\nu-\xi)}{U(a_\nu-\tau)} - \frac{V(a_\nu-\xi)}{V(a_\nu-\tau)}\right\}$$

über, und weiter bis auf Terme höherer Ordnung in

$$- \lim_{\tau=0}\int_{\tau}^{\tau'} \frac{d\xi}{\xi-\tau}\left\{\left(\frac{\xi}{\tau}\right)^{s_\nu-1} - \left(\frac{\xi}{\tau}\right)^{-s_\nu}\right\}.$$

Substituiren wir endlich $\xi = \frac{\tau}{\zeta}$, so folgt:

$$\lim_{\tau=0}\int_{\frac{\tau}{\tau'}}^{1} \frac{d\zeta}{1-\zeta}\left\{\zeta^{s_\nu-1} - \zeta^{-s_\nu}\right\} = \int_0^1 \frac{d\zeta}{1-\zeta}\left\{\zeta^{s_\nu-1} - \zeta^{-s_\nu}\right\} = \pi\,\mathrm{cotg}\,(\pi s_\nu).$$

Ebenso wird

$$- \lim_{\sigma=0}\int_{a_{\nu-1}+\sigma}^{a_\nu} \frac{dx}{x-a_{\nu-1}-\sigma}\left\{\frac{U(x)}{U(a_{\nu-1}+\sigma)} - \frac{V(x)}{V(a_{\nu-1}+\sigma)}\right\} = \pi\,\mathrm{cotg}\,(\pi s_{\nu-1}),$$

mithin schliesslich:

$$(57)\quad \int_{a_{\nu-1}}^{a_\nu}\int_{a_{\nu-1}}^{a_\nu} dx\,dy\,.\,U(x)V(y)F(x,y) = \pi\left\{\mathrm{cotg}\,(\pi s_{\nu-1}) + \mathrm{cotg}\,(\pi s_\nu)\right\}$$

$$= \frac{\pi \sin\left(\pi\,.\,\overline{s_{\nu-1}+s_\nu}\right)}{\sin\,(\pi s_{\nu-1})\sin\,(\pi s_\nu)},$$

wie übrigens auch aus einer Modification von (55) in Verbindung mit (56) und (56′) leicht hervorgeht. — Indem wir jetzt die gewonnenen Formeln (55), (56), (56′), (57) derart additiv combiniren, dass als untere Grenze der Integrale durchweg a_0 auftritt, gelangen wir zu folgendem Resultat:

Wird

$$(58) \qquad \int_{a_0}^{a_i} dx \int_{a_0}^{a_\varkappa} dy \,.\, U(x)V(y)F(x,y) = \Phi_{i\varkappa} \quad (i,\varkappa = 1,2,\ldots,r)$$

gesetzt, so ist

$$(59) \qquad \begin{cases} \Phi_{ii} = \pi\{\operatorname{cotg}(\pi s_0) + \operatorname{cotg}(\pi s_i)\} \\ \Phi_{i\varkappa} = \frac{\pi e^{\pi i s_0}}{\sin(\pi s_0)}, & \varkappa < i, \\ \Phi_{i\varkappa} = \frac{\pi e^{-\pi i s_0}}{\sin(\pi s_0)}, & \varkappa > i. \end{cases}$$

Die ganze Function $F(x,y)$ laute nun in entwickelter Gestalt:

$$F(x,y) = \sum_{\mu,\nu=0}^{r-1} F_{\mu\nu} x^\mu y^\nu;$$

ferner werde gesetzt:

$$f(x) = \sum_{\varkappa=0}^{r+1} \alpha_\varkappa x^\varkappa,$$

$$f(x) \sum_{\varkappa=0}^{r} \frac{s_\varkappa}{x - a_\varkappa} = \sum_{\varkappa=0}^{r} \beta_\varkappa x^\varkappa;$$

dann berechnet sich aus der Definitionsgleichung (54) von $F(x,y)$:

$$(60) \qquad \begin{cases} F_{\mu\nu} = \{\beta_{\mu+\nu+1} - (\nu+1)\alpha_{\mu+\nu+2}\}, & (\mu+\nu) \leq (r-1) \\ F_{\mu\nu} = 0. & (\mu+\nu) > (r-1). \end{cases}$$

Lösen wir die linke Seite von (58) in ein Aggregat von Producten einfacher Integrale auf, so folgt:

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{r-1} F_{\mu\nu} \int_{a_0}^{a_i} U(x) x^\mu dx \,.\, \int_{a_0}^{a_\varkappa} V(y) y^\nu dy = \Phi_{i\varkappa},$$

oder, indem wir auf die in (29) eingeführten Bezeichnungen zurückgehen:

$$(58') \qquad \sum_{\mu,\nu=0}^{r-1} F_{\mu\nu} Y_{\mu i} \mathsf{H}_{\nu\varkappa} = \Phi_{i\varkappa}. \qquad (i,\varkappa = 1,2,\ldots,r)$$

Betrachten wir hier die Grössen $F_{\mu\nu}$ und $\Phi_{i\varkappa}$ als Abkürzungen der in (60) und (59) angegebenen Werthe, so ist in dem Gleichungssystem (58') die durch (52) angedeutete zweite Art, in der sich die bilinearen Relationen zwischen den hypergeometrischen Integralen dar-

stellen lassen, realisirt. In der That lässt sich ohne Schwierigkeit verificiren, dass die Formeln (52) und (58′) nur durch den Factor

$$\lambda = 1 : \pi \sin(\pi s)$$

unterschieden sind, indem sich die Systeme

$$\{\Gamma_{\mu\nu}\} \quad \text{und} \quad \{\lambda F_{\mu\nu}\},$$

sowie

$$\{C_{ix}\} \quad \text{und} \quad \{\lambda \Phi_{ix}\}$$

als zu einander reciprok erweisen.

Specialisiren wir noch die Gleichungen (58′) für den Fall der hyperelliptischen Perioden, so erhalten wir das System von $p(2p-1)$ Relationen:

$$(58^*) \qquad \sum_{\substack{\mu,\nu=0 \\ \mu<\nu}}^{2p-1} (\nu-\mu)\, \alpha_{\mu+\nu+2} \{J_{\mu i} J_{\nu x} - J_{\mu x} J_{\nu i}\} = 2\pi i,$$

$$\begin{pmatrix} i, x = 1, 2, \ldots, 2p \\ i < x \end{pmatrix}$$

worin die Grössen $J_{\mu i}$ die in (29*) angegebenen Integrale vertreten.

Zürich, Mai 1898.

Ueber die Constantenbestimmung bei einer cyklischen Minimalfläche.

Von

Georg Juga in Bukarest.

Ein im Raume bewegter Kreis mit variabelem Radius erzeugt die allgemeinste cyklische Fläche. Enneper hat im XIV. Bande der Zeitschrift für Mathematik und Physik gezeigt, dass die so erzeugte Fläche nur dann gleichzeitig Minimalfläche sein kann, wenn die stetig aufeinander folgenden Kreisschnitte in parallelen Ebenen liegen. Bezeichnen also x, y und z orthogonale Punktcoordinaten, so erhält der analytische Ausdruck der cyklischen Minimalfläche die Form

$$x = a(\varrho) + \varrho \cos w$$
$$y = b(\varrho) + \varrho \sin w$$
$$z = z(\varrho)$$

falls die Kreise senkrecht zur z-Axe angenommen werden. Darin sind ϱ und w Gauss'sche Parameter der Fläche; a, b und z repräsentiren die rechtwinkeligen Coordinaten der Centrallinie d. h. jener Curve, welche von dem Mittelpunkte des beweglichen Kreises beschrieben wird, und sind am Schlusse der Riemann'schen Abhandlung „Ueber die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung" als elliptische Integrale des Argumentes ϱ^2 dargestellt. Aus den dortigen Formeln erkennt man leicht, dass die Centrallinie eine ebene Curve ist, man kann daher durch eine Drehung der Fläche um die z-Axe bewirken, dass b gleich Null wird, ferner durch eine Parallelverschiebung, dass für $z = 0$ auch $a = 0$ wird, was der Annahme entspricht, dass die Centrallinie in der xz-Ebene liegt und durch den Coordinatenursprung geht. Wir werden im Folgenden diese specielle Lage der Fläche bezüglich des Coordinatensystemes voraussetzen.

Durch Umkehrung der Integrale, indem man

$$\varrho = \frac{\mu}{\cos \varphi}$$

und

$$\varphi = \operatorname{am}(u, \varkappa)$$

setzt, gelangt man zur Darstellung der Grössen vermittelst elliptischer Functionen und zwar

$$(1)\qquad \begin{cases} a = \mu \varkappa' u + \frac{\mu}{\varkappa'} \{ tg\varphi \Delta\varphi - \mathsf{E}_1(\varphi) \} \\ b = 0 \\ z = \mu \varkappa u, \end{cases}$$

worin μ eine willkürliche Constante, $\varkappa$ den Modul und $\varkappa'$ sein Complement, ferner $\mathsf{E}_1(\varphi)$ die bekannte elliptische Transcendente

$$\mathsf{E}_1(\varphi) = \mathsf{E}(u) = \int_0^{\varphi} \Delta\varphi \, d\varphi$$

bezeichnen. Die vorstehende Darstellung lässt die Periodicität der Fläche am deutlichsten hervortreten. Für $\varkappa = 1$ repräsentirt die Fläche das Catenoid, für $\varkappa = 0$ reducirt sie sich auf die xy-Ebene.

Wir wollen nun die Frage beantworten, wie weit man zwei parallele Kreise von gegebener Krümmung auseinanderziehen darf, damit die cyklische Minimalfläche, welche durch die beiden Kreise gehen soll, noch immer möglich sei. In jedem Periodenabschnitt der Fläche giebt es einen Kreis mit dem kleinsten Radius gleich μ; je zwei Kreise vom gleichen Radius, $\varrho > \mu$, verhalten sich dann symmetrisch bezüglich dieses Minimalkreises. Wir haben die Constanten bereits so bestimmt, dass der Minimalkreis in der xy-Ebene zu liegen kommt. Es genügt daher bei diesem Problem blos die Bewegung der betreffenden Kreiscentra zu verfolgen und es wird sich für dieselben eine Grenzlage ergeben, welche man nicht überschreiten darf, genau wie beim Catenoid, von welchem bereits bekannt ist, dass es zerreisst, sobald zwei gegebene Kreise eine gewisse Entfernung voneinander erlangt haben.

Die Gleichungen (1) repräsentiren die Coordinaten eines bestimmten Kreiscentrums, welches zum Radius ϱ_0 gehören möge, wenn man verlangt, dass die zwei Grössen μ und φ, wobei auch μ als variabel gedacht wird, durch die Relation

$$\varrho_0 = \frac{\mu}{\cos\varphi} = \text{const}$$

miteinander verbunden sein sollen. Nach Elimination von μ vermittelst dieser Bedingung erhält man

$$(2)\qquad \begin{cases} \frac{1}{\varrho_0} a = \varkappa' u \cos\varphi + \frac{1}{\varkappa'} \{ \sin\varphi \Delta\varphi - \mathsf{E}_1(\varphi) \cos\varphi \} \\ \frac{1}{\varrho_0} z = \varkappa u \cos\varphi. \end{cases}$$

Hierin betrachten wir u als Function von φ und $\varkappa$. Für einen constanten Werth von $\varkappa$ stellen dann diese Gleichungen eine Curve in

der xz-Ebene dar; variirt man aber $\varkappa$, so wird die dadurch entstehende Schaar einen gewissen Theil der Ebene überdecken und ihre Einhüllende die Grenze angeben, worüber hinaus das Centrum nicht gelangen kann. Wir erhalten die Einhüllende aus den Gleichungen (2) in Verbindung mit der Bedingung

$$\frac{\partial a}{\partial \varphi}\frac{\partial z}{\partial \varkappa} - \frac{\partial a}{\partial \varkappa}\frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0. \tag{3}$$

Die Theorie der elliptischen Integrale liefert

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{1}{\Delta\varphi}, \qquad \frac{\partial u}{\partial \varkappa} = \frac{\varkappa \sin\varphi\cos\varphi}{\varkappa'^2\Delta\varphi} + \frac{E_1(\varphi)}{\varkappa\varkappa'^2} - \frac{u}{\varkappa},$$

$$\frac{\partial \Delta\varphi}{\partial \varphi} = \frac{-\varkappa^2\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta\varphi}, \qquad \frac{\partial \Delta\varphi}{\partial \varkappa} = \frac{-\varkappa\sin^2\varphi}{\Delta\varphi},$$

$$\frac{\partial E_1(\varphi)}{\partial \varphi} = \Delta\varphi, \qquad \frac{\partial E_1(\varphi)}{\partial \varkappa} = \frac{E_1(\varphi) - u}{\varkappa};$$

mit Hilfe dieser Ableitungen ergeben sich ferner nach leichten Reductionen

$$\frac{1}{\varrho_0}\frac{\partial a}{\partial \varphi} = \frac{1}{\varkappa'}\left\{[\varkappa'^2 - \varkappa^2\sin^2\varphi]\frac{\cos\varphi}{\Delta\varphi} + [E_1(\varphi) - \varkappa'^2 u]\sin\varphi\right\},$$

$$\frac{1}{\varrho_0}\frac{\partial a}{\partial \varkappa} = \left(\frac{\varkappa}{\varkappa'}\right)^3\left\{\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta\varphi} - \frac{E_1(\varphi)}{\varkappa^2}\right\}\cos\varphi,$$

$$\frac{1}{\varrho_0}\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \varkappa\left\{\frac{\cos\varphi}{\Delta\varphi} - u\sin\varphi\right\},$$

$$\frac{1}{\varrho_0}\frac{\partial z}{\partial \varkappa} = -\left(\frac{\varkappa}{\varkappa'}\right)^2\left\{\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta\varphi} - \frac{E_1(\varphi)}{\varkappa^2}\right\}\cos\varphi.$$

Diese Werthe in (3) eingesetzt, folgt nach Weglassung solcher Factoren, die aus leicht erklärlichen Gründen nicht gleich Null angenommen werden dürfen,

$$\cos\varphi\Delta\varphi + \{E_1(\varphi) - u\}\sin\varphi = 0, \tag{4}$$

oder durch die Variabele u ausgedrückt in der Gudermann'schen Bezeichnungsweise

$$\mathrm{cnu}\,\mathrm{dnu} + \{E(u) - u\}\,\mathrm{snu} = 0. \tag{4a}$$

Letztere transcendente Gleichung enthält implicite auch den Modul $\varkappa$ und bestimmt zusammen mit den Gleichungen (2) die gesuchte Einhüllende. Zwingt man das betreffende Kreiscentrum zum Ueberschreiten dieser Grenzcurve, so reisst die Fläche. Die den verschiedenen Werthen von ϱ_0 entsprechenden Curven sind homothetisch.

Aus (4) erhält man

$$\frac{d\varphi}{d\varkappa} = \frac{\varkappa}{\varkappa'^2}\sin^2\varphi\,\{\varkappa^2\sin\varphi\cos\varphi - E_1(\varphi)\Delta\varphi\},$$

und mit Hilfe dieses Quotienten und der partiellen Ableitungen von a und z

$$\frac{dz}{da} = -\frac{\varkappa'}{\varkappa}.$$

Die Grenzcurve schneidet also die beiden Axen orthogonal und ihre Ordinate nimmt ab mit wachsender Abscisse. Es ist nämlich für den speciellen Werth $x = 1$

$$\mathsf{E}(u, 1) = \operatorname{sn}(u, 1) = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}},$$

(4a) geht also über in

$$e^u + e^{-u} - u(e^u - e^{-u}) = 0.$$

Man könnte dieses Resultat für das Catenoid auch direct ableiten und es dadurch verificiren. Obiger Gleichung genügt ein bestimmter positiver Werth u_0 und demnach bestimmt

$$z = \varrho_0 u_0 \operatorname{cn}(u_0, 1)$$

die grösste Ordinate, welche der Kreis mit dem Radius ϱ_0 im Falle des Catenoides erhalten kann, wobei aber vorausgesetzt wird, dass der Minimalkreis immer in der xy-Ebene bleibt; $\frac{dz}{da}$ ist hier Null.

Für $x = 0$ reducirt sich (4) auf $\cos\varphi = 0$, folglich wird in diesem Falle $a = \varrho_0$ und $z = 0$, woraus zu entnehmen, dass die Grenzcurve die x-Axe in der Entfernung ϱ_0 vom Nullpunkte schneidet und zwar orthogonal, da $\frac{dz}{da}$ hier unendlich gross wird.

Weitere Eigenschaften der Grenzcurve würden sich erst bei Betrachtung des zweiten Differentialquotienten ergeben.

Zur Theorie der Bernoulli'schen Zahlen.

Von

K. Schwering in Trier.

Man überzeugt sich leicht von der Richtigkeit folgender Gleichung, in welcher wir $x > 0$ voraussetzen:

$$(1)\qquad \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \cdots + \frac{1.2\ldots h}{(x+1)(x+2)\ldots(x+h+2)} + \cdots.$$

Nun setzen wir:

$$(2)\qquad \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{x^2} = a_0 + \frac{a_1}{x+1} + \frac{a_2}{(x+1)(x+2)} + \cdots + \frac{a_h}{(x+1)(x+2)\ldots(x+h)} + \cdots.$$

Verwandeln wir x in $x+1$ und subtrahiren, so erhalten wir links $\frac{1}{(x+1)^2}$ und rechts einen Ausdruck, der mit (1) in der Form übereinstimmt. Soweit die Gültigkeit der Entwicklung reicht, ist eine Coefficientenvergleichung gestattet. Denn man braucht nur der Reihe nach mit den Nennern zu multipliciren und dann $x = \infty$ zu setzen, um sich von der Richtigkeit dieser Behauptung zu überzeugen. Man findet so leicht:

$$a_1 = -1,\quad a_2 = -\frac{1}{2},\quad a_3 = -\frac{2}{3},\quad \ldots,\quad a_h = -\frac{1.2\ldots(h-1)}{h}.$$

Man gelangt so zu der Gleichung:

$$(3)\qquad \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{x^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)(x+2)} - \frac{1.2}{3(x+1)(x+2)(x+3)} - \cdots - \frac{1.2.3\ldots(h-1)}{h(x+1)(x+2)\ldots(x+h)} - \cdots.$$

Die Constante $\frac{\pi^2}{6}$ folgt durch die Annahme $x = \infty$. Die Richtigkeit der Entwicklung (3) für $x > 0$ lässt sich leicht in anderer Weise bestätigen, worauf wir einzugehen unterlassen.

Nach bekannter Entwicklung erhält man andererseits:

$$(4)\quad \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{x^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x^3}+\frac{1}{30}\cdot\frac{1}{x^5}$$
$$-\frac{1}{42}\cdot\frac{1}{x^7}+\cdots.$$

Die Coefficienten dieser Reihe sind die Bernoulli'schen Zahlen mit abwechselnden Vorzeichen. Daher ergiebt sich die Identität:

$$(5)\quad \frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+B_3\cdot\frac{1}{x^3}-B_5\cdot\frac{1}{x^5}+B_7\cdot\frac{1}{x^7}-B_9\cdot\frac{1}{x^9}+\cdots$$
$$=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2(x+1)(x+2)}+\frac{2}{3(x+1)(x+2)(x+3)}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{2\cdot3\ldots(h-1)}{h(x+1)(x+2)\ldots(x+h)}+\cdots.$$

Denken wir uns nun die rechte Seite nach Potenzen von $\frac{1}{x}$ entwickelt, so ist die so entstehende Reihe semiconvergent. Demnach ist eine Coefficientenvergleichung unter entsprechenden Vorsichtsmassregeln, die hier in Wegfall kommen, gestattet. Sehen wir uns nun die *Nenner* an, die rechts auftreten. Ist h keine Primzahl, so ist $(h-1)!$ durch h theilbar, also tritt ein solcher Nenner gar nicht auf. Ist $h=4$, so könnte dies als einzige Ausnahme erscheinen. Aber das entsprechende Glied:

$$\frac{2\cdot3}{4(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$$

liefert nur den Nenner 2. Ist dagegen h eine Primzahl, so haben wir die Congruenz:

$$(x+1)(x+2)\ldots(x+h)\equiv x(x^{h-1}-1)\bmod h,$$

also ist das allgemeine Glied, wenn ganzzahlige Bestandtheile wegbleiben, nach dem Wilson'schen Satze durch

$$\frac{-1}{h(x^h-x)}$$

zu ersetzen. Folglich tritt h im Nenner der Bernoulli'schen Zahlen B_m auf, wenn:

$$m=h,\quad h+(h-1),\quad h+2(h-1),\ \ldots$$

Es ist also $m-1=(h-1)g$, wo g eine ganze Zahl. Wenn wir nun die ganzzahligen Bestandtheile in (5) unterdrücken und auf die übrigbleibenden Theile Vergleichung durch das Congruenzzeichen anwenden, so folgt nach leichter Umformung:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{B_3}{x^3}+\frac{B_5}{x^5}-\frac{B_7}{x^7}+\frac{B_9}{x^9}-\frac{B_{11}}{x^{11}}+\cdots\\
&\equiv \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^5}+\frac{1}{x^7}+\cdots\right)\\
&+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^5}+\frac{1}{x^7}+\cdots\right)\\
&+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x^5}+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{13}}+\cdots\right)\\
&+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{x^7}+\frac{1}{x^{13}}+\frac{1}{x^{19}}+\cdots\right)\\
&+\frac{1}{11}\left(\frac{1}{x^{11}}+\frac{1}{x^{21}}+\frac{1}{x^{31}}+\cdots\right)
\end{aligned}
$$

Hieraus liest man sofort den v. Staudt-Clausius'schen Satz ab. Es ist bei wirklicher Ausrechnung:

$$B_3 = -\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+1, \qquad B_5 = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-1,$$

$$B_7 = -\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+1, \qquad B_9 = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-1,$$

$$B_{11} = -\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{11}+1, \qquad B_{13} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{13}-1,$$

$$B_{15} = -\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+2 \text{ u. s. w.}$$

Note on the simple group of order 504.

By

W. Burnside, Greenwich.

The simple group of order 504 is completely defined by the relations

(1) $A^7 = 1, \quad B^2 = 1, \quad (AB)^3 = 1, \quad (A^3BA^5BA^3B)^2 = 1.$

To verify this statement, let

$$\tau = A^3BA^5BA^3B,$$

and

$$\sigma = ABA^4B.$$

By the defining relations τ is an operation of order 2; and since

$$\begin{aligned}\sigma &= B.BABA.A^3B,\\ &= B.A^6B.A^3B,\\ &= BA^5.ABA.A^2B,\\ &= BA^5B.A^6.BA^2B;\end{aligned}$$

σ is an operation of order 7.

Now

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= ABA^3.ABABA.A^3B\\ &= ABA^3BA^3B,\end{aligned}$$

and

$$\sigma^{-2} = BA^4BA^4BA^6.$$

Hence

$$\begin{aligned}\sigma^2B\sigma^{-2} &= ABA^3BA^3BA^4BA^4BA^6,\\ &= ABA^3BA.A^2BA^4BA^4B.A^6.\\ &= ABA^3BA.BA^3BA^3BA^5.A^6,\end{aligned}$$

(since $A^2BA^4BA^4B$, being conjugate to τ, is an operation of order 2)

$$\begin{aligned}&= ABA^2.ABABA.A^2BA^3BA^4,\\ &= ABA^2BA^2BA^3BA^4;\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\sigma^2B\sigma^{-2}\tau &= ABA^2BA^2BABA^3B,\\ &= ABA^2BABA^2B,\\ &= (AB)^3 = 1.\end{aligned}$$

Hence

$$\tau = \sigma^2 B \sigma^{-2}.$$

But

$$\begin{aligned} B\sigma^{-1}B\sigma &= A^3BA^6BABA^4B, \\ &= A^3BA^5BA^3B, \\ &= \tau; \end{aligned}$$

and therefore

$$B\sigma^{-1}B\sigma = \sigma^2 B\sigma^{-2}. \tag{2}$$

I have shewn (Messenger of Mathematics, Vol. XXV, pp. 187—189) that (2) is the sufficient condition that σ and B, of orders 2 and 7, should generate a group of order 56, which contains 7 permutable operations of order 2 and 8 subgroups of order 7. Next let

$$\rho = BA^3;$$

then

$$\begin{aligned} \rho^3 &= BA^3BA^3BA^5.A^5, \\ &= A^2BA^4BA^4BA^5, \end{aligned}$$

(since $BA^3BA^2BA^5$ is of order 2)

$$= A^2BA^3.AB.A^4BA^5.$$

Now AB is an operation of order 3, and therefore ρ is an operation of order 9. Moreover ρ and B generate the group, since

$$(B\rho)^5 = A.$$

Hence, if it be shewn that the cyclical group generated by ρ and the group of order 56 generated by σ and B are permutable with each other, the relations (1) must define a group of finite order. Now $\sigma^{-2}B\sigma^2$, or B', transforms ρ into ρ^{-1}. For

$$\begin{aligned} B'\rho &= BA^4BA^4BA^6.B.ABA^3BA^3B.BA^3 \\ &= BA^4BA^4BA^5BA^2BA^6. \end{aligned}$$

Now

$$BA^5B = ABA^2BA.$$

Hence

$$\begin{aligned} B'\rho &= BA^4BA^5BA^2BA^3BA^6, \\ &= BA^5BA^2BA^3BA^3BA^6, \\ &= ABA^2BA^3BA^3BA^3BA^6, \\ &= ABA^4.A^5BA^3BA^3B.A^3BA^6. \end{aligned}$$

Hence $B'\rho$ is conjugate to $A^5BA^3BA^3B$, which is an operation of order 2. Therefore

$$(B'\rho)^2 = 1,$$

or

$$\rho^n B'\rho^n = B', \tag{3}$$

for all values of n.

Moreover it may be easily verified that

$$(4)\qquad \begin{cases} \rho\sigma\rho^2 = B, \\ \rho^2\sigma\rho^4 = \sigma B, \\ \rho^3\sigma\rho^3 = \sigma^6, \\ \rho^4\sigma\rho^7 = B\sigma^4 B, \\ \rho^5\sigma\rho^8 = B\sigma^3 B, \\ \rho^6\sigma\rho^5 = (B\sigma)^3, \\ \rho^7\sigma\rho^6 = (B\sigma)^4, \\ \rho^8\sigma\rho = B\sigma^6. \end{cases}$$

For instance,

$$\begin{aligned} \rho^4\sigma\rho^7 &= (BA^3)^4 ABA^4 B(BA^3)^7 = (BA^3)^3 A^3 (BA^3)^4 \\ &= (BA^3)^2 BA^6 BA^3 (BA^3)^3 = (BA^3)^2 ABA^4 (BA^3)^3 \\ &= BA.A^2 BA^4 BA^4 B.A^3 (BA^3)^2 \\ &= BABA^3 BA^3 BABA^3 BA^3 \\ &= A^6 BA^2 BA^2 BA^2 BA^3 \\ &= (A^6 BA^3)^4 = (BABA^4)^4 \\ &= (B\sigma B)^4 \quad = B\sigma^4 B. \end{aligned}$$

But (3) and (4) are sufficient conditions to ensure that the cyclical group $\{\rho\}$, generated by ρ, and the group $\{\sigma, B\}$, generated by σ and B' or B, should be permutable with each other. Hence the group $\{A, B\}$, where A and B satisfy the relations (1), is a group of finite order.

The simple group of order 504 is given by the totality of the linear substitutions

$$z' \equiv \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma \not\equiv 0, \pmod 2,$$

where $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ are powers of a root of the irreducible congruence

$$x^3 + x + 1 \equiv 0 \pmod 2.$$

This group is generated by the substitutions

$$a \quad \text{or} \quad z' \equiv xz$$

and

$$b \quad \text{or} \quad z' \equiv \frac{z + x^2}{x^2 z + 1};$$

and it is easy to verify that a and b satisfy the relations (1). Hence $\{a, b\}$ and $\{A, B\}$ are isomorphic; and since the order of $\{A, B\}$ cannot exceed 504, the isomorphism is simple. Finally therefore the group $\{A, B\}$, where A and B satisfy the relations (1), is simply isomorphic with the simple group of order 504.

Ueber das Dirichlet'sche Integral.

Von

T. Brodén in Lund.

Für die Gültigkeit der Gleichung

$$\lim_{\omega=\infty} \int_0^a f(x) \frac{\sin \omega x}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2} f(+0) \quad (0<a<\pi) \tag{1}$$

(welche in der Theorie der Fourier'schen Reihen von entscheidender Bedeutung ist) haben bekanntlich Dirichlet, Riemann, Lipschitz, du Bois-Reymond, Dini, Kronecker u. a. verschiedene hinreichende Bedingungen hergeleitet*). Am meisten weitgehend sind unstreitig die Untersuchungen von Dini und Kronecker. Aber weder die inhaltsreiche Arbeit von Dini noch der elegante Aufsatz von Kronecker enthält eine Theorie der fraglichen Verhältnisse, welche in Bezug auf Vollständigkeit oder methodische Einheitlichkeit recht befriedigend ist. Die folgende Darstellung hat den Zweck, durch Ergänzungen in mehreren Richtungen die Untersuchung der Frage zu einem relativen Abschluss zu bringen (von einer absoluten „Vollständigkeit" kann in diesem Falle kaum die Rede sein), und zugleich die verschiedenen neuen oder früher bekannten Bedingungsformen, welche

*) Man sehe Dirichlet, Sur la convergence des séries trigonométriques etc., Crelle J. Bd. 1; Ueber die Darstellung ganz willkürlicher Functionen etc., Repertorium der Physik von Dove, Bd. 1; Riemann, Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe, Abh. d. kgl. Ges. der Wissenschaften zu Göttingen, Bd. 13; du Bois-Reymond, Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz etc., Abh. der kgl. bayerischen Akad. d. Wiss., Bd. 12, und andere Arbeiten; Dini, Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale, Pisa 1880; Kronecker, Ueber das Dirichlet'sche Integral, Berliner Sitzungsberichte 1885; Hölder, Ueber eine neue hinreichende Bedingung etc., ibid. 1885; Lipschitz, De explicatione per series trigonometricas etc., Crelle J. Bd, 63; Jordan, Comptes Rendus etc. Bd. 92, p. 228. Vergl. auch Sachse, Versuch einer Geschichte etc., Schlömilch's Zeitschrift, Jahrg. 25, Supplementband, wo die Darstellung aber nicht ganz zuverlässig ist.

in Betracht kommen, als Ergebnisse einer möglichst einheitlichen und systematischen Deduction darzustellen. Im Interesse der Vollständigkeit wird hierbei in einigen Fällen die Beweisführung früherer Verfasser in ziemlich unwesentlich modificirter Form wiedergegeben (was an den betreffenden Stellen besonders hervorgehoben wird).

Von vornherein sei festgestellt, dass — wenn nicht anders ausdrücklich gesagt wird — $f(x)$ eine eindeutige, endliche und integrirbare Function sein soll, welche überdies die Eigenschaft hat, dass $f(+0)$ eine bestimmte endliche Grösse ist.

Ferner betrachten wir zunächst nicht das Integral (1) in unveränderter Form, sondern das verwandte (in Kronecker's Untersuchungen benutzte) Integral

$$J = \int_0^a f(x) \frac{\sin \omega \pi x}{x} dx \qquad (0 < a < 1).$$

Das Integral (1) nimmt diese Form an, wenn man $\frac{x}{\pi}$ als Integrationsvariable benutzt, $f(x)$ statt $f(\pi x)$ schreibt, und im Nenner πx statt $\sin \pi x$. Diese letzte Veränderung ist in der That (wie die übrigen) ohne Bedeutung, wenn es sich um den Grenzwerth des Integrals für $\omega = \infty$ handelt. Dies ist nicht ohne weiteres klar, aber ergiebt sich sehr leicht als eine Consequenz der folgenden Darstellung, wie im § 8 nachgewiesen wird.

Es gilt also zu entscheiden, unter welchen Bedingungen der Grenzwerth des Integrals J, für $\omega = \infty$, gleich $\frac{\pi}{2} f(+0)$ wird. Man kann sich aber hierbei auf den Fall beschränken, dass $f(+0) = 0$ ist. Wenn man nämlich $f(x) - f(+0)$ mit $f_1(x)$ bezeichnet, so ist

$$J = \int_0^a f_1(x) \frac{\sin \omega \pi x}{x} dx + f(+0) \int_0^a \frac{\sin \omega \pi x}{x} dx.$$

Das zweite Integral hat aber, unabhängig von a, für $\omega = \infty$ den Grenzwerth $\frac{\pi}{2}$, was unnöthig sein dürfte, hier näher nachzuweisen*). Wenn wir $f(x)$ statt $f_1(x)$ schreiben, reducirt sich die Frage also auf diejenige, unter welchen Bedingungen

$$\lim_{\omega = \infty} J = 0$$

ist, wenn man

$$f(+0) = 0$$

annimmt. Diese letzte Annahme wird im folgenden immer festgehalten, sobald das Gegentheil nicht besonders ausgesagt ist.

*) S. z. B. Kronecker, l. c. p. 641.

Es sei übrigens von vornherein ausdrücklich hervorgehoben, dass wir uns im folgenden immer die Grösse ω als unbeschränkt veränderlich denken und also nicht untersuchen, wie die verschiedenen Bedingungen sich möglicherweise modificiren lassen, wenn man voraussetzt, dass ω z. B. nur ganze ungerade Werthe annimmt (welche Voraussetzung die Theorie der Fourier'schen Reihen bekanntlich veranlassen kann).

Eine andere, mehr specielle Bemerkung: sobald im folgenden angenommen wird, dass irgend eine in Betracht gezogene Function [etwa $f'(x)$] „integrirbar" ist, so setzen wir immer voraus, dass dieselbe höchstens für eine im Cantor'schen Sinne „reductiblen" x-Menge unendlich gross ist (wobei doch von „hebbaren" Unendlichkeiten abgesehen werden kann). Vergl. die Note I.

§ 1.

Fundamentalsätze.

1. Wir gehen jetzt zur Aufstellung gewisser Sätze über, welche für die ganze folgende Untersuchung von fundamentaler Bedeutung sind.

Im Integrale J ist die obere Grenze eine beim fraglichen Grenzübergange constante Grösse. Man betrachte jetzt ein Integral

$$J_\alpha = \int_0^{\alpha(\omega)} f(x) \frac{\sin \omega \pi x}{x} dx,$$

wo die obere Grenze in der Art mit ω variirt, dass

$$\lim_{\omega = \infty} \alpha(\omega) = 0$$

ist. Für jeden ω-Werth ist im Intervalle $0 \ldots \alpha(\omega)$, unabhängig von x,

$$\left| \frac{\sin \omega \pi x}{x} \right| < \pi \omega,$$

und andererseits

$$|f(x)| \leqq g(\alpha),$$

wo $g(\alpha)$ eine gewisse von α (und somit von ω) abhängige positive Grösse [die obere Grenze für $|f(x)|$ im Intervalle $0 \ldots \alpha$] bedeutet, welche zufolge der Annahmen $\lim \alpha = 0$ und $f(+0) = 0$ für $\omega = \infty$ verschwindet,

$$\lim_{\omega = \infty} g(\alpha) = 0.$$

Hieraus folgt unmittelbar

$$|J_\alpha| < \pi \omega \alpha(\omega) g(\alpha),$$

und man kann daher behaupten:

Satz 1a. *Es wird immer*

$$\lim_{\omega = \infty} J_\alpha = 0,$$

sobald

$$\lim_{\omega=\infty} g(\alpha) \,.\, \omega\alpha(\omega) = 0 \tag{2}$$

ist.

Die Bedingung (2) ist offenbar immer erfüllt, wenn man die Function $\alpha(\omega)$ so wählt, dass $\omega \,.\, \alpha$ unter einer endlichen Grenze bleibt. Aber auch mit $\lim \omega \,.\, \alpha = \infty$ ist die Bedingung bei jeder Function $f(x)$ erfüllbar, weil g immer mit α eindeutig bestimmt ist, und zwischen α und ω sich selbstverständlich immer eine solche Relation feststellen lässt, dass $\lim \alpha \,.\, \omega$ unendlich gross wird, aber $\lim \alpha \,.\, \omega \,.\, g = 0$ (beispielsweise $\alpha \,.\, \omega \,.\, \sqrt{g} = 1$).

Man kann ferner über den Satz 1a hinaus noch einen Schritt weiter gehen. Es ist

$$J_\alpha = \int_0^{\frac{1}{\omega}} f(x) \frac{\sin \omega\pi x}{x} dx + \int_{\frac{1}{\omega}}^{\alpha(\omega)} f(x) \frac{\sin \omega\pi x}{x} dx .$$

Da nach 1a das erste dieser Integrale im Limes verschwindet, braucht man nur das zweite zu berücksichtigen. Und für dieses Integral gilt offenbar die Ungleichheit

$$\left| \int_{\frac{1}{\omega}}^{\alpha(\omega)} f(x) \frac{\sin \omega\pi x}{x} dx \right| < g(\alpha) \,.\, |\log (\alpha \,.\, \omega)| ,$$

aus welcher folgendes zu schliessen ist:

Satz 1b. *Wenn*

$$\lim_{\omega=\infty} g(\alpha) \,.\, \log (\omega \,.\, \alpha) = 0 \tag{3}$$

ist, so ist immer auch

$$\lim J_\alpha = 0 .$$

Wenn man von dem Falle $\lim (\omega \,.\, \alpha) = 0$ absieht, so enthält dieser Satz den vorigen, da für $\lim (\omega \,.\, \alpha) = \infty$ der Quotient

$$\log (\omega \,.\, \alpha) : (\omega \,.\, \alpha)$$

im Limes verschwindet. Es reicht ja sogar hin, dass $g \,.\, \alpha \,.\, \omega$ endlich bleibt. Andererseits lässt sich die Bedingung (3) immer erfüllen, ohne dass $g \,.\, \omega \,.\, \alpha$ endlich bleibt (beispielsweise für $\sqrt{g} \,.\, \log (\omega\alpha) = 1$).

Der Fall, dass $\omega \,.\, \alpha$, ohne constant zu sein, unterhalb einer endlichen Grenze bleibt, aber andererseits nicht beliebig nahe der Null kommt, ist offenbar nicht wesentlich davon verschieden, dass (wenigstens von einem gewissen ω-Werthe an) $\omega \,.\, \alpha$ gleich einer positiven Constante bleibt. Der entsprechende Specialfall des Satzes 1a (oder 1b)

bildet in der That den Ausgangspunkt für Kronecker's Darstellung im obengenannten Aufsatze, und tritt hier in der Form auf, dass für $f_0(+0) = 0$

$$\lim_{\sigma=0} \int_0^{\xi} f_0(\sigma x) \sin \pi x \, d \log x = 0$$

ist, wenn ξ eine beliebige positive Constante bedeutet*). Und Kronecker sagt mit Recht, dass diese einfache Bemerkung „bisher nicht hervorgehoben oder wenigstens nicht vollständig für die Bedingungen der Gültigkeit der Dirichlet'schen Integralrechnung benutzt worden ist". Aber es gilt andererseits, dass die elegante und umfassende Bedingungsgleichung, welche das Hauptergebniss der Kronecker'schen Untersuchung bildet (s. unten) eine bemerkenswerthe Modification zulässt, welche soeben aus der erwähnten Verallgemeinerung der Fundamentalbemerkung hervorgeht. Kronecker selbst lässt es in der That nicht ganz unbemerkt, dass Integrale der Form J_α für $\omega = \infty$ immer verschwinden können, auch wenn lim $(\omega . \alpha)$ nicht endlich ist; aber die obengenannten einfachen Bedingungen hierfür werden von ihm nicht vollständig und deutlich ausgesprochen, und noch weniger vollständig benutzt (Näheres hierüber in der Note V).

2. Wir fügen noch einen Satz hinzu, welcher eine hinreichende Bedingung für das Verschwinden von lim J_α enthält. Diese Bedingung ist viel complicirter als die vorigen, und bei Weitem nicht so wichtig. Obgleich der fragliche Satz also kaum in eigentlicherem Sinne als „fundamental" zu bezeichnen ist, führen wir doch denselben hier an — dabei bemerkend, dass er theilweise der oben citirten Arbeit von Dini entnommen werden kann, obgleich hier nicht in seiner Reinheit und Allgemeinheit dargestellt (Näheres hierüber unten am Ende des § 5.)

Durch partielle Integration erhält man, wenn $\nu(x)$ eine vorläufig unbestimmte Function bedeutet,

$$J_\alpha = \frac{\sin \omega\pi\alpha}{\alpha \nu(\alpha)} \int_0^{\alpha} f(\varepsilon) \nu(\varepsilon) \, d\varepsilon - \int_0^{\alpha} \frac{d}{dx} \left\{ \frac{\sin \omega\pi x}{x \nu(x)} \right\} dx \int_0^{x} f(\varepsilon) \nu(\varepsilon) \, d\varepsilon .$$

Nach der Note III ist diese partielle Integration erlaubt, wenn $f(x) \nu(x)$ integrirbar, $\frac{\sin \omega\pi x}{x \nu(x)}$ stetig, und $\frac{d}{dx}\left\{\frac{\sin \omega\pi x}{x \nu(x)}\right\}$ integrirbar ist, und überdies entweder die erste oder die dritte dieser Functionen *absolut* integrirbar. Diese Bedingungen lassen sich am einfachsten so erfüllen, dass man $\nu(x)$ stetig annimmt, $\nu(+0)$ von Null verschieden, und $\nu'(x)$ integrabel. Diese Annahmen können wir jedoch gegenwärtig nicht mit Vortheil benutzen. Dagegen werden wir annehmen, dass $\nu(x)$ mit

*) l. c. p. 642.

mit Ausnahme für $x = 0$ stetig ist, $\lim_{x=0} x\nu(x)$ von Null verschieden, und $x\nu'(x)$ sowie auch $f(x)\nu(x)$ integrabel, die eine absolut. Dass unter diesen Voraussetzungen nicht nur die zwei ersten der genannten Bedingungen erfüllt sind (was augenscheinlich ist), sondern auch die dritte, folgert man unmittelbar aus der Identität

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{\sin \omega\pi x}{x\nu(x)}\right\} = \frac{\pi\omega}{x\nu(x)}\cos\omega\pi x - \frac{\nu(x)+x\nu'(x)}{[x\nu(x)]^2}\sin\omega\pi x.$$

Mittels dieser Identität (in verkürzter Form) erhält man ferner, wenn der Kürze wegen

$$\int_0^x f(x)\nu(x)\,dx = \chi(x)$$

gesetzt wird,

$$J_\alpha = \frac{\sin\omega\pi\alpha}{\alpha\nu(\alpha)}\chi(\alpha) + \int_0^\alpha \chi(x)\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{x\nu(x)}\right\}\sin\omega\pi x\,dx$$

$$-\int_0^\alpha \chi(x)\frac{\pi\omega}{x\nu(x)}\cos\omega\pi x\,dx.$$

Das erste Glied auf der rechten Seite verschwindet immer für $\omega = \infty$, d. h. für $\alpha = 0$ (da $\chi(0) = 0$, und $\lim_{x=0} x\nu(x)$ von Null verschieden). Bei geeigneten Annahmen über die Functionen $\nu(x)$ und $\alpha(\omega)$ gilt dasselbe für die beiden Integrale. Zunächst nehmen wir an, dass $\nu(x)$ durchaus positiv ist, und dass $x\nu(x)$ bei abnehmendem x durchaus zunimmt. Dann ist, wenn $\bar{\chi}$ die obere Grenze für den numerischen Werth von $\chi(x)$ im Intervalle $0 \ldots \alpha$ bedeutet,

$$\left|\int_0^\alpha \chi(x)\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{x\nu(x)}\right\}\sin\omega\pi x\,dx\right| < \bar{\chi}\left\{\frac{1}{\alpha\nu(\alpha)} - \frac{1}{\lim_{x=0} x\nu(x)}\right\},$$

$$\left|\int_0^\alpha \chi(x)\frac{\pi\omega}{x\nu(x)}\cos\omega\pi x\,dx\right| < \pi\bar{\chi}\cdot\frac{\omega}{\nu(\alpha)},$$

sowie auch

$$\left|\int_0^\alpha \chi(x)\frac{\pi\omega}{x\nu(x)}\cos\omega\pi x\,dx\right| < \pi\bar{\chi}\cdot\omega\cdot\int_0^\alpha \frac{dx}{x\nu(x)}.$$

Das erste Integral verschwindet somit immer im Limes, und das zweite wenn $\frac{\omega}{\nu(\alpha)}$ endlich bleibt, oder wenn $\omega\cdot\int_0^\alpha \frac{dx}{x\nu(x)}$ endlich bleibt. Es

reicht aber auch immer aus, wenn $\omega \cdot \int_{1:\omega}^{a} \frac{dx}{x\,\nu(x)}$ endlich bleibt; dies folgt einfach daraus, dass man, wie aus dem Satze 1a folgt, überall die untere Integrationsgrenze Null durch $\frac{1}{\omega}$ ersetzen kann. — Diese Ergebnisse lassen sich folgendermassen zusammenfassen:

Satz 1c. *Es ist* $\lim J_\alpha = 0$, *sobald*

$$\frac{\omega}{\nu(\alpha)} \quad \textit{oder} \quad \omega \cdot \int_{1:\omega}^{a} \frac{dx}{x\,\nu(x)} \tag{4}$$

endlich bleibt, wo $\nu(x)$ *irgend eine eindeutige, positive Function bedeutet, welche folgende Eigenschaften hat: es soll* $x\,\nu(x)$ *wenigstens mit Ausnahme für* $x = 0$, *stetig sein und bei abnehmendem* x *durchaus zunehmen* [also $\nu(+0) = +\infty$]; *überdies sollen die Functionen* $x\,\nu'(x)$ *und* $f(x) \cdot \nu(x)$ *durchaus integrirbar sein, und wenigstens die eine absolut integrirbar.*

Es stellt sich hier die Frage von selbst dar, ob diese für $\nu(x)$ und $\alpha(\omega)$ vorgeschriebenen Eigenschaften [nebst der immer für α geltenden Bedingung $\lim \alpha = 0$] in der That bei jeder Function $f(x)$ realisirbar seien; in Betracht des verhältnissmässig geringen Interesses des ganzen Satzes, lassen wir aber diese Frage bei Seite. Ebensowenig werden wir darauf eingehen, das Bedingungssystem 1c in irgend einer Richtung mit 1a oder 1b zu vergleichen.

3. Wir denken uns jetzt das Integral J so verändert, dass die untere Grenze einen von Null verschiedenen Werth hat, und werden folgendes nachweisen:

Satz 2. *Es ist für* $0 < b < a < 1$

$$\lim_{\omega=\infty} \int_{b}^{a} f(x)\,\frac{\sin \omega\pi x}{x}\,dx = 0. \tag{5}$$

Wenn man für irgend eine Function $f(x)$ bewiesen hat, dass unabhängig von a, $\lim J = 0$ $\left[\text{bez. } = \frac{\pi}{2} f(+0)\right]$ ist, so ist selbstverständlich die Gleichung (5) ein Corollarium hiervon. Auf diesem Wege gelangt in der That Dirichlet (Crelle J. Band IV) unter den von ihm gemachten Annahmen über $f(x)$ zu dieser Gleichung [oder richtiger zu einer analogen Gleichung, da er nicht ganz denselben Integranden benutzt]. Da aber die Gleichung (5) in der That *immer* gilt, sobald $f(x)$ endlich und integrabel ist, so ist es am meisten naturgemäss und vortheilhaft, für dasselbe von vornherein einen allgemeinen Beweis zu geben, um nachher bei ferneren Annahmen über $f(x)$ für die Untersuchung des Integrals J Nutzen zu ziehen. Selbst-

verständlich wird hierdurch die Einsicht gewonnen, dass bei allen in Frage kommenden Functionen $f(x)$, der Grenzwerth des Integrals J, wie er sich auch verhalten mag, doch immer unabhängig von a ist.

Der Vollständigkeit wegen theilen wir hier einen Beweis des fraglichen wichtigen Satzes mit, ohne dabei in wesentlicheren Hinsichten von der Beweisführung früherer Verfasser [namentlich von Kronecker's, l. c. p. 645] abzuweichen.

Es ist

$$\int_b^a f(x)\,\frac{\sin\omega\pi x}{x}\,dx = \int_b^{\frac{2k}{\omega}} + \int_{\frac{2k}{\omega}}^{\frac{2m}{\omega}} + \int_{\frac{2m}{\omega}}^a,$$

wo k und m solche (von ω abhängige) ganze Zahlen bedeuten, dass

$$0 < \frac{2k}{\omega} - b \leqq \frac{2}{\omega}, \quad 0 < a - \frac{2m}{\omega} \leqq \frac{2}{\omega}$$

ist. Da das erste und dritte Integral auf der rechten Seite offenbar für $\omega = \infty$ verschwinden, hat man nur zu zeigen, dass

$$\lim_{\omega=\infty} \int_{\frac{2k}{\omega}}^{\frac{2m}{\omega}} \frac{f(x)}{x} \sin\omega\pi x\,dx = \lim_{\omega=\infty} K = 0$$

ist. Man hat

$$K = \sum_{i=k}^{m-1} \left\{ \int_{\frac{2i}{\omega}}^{\frac{2i+1}{\omega}} \frac{f(x)}{x} \sin\omega\pi x\,dx + \int_{\frac{2i+1}{\omega}}^{\frac{2i+2}{\omega}} \frac{f(x)}{\omega} \sin\omega\pi x\,dx \right\}$$

$$= \sum_{i=k}^{m-1} \int_0^{\frac{1}{\omega}} dx \sin\omega\pi x \cdot \left\{ \frac{f\left(x+\frac{2i}{\omega}\right)}{x+\frac{2i}{\omega}} - \frac{f\left(x+\frac{2i+1}{\omega}\right)}{x+\frac{2i+1}{\omega}} \right\}$$

$$= \int_0^1 dx \sin\pi x \cdot \sum_{i=k}^{m-1} \frac{1}{\omega} \left\{ \frac{f\left(\frac{x}{\omega}+\frac{2i}{\omega}\right)}{\frac{x}{\omega}+\frac{2i}{\omega}} - \frac{f\left(\frac{x}{\omega}+\frac{2i+1}{\omega}\right)}{\frac{x}{\omega}+\frac{2i+1}{\omega}} \right\}.$$

Der Grenzwerth dieses Integrals für $\omega = \infty$ ist mit Sicherheit gleich Null, wenn für $0 < x < 1$ der Summenausdruck sich mit wachsendem ω *gleichmässig* der Null nähert. Dies folgt aber aus der angenommenen Integrabilität von $f(x)$. Da nämlich $0 < b < a$ ist, so wird im Intervalle $b \ldots a$ auch die Function $\frac{f(x)}{x}$ integrabel. Ferner

ist für alle x zwischen 0 und 1 der absolute Werth des Summenausdruckes im letzten Integrale kleiner (oder wenigstens nicht grösser) als

$$\frac{1}{2}\sum_{i=k}^{m-1}\frac{2}{\omega}\cdot D_i,$$

wo D_i die „Schwankung" [s. Note I] der Function $\frac{f(x)}{x}$ im Intervalle $\frac{2i}{\omega}\ldots\frac{2i+2}{\omega}$ bedeutet. Diese Summe verschwindet bekanntlich für $\omega=\infty$, da $\frac{f(x)}{x}$ endlich und integrabel ist [Note I]. Also nähert sich der Summenausdruck unter dem Integralzeichen gleichmässig der Null, und es ist folglich $\lim_{\omega=\infty} K=0$, w. z. b. w. — Und dies gilt unabhängig von dem Verhalten von $f(+0)$, da bei gegebenem b-Werthe der Verlauf von $f(x)$ im Intervalle $0\ldots b$ ohne Bedeutung ist für das jetzt fragliche Integral. Es kann daher $f(+0)$ sogar unendlich oder unbestimmt sein, sowie auch die Integrabilität nur für jede Strecke $\varepsilon\ldots a$, wo ε beliebig klein ist, stattfinden muss.

Aus dem obigen Beweise geht unmittelbar ein Satz hervor, welcher im Folgenden zur Anwendung kommt.

Corollarium. Wenn a und b constant sind, und die Zahlen k, m die oben angegebene Bedeutung haben, so ist

$$\lim_{\omega=\infty}\int_0^1 dx\left|\sum_{i=k}^{m-1}\left\{\frac{f\left(\frac{x}{\omega}+\frac{2i}{\omega}\right)}{x+2i}-\frac{f\left(\frac{x}{\omega}+\frac{2i+1}{\omega}\right)}{x+2i+1}\right\}\right|=0,$$

da die Summe sich gleichmässig der Null nähert.

§ 2.

Hauptbedingung für die Gültigkeit der Dirichlet'schen Integralgleichung.

Jetzt werden wir zur Aufstellung einer Bedingung für das Verschwinden von $\lim J$ fortschreiten, welche als „Hauptbedingung" bezeichnet werden kann, nämlich in dem Sinne, dass dieselbe alle anderen vorher gegebenen oder in dieser Arbeit aufgestellten Bedingungen umfasst (nämlich alle solchen, welche sich direct auf $f(x)$ beziehen, und nicht etwa wie diejenigen im § 6 auf Functionen, von denen $f(x)$ in irgend einer Weise zusammengesetzt ist). Man dürfte sogar behaupten können, dass dieser Bedingungssatz so zu sagen eine natürliche Grenze in der Theorie des Dirichlet'schen Integrals bezeichnet,

indem die Functionen $f(x)$, welche der Dirichlet'schen Integralgleichung genügen, ohne in das Gebiet der fraglichen Bedingung zu fallen (wenn solche überhaupt existiren) von ganz besonders specieller und complicirter Natur sein dürften, und jedenfalls ihre ganz besondere Untersuchungsmethode erfordern.

Es ist

$$J = \int_0^{\alpha(\omega)} + \int_{\alpha(\omega)}^{\varepsilon} \frac{f(x)}{x} \sin \omega \pi x \, dx + \int_{\varepsilon}^{a},$$

wo $\alpha(\omega)$ irgend eine der oben entwickelten Bedingungen erfüllt, und ε eine beliebige Grösse zwischen 0 und a bedeutet. Der Grenzwerth des ersten Integrals verschwindet immer, und ebenso der Grenzwerth des dritten, sobald ε *constant* — wenn auch beliebig klein — ist (Satz 2). Man braucht somit nur das zweite Integral

$$J_1 = \int_{\alpha(\omega)}^{\varepsilon} \frac{f(x)}{x} \sin \omega \pi x \, dx$$

zu betrachten, und es ist hinreichend, wenn man nachweisen kann, dass der Grenzwerth dieses Integrals bei geeigneter Wahl der Function $\alpha(\omega)$ und der Grösse ε numerisch kleiner als eine gegebene, beliebig kleine Grösse wird.

Ferner zerlegen wir das Integral J (vergl. den Bew. des Satzes 2) in die drei Integrale

$$\int_{\alpha(\omega)}^{\frac{2k}{\omega}} + \int_{\frac{2k}{\omega}}^{\frac{2m}{\omega}} + \int_{\frac{2m}{\omega}}^{\varepsilon}$$

wo k und m ganze Zahlen sind, für welche

$$(6) \qquad 0 < \frac{2k}{\omega} - \alpha \leq \frac{2}{\omega}, \quad 0 < \varepsilon - \frac{2m}{\omega} \leq \frac{2}{\omega}.$$

Das dritte Integral verschwindet offenbar für $\omega = \infty$, da das Integrationsgebiet unendlich klein wird, und der Integrand endlich bleibt. Dasselbe gilt aber auch für das erste. Denn es ist

$$\left| \int_{\alpha(\omega)}^{\frac{2k}{\omega}} \frac{f(x)}{x} \sin \omega \pi x \, dx \right| < g_1 \cdot \log \frac{2k}{\omega \alpha} \leq g_1 \cdot \log \left(1 + \frac{2}{\omega \alpha}\right),$$

wo g_1 die obere Grenze für $|f(x)|$ im Intervalle $0 \cdots \frac{2k}{\omega}$ bedeutet; und $\lim g_1$ ist $= 0$, während $\log \left(1 + \frac{2}{\omega \alpha}\right)$ endlich bleibt, mit Ausnahme für den Fall $\lim \omega \alpha = 0$; in diesem Falle beachte man, dass

der numerische Werth des fraglichen Integrals kleiner als $g_1 . \pi\omega\left(\frac{2k}{\omega} - \alpha\right)$ ist, also $< 2\pi g_1$.

Die Sache hat sich also auf die Untersuchung des Integrals

$$K_1 = \int_{\frac{2k}{\omega}}^{\frac{2m}{\omega}} \frac{f(x)}{x} \sin \omega \pi x \, dx$$

reducirt, wo die Zahlen k, m den Bedingungen (6) genügen, und ε beliebig klein ist, aber bei der Variation von ω constant bleibt. Um sogleich zu möglichst umfassenden Bedingungen für das Verschwinden von $\lim J$ zu gelangen, bietet sich von selbst der Weg dar, ganz dieselbe Transformation des Integrals K_1 vorzunehmen, welche oben beim Beweise für das unbedingte Verschwinden von $\lim K$ eine wesentliche Rolle spielte. Wir gehen also von der Gleichung

$$K_1 = \int_0^1 dx \sin \pi x \sum_{i=k}^{m-1} \left\{ \frac{f\left(\frac{x}{\omega} + \frac{2i}{\omega}\right)}{x + 2i} - \frac{f\left(\frac{x}{\omega} + \frac{2i+1}{\omega}\right)}{x + 2i + 1} \right\}$$

aus, welche selbstverständlich ganz wie beim Integrale K herzuleiten ist, obgleich jetzt für die Zahlen k und m gewissermassen andere Bestimmungen gelten. Der Grenzwerth von $|K_1|$ für $\omega = \infty$ wird kleiner als eine beliebige gegebene Grösse ϱ, wenn

$$\lim_{\omega = \infty} \int_0^1 \left| \sum_k^{m-1} \right| dx < \varrho \tag{7}$$

ist (wo Σ den in K_1 vorkommenden Summenausdruck bedeutet). Eine hinreichende Bedingung für das Verschwinden von $\lim J$ ist also, dass eine Function $\alpha(\omega)$ [von der oben festgestellten Natur] und eine Constante ε sich so bestimmen lassen, dass die Ungleichheit (7) stattfindet (für beliebig kleines ϱ). Hierbei ist aber zu bemerken, dass der Grenzwerth (7) in der That ganz unabhängig von ε ist. Wenn nämlich $\varepsilon_1 < \varepsilon$ ist, so können wir den Summenausdruck auf folgende Weise zerlegen:

$$\sum_{i=k}^{m-1} = \sum_{k}^{m_1-1} + \sum_{m_1}^{k_1-1} + \sum_{k_1}^{m-1},$$

wo

$$0 < \varepsilon_1 - \frac{2m_1}{\omega} \leqq \frac{2}{\omega}, \quad 0 < \frac{2k_1}{\omega} - \varepsilon_1 \leqq \frac{2}{\omega}$$

ist) und also $k_1 - 1 = m_1$ oder $k_1 - 1 = m_1 + 1$. Es wird dann

$$\left|\sum_{k}^{m-1}\right| = \Theta_1 \left|\sum_{k}^{m_1-1}\right| + \Theta_2 \left|\sum_{m_1}^{k_1-1}\right| + \Theta_3 \left|\sum_{k_1}^{m-1}\right|,$$

wo $\Theta_1 = \pm 1$, $\Theta_2 = \pm 1$, $\Theta_3 = \pm 1$; folglich auch

$$\int_0^1 \left|\sum_{k}^{m-1}\right| dx = \Theta_1 \int_0^1 \left|\sum_{k}^{m_1-1}\right| dx + \Theta_2 \int_0^1 \left|\sum_{m_1}^{k_1-1}\right| dx + \Theta_3 \int_0^1 \left|\sum_{k_1}^{m-1}\right| dx.$$

Das zweite Integral auf der rechten Seite verschwindet für $\omega = \infty$, da unter dem Summationszeichen nur eine endliche Anzahl von Gliedern (höchstens 4) vorkommt, deren Summe sich offenbar gleichmässig der Null nähert. Aber auch der Grenzwerth des dritten Integrals verschwindet: dies ist ja in der That eine unmittelbare Folge vom Corollarium zum Satze 2 (da ε und ε_1 beide constant sind, wie oben a und b). Folglich ist*)

$$\lim_{\omega=\infty} \int_0^1 \left|\sum_{k}^{m-1}\right| dx = \lim_{\omega=\infty} \int_0^1 \left|\sum_{k}^{m_1-1}\right| da,$$

was damit gleichbedeutend ist, dass $\lim_{\omega=\infty} \int_0^1 \left|\sum_{k}^{m-1}\right|$ nicht von ε abhängt.

Wir können also folgendes aussprechen:

Satz 3. *Es ist* (unter der Annahme $f(+0) = 0$) *für die Gültigkeit der Gleichung*

$$\lim_{\omega=\infty} \int_0^a f(x) \frac{\sin \omega\pi x}{x}\, dx = 0 \qquad (0 < a < 1)$$

hinreichend, wenn es für irgend eine den Bedingungen des Satzes 1a, 1b *oder* 1c *genügende Function* $\alpha(\omega)$ *gilt, dass der immer von* ε *unabhängige Grenzwerth*

$$\lim \int_0^1 dx \left| \sum_{i=k}^{m-1} \left\{ \frac{f\left(\frac{x}{\omega} + \frac{2i}{\omega}\right)}{x+2i} - \frac{f\left(\frac{x}{\omega} + \frac{2i+1}{\omega}\right)}{x+2i+1} \right\} \right|, \tag{8}$$

wo

$$\alpha(\omega) < \frac{2k}{\omega} \leq \alpha(\omega) + \frac{2}{\omega}, \quad \frac{2m+2}{\omega} \geq \varepsilon > \frac{2m}{\omega}$$

ist, unterhalb einer beliebig kleinen gegebenen positiven Grösse liegt.

*) Da nämlich die beiden letzten Glieder im Limes verschwinden, so ist für hinreichend grosse ω-Werthe $\Theta_1 = +1$ (wenn nicht auch das erste Integral sich der Null nähert).

Zu bemerken ist hierbei noch, dass der Grenzwerth (8) sich wenigstens für alle Functionen $\alpha(\omega)$, welche der Bedingung des Satzes 1a oder 1b genügen, ähnlich verhält (während der Grenzwerth des Integrals

$$\int_{\alpha(\omega)}^{\infty} \frac{f(x)}{x} \sin \omega \pi x \, dx$$

mit Sicherheit von α unabhängig ist, sobald nur α irgend eine der Bedingungen (2), (3), (4) erfüllt). Wenn nämlich, wenigstens von einem gewissen ω an, $\alpha_1(\omega) > \alpha(\omega)$ ist, so hat man (mit der oben benutzten verkürzten Schreibweise)

$$\sum_{k}^{m-1} = \sum_{k}^{m_1-1} + \sum_{m_1}^{k_1-1} + \sum_{k_1}^{m-1},$$

wo jetzt

$$0 < \alpha_1(\omega) - \frac{2m_1}{\omega} \leqq \frac{2}{\omega}, \quad 0 < \frac{2k_1}{\omega} - \alpha_1(\omega) \leqq \frac{2}{\omega},$$

und somit, wie oben,

$$\int_0^1 \left|\sum_{k}^{m-1}\right| dx = \Theta_1 \int_0^1 \left|\sum_{k}^{m_1-1}\right| dx + \Theta_2 \int_0^1 \left|\sum_{m_1}^{k_1-1}\right| dx + \Theta_3 \int_0^1 \left|\sum_{k_1}^{m-1}\right| dx.$$

Es ist ferner

$$\int_0^1 \left|\sum_{k}^{m_1-1}\right| dx < \int_0^1 dx \cdot \sum_{k}^{m_1-1} \left\{ \left| \frac{f\left(\frac{x}{\omega} + \frac{2i}{\omega}\right)}{x+2i} - \frac{f\left(\frac{x}{\omega} + \frac{2i+1}{\omega}\right)}{x+2i+1} \right| \right\} <$$

$$< \sum_{k}^{m_1-1} \left\{ \int_0^1 dx \cdot \left| \frac{f\left(\frac{x}{\omega} + \frac{2i}{\omega}\right)}{x+2i} \right| + \int_0^1 dx \left| \frac{f\left(\frac{x}{\omega} + \frac{2i+1}{\omega}\right)}{x+2i+1} \right| \right\} =$$

$$= \sum_{k}^{m_1-1} \left\{ \int_{\frac{2i}{\omega}}^{\frac{2i+1}{\omega}} \frac{|f(x)|}{x} dx + \int_{\frac{2i+1}{\omega}}^{\frac{2i+2}{\omega}} \frac{|f(x)|}{x} dx \right\} \leqq \int_{\frac{2}{\omega}}^{\alpha_1(\omega)} \frac{|f(x)|}{x} dx <$$

$$< g(\alpha_1) \log \frac{\omega \alpha_1}{2}.$$

Wenn nun $\alpha_1(\omega)$ der Bedingung (3) genügt, so wird also

$$\lim \int_0^1 \left| \sum_k^{m_1-1} \right| dx = 0.$$

Auf ähnliche Weise erhält man (bei Beachtung, dass die Summe $\sum_{m_1}^{k_1-1}$ höchstens zwei binomische Glieder enthält, vgl. oben)

$$\int_0^1 \left| \sum_{m_1}^{k_1-1} \right| dx < \sum_{m_1}^{k_1-1} \int_{\frac{2i}{\omega}}^{\frac{2i+2}{\omega}} \frac{|f(x)|}{x}\, dx < g\left(\frac{2k_1}{\omega}\right) \log\left(1+\frac{2}{m_1}\right),$$

weshalb auch $\lim \int_0^1 \left| \sum_{m_1}^{k_1-1} \right| dx = 0$, sobald nur $m_1 > 0$ bleibt, was wir voraussetzen können, da im Falle $\lim m_1 = 0$*), wenigstens von einem gewissen ω an, $\alpha(\omega) - \alpha_1(\omega) < \frac{2}{\omega}$ ist, und also die jetzt zu beweisende Thatsache evident (es wird ja in diesem Falle auch die obige Zerlegung von $\sum_k^{m-1}$ ungültig; dasselbe trifft ja in der That immer ein, wenn $k > m_1 - 1$ ist, aber dann ist auch immer die ganze Sache evident). Wir erhalten also

$$\lim \int_0^1 dx \left| \sum_k^{m-1} \right| = \lim \int_0^1 dx \left| \sum_k^{m_1-1} \right|,$$

w. z. b. w. Es bleibt noch übrig, den Fall zu betrachten, dass $\alpha_1(\omega)$ der Bedingung (2), nicht aber der Bedingung (3) genügt. Wie wir sahen, setzt dies voraus, dass $\lim \omega\alpha = 0$ ist, also von einem gewissen ω an $\alpha < \frac{2}{\omega}$, und die Sache wird also, wie gleich oben, evident. Hiermit ist der Beweis voll erbracht. [Der Beweis zeigt übrigens offenbar, dass es hinreichend ist, wenn man annimmt, dass $\alpha_1(\omega)$ — die *grössere* der beiden α-Functionen — die Bedingung (2) [oder (3) erfüllt].

*) Von dem Falle, dass $\lim m_1$ unbestimmt, mit der Null als möglichem Werthe, ist, können wir absehen, da dies voraussetzt, dass $\alpha_1(\omega)$ *nicht unaufhörlich* mit wachsendem ω abnimmt, und solche α-Functionen aus leicht ersichtlichen Gründen nicht berücksichtigt werden müssen.

Es ergiebt sich also, dass man, ohne die Allgemeinheit des Satzes 3 zu beeinträchtigen, nicht nur der Constanten ε einen beliebigen speciellen Werth < 1 $\left(\text{z. B. } \frac{1}{2}\right)$ ertheilen kann, sondern auch, dass man $\varrho = 0$ setzen und eine ganz specielle Function $\alpha(\omega)$ — z. B. $\frac{1}{\omega}$ — benutzen kann — mit Reservation für die Möglichkeit, dass es α-Functionen giebt, welche der Bedingung (4) nicht aber (2) oder (3) genügen. Wenn man, wie Kronecker, nur solche α-Functionen berücksichtigt, für welche $\omega . \alpha$ endlich (und constant) bleibt, so lässt sich, mit Kronecker's Bezeichnungen, behaupten, dass die Bedingung

$$\lim_{x_0=0} \lim_{m=\infty} \lim_{\sigma=0} \int_0^1 dx \cdot \left| \sum_h (-1)^h \frac{f(\sigma x+\sigma h)}{x+h} \right| = 0 \qquad \left(2m < h \leqq 2\left[\frac{x_0}{2\sigma}\right]\right),$$

welche in Kronecker's Darstellung implicite enthalten ist*), in der That sachlich nicht verändert wird, wenn man sie durch folgende scheinbar speciellere Form ersetzt:

$$\lim_{\sigma=0} \int_0^1 dx \left| \sum_h (-1)^h \frac{f(\sigma x+\sigma h)}{x+h} \right| = 0 \quad \left(2m < h \leqq 2\left[\frac{x_0}{2\sigma}\right]\right),$$

wo m und x_0 specielle Werthe haben.

Es braucht wohl kaum besonders bemerkt zu werden, dass die allgemeineren Bedingungsformen, obgleich die grössere Allgemeinheit nur formal ist, ihre Berechtigung und Bedeutung haben können: es ist möglich, dass aus unserer „Hauptbedingung" sachlich speciellere Bedingungen sich herleiten lassen, bei denen jene Unabhängigkeit von $\alpha(\omega)$ und ε nicht länger stattfindet (beispielsweise kann bei solchen Specialisirungen das Unendlichkleinwerden einer in Betracht gezogenen Grösse auch das Unendlichkleinwerden von ε erfordern).

Bei der Herleitung des Satzes 3 haben wir von der Relation $\sin(x+\pi) = -\sin x$ Gebrauch gemacht, aber von keiner anderen trigonometrischen Identität. Hiervon hängt vor Allem die Bedeutung des Satzes ab: wenn es überhaupt Functionen giebt, welche der Dirichlet'schen Integralgleichung genügen, ohne die Bedingung des Satzes 3 zu erfüllen, so müssen sie ohne Zweifel in mehr oder weniger complicirten Beziehungen zur Function $\sin x$ stehen und von sehr

*) Man bemerke, dass es bei dieser Bedingungsform sich nicht um eine von ω abhängige Function α handelt: die Zahl m soll bei der Variation von σ constant sein.

specieller Natur sein (man versuche es, die Identität $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$, welche doch verhältnissmässig einfach ist, in ähnlicher Weise wie oben die Relation $\sin(x+\pi)=-\sin x$ zu benutzen).

§ 3.

Erste Reihe von specielleren Bedingungen.

1. Indem wir uns die Aufgabe stellen, aus der gegebenen „Hauptbedingung" (welche ja an sich nicht besonders einfach oder durchsichtig ist) neue, speciellere herzuleiten, können wir zunächst folgenden Satz aussprechen:

Satz 4. *Es ist immer* $\lim J=0$, *wenn man nach der Wahl einer beliebig kleinen positiven Grösse* ϱ, *eine Function* $\alpha(\omega)$ *mit den obengenannten Eigenschaften so bestimmen kann, dass für irgend einen* ε*-Werth und als Folge davon für alle* ε, *der numerische Werth der Summe*

$$\sum_{i=k}^{m-1}\left\{\frac{f\left(\frac{x}{\omega}+\frac{2i}{\omega}\right)}{x+2i}-\frac{f\left(\frac{x}{\omega}+\frac{2i+1}{\omega}\right)}{x+2i+1}\right\} \tag{9}$$

für $0<x<1$ *sich bei wachsendem* ω *gleichmässig einer* (endlich bleibenden) *Function* $\Theta(x)$ *nähert, welche die Eigenschaft hat, dass wenn* σ *beliebig klein ist, diejenigen Stellen* x (im Intervalle $0\ldots1$), *für welche* $\Theta(x)>\varrho+\sigma$ *ist, eine Menge vom Inhalt Null bilden**). Die Zahlen k und m haben dieselbe Bedeutung, wie oben.

Der Beweis ist leicht. Wenn δ eine beliebig kleine positive Grösse bedeutet, so ist — bei gegebenem ε — zufolge der angenommenen *gleichmässigen* Annäherung, für hinreichend grosse ω der numerische Werth des Summenausdruckes, *unabhängig von* x, kleiner als $\Theta(x)+\delta$ und somit das Integral in (8) kleiner als

$$\int_0^1\Theta(x)\,dx+\delta.$$

Ferner ist bei einer beliebigen Zerlegung der Strecke $0\ldots1$ in Theilstrecken

$$\int_0^1\Theta(x)\,dx<\int_0^1(\varrho+\sigma)\,dx+\sum_S\int\Theta(x)\,dx,$$

wo die Summation sich zu allen Theilintervallen erstreckt, innerhalb deren $\Theta(x)>\varrho+\sigma$ wird. Zufolge der Annahmen über $\Theta(x)$ kann

*) S. Note I.

man aber die Zerlegung so einrichten, dass die Gesammtlänge dieser Theilintervalle beliebig klein wird. Da $\Theta(x)$ endlich bleibt, kann man also auch erreichen, dass die Integralsumme $\sum_s$ kleiner als eine beliebig kleine Grösse η wird. Es ist also für hinreichend grosse ω das Integral in (8) kleiner als

$$\varrho + \sigma + \eta + \delta,$$

wo diese vier Grössen sämmtlich beliebig klein sind. Der Grenzwerth des Integrals für $\omega + \infty$ ist also gleich Null. Dass endlich, wie im Satze behauptet wurde, das angenommene Verhalten der Summe (9) für alle ε gilt, sobald es für ein specielles stattfindet, ergiebt sich mit Leichtigkeit wie beim Satze 3 (man zerlegt die Summe in drei Partialsummen, und räsonnirt wie beim Beweise jenes Satzes, nur mit dem Unterschiede, dass man keine Integrationen vornimmt, sondern bei den Summenausdrücken als solchen stehen bleibt).

Dagegen lässt es sich kaum zeigen, dass auch hier die Wahl von $\alpha(\omega)$ in derselben Ausdehnung wie beim Satze 3 ohne Bedeutung ist. Den wirklichen Einfluss von α näher zu untersuchen, würde uns gegenwärtig zu weit führen. Es sei nur bemerkt, dass wenn die Bedingung des Satzes für irgend eine Function $\alpha = \alpha_1$ erfüllt ist, dasselbe — wie aus der obigen Darstellung leicht hervorgeht — für jede andere Function α gilt, welche unabhängig von ω grösser als α_1 ist.

2. Aus dem soeben bewiesenen Satze gehen unmittelbar die zwei folgenden als Specialfälle hervor.

Satz 5. *Für das Verschwinden von* $\lim J$ *ist ausreichend, wenn man nach der Wahl einer beliebig kleinen positiven Grösse* ϱ, *eine Function* $\alpha(\omega)$ *der oben genannten Art so bestimmen kann, dass bei einem gewissen* ε *und als Folge davon bei allen, der numerische Werth der Summe* (9) *für* $0 < x < 1$ *sich bei wachsendem* ω *gleichmässig einer Function* $\Theta(x)$ *nähert, welche in der Strecke* $0 \ldots 1$ *unabhängig von* x *kleiner als* ϱ *ist.*

Satz 6. *Es ist immer* $\lim J = 0$, *wenn es für irgend eine Function* $\alpha(\omega)$ *der obengenannten Art gilt, dass die Summe* (9) *sich für* $\omega = \infty$ *gleichmässig der Null nähert.*

Die Unabhängigkeit von ε bleibt in der That in beiden Fällen bestehen; denn der Hauptgrund für diese Unabhängigkeit in Betreff der Bedingungen der Sätze 3 und 4, war (dies geht unmittelbar aus der obigen Darstellung hervor) der Umstand, dass die im Corollarium des Satzes 2 vorkommende Summe bei constanten Werthen von a und b sich gleichmässig der Null nähert.

3. Selbstverständlich lassen sich die Sätze 4, 5, 6, dadurch specialisiren, dass man für die Art der Function $\alpha(\omega)$ nähere Bestimmungen

festsetzt; und man könnte auf diese Weise eine unbegrenzte Menge von Bedingungssätzen erhalten.

Hier sei nur der Fall besonders erwähnt, dass man $\omega . \alpha$ bei der Variation von ω constant sein lässt. Wenn man überdies annimmt, dass diese Constante eine ungerade ganze Zahl $2m-1$ sein soll, so geht aus unserem Satze 5 unmittelbar diejenige Bedingung hervor, welche als Hauptresultat der mehrerwähnten Kronecker'schen Arbeit zu betrachten ist. Dieselbe lässt sich mit Kronecker's Bezeichnungen so formuliren, dass für

$$2m < h \leqq 2\left[\frac{x_0}{2\sigma}\right], \quad 0 \leqq x \leqq 1$$

$$\lim_{x_0=1} \lim_{m=\infty} \lim_{\sigma=0} \sum_h (-1)^h \frac{f(\sigma h + \sigma h)}{x+h} = 0$$

sein soll*). Und Kronecker drückt die Sache auch ausführlicher so aus (l. c. p. 660): Für eine gegebene positive, beliebig kleine Grösse τ soll zuerst eine Zahl m_1, und eine Grösse x_0', und alsdann für jede Zahl m, die grösser als m_1 ist, und für jede Grösse x_0, die kleiner als x_0' ist, eine Grösse σ_0 so bestimmt werden können, dass der absolute Werth der Reihe

$$\sum_h (-1)^h \frac{f(\sigma x + \sigma h)}{x+h},$$

für $0 \leqq x \leqq 1$ und mit den obigen Grenzbestimmungen für h, kleiner als τ bleibt, sobald $\sigma < \sigma_0$ ist. Nach dem Vorigen kann hierzu bemerkt werden, dass die Voraussetzung des Satzes immer für alle $x_0\,(<1)$ erfüllt ist, wenn dies für irgend einen einzelnen x_0-Werth stattfindet, weshalb der Grenzübergang mit x_0 den Umfang der fraglichen Bedingung nicht erweitert: es tritt keine sachliche Veränderung ein, wenn man den obigen Limes-Ausdruck durch den einfacheren

$$\lim_{m=\infty} \lim_{\sigma=0} \sum_h (-1)^h \frac{f(\sigma x + \sigma h)}{x+h}$$

ersetzt. (Dies hat Kronecker wenigstens nicht deutlich ausgesagt.)

4. Wir gehen jetzt dazu über einen ganz besonders einfachen und interessanten Specialfall des Satzes 6 zu erwähnen. Die Summe (9) lässt sich in die zwei Glieder

$$\sum_{i=k}^{m-1} \frac{1}{\omega} \frac{f\left(\frac{x}{\omega}+\frac{2i}{\omega}\right)}{\frac{x}{\omega}+\frac{2i}{\omega}} - \sum_{i=k}^{m-1} \frac{1}{\omega} \frac{f\left(\frac{x}{\omega}+\frac{2i+1}{\omega}\right)}{\frac{x}{\omega}+\frac{2i+1}{\omega}}$$

*) Es würde mit dem Vorigen mehr übereinstimmen,

$$2m \leqq h < 2\left[\frac{x_0}{2\sigma}\right]$$

zu schreiben; aber es ist (s. oben) gleichgültig, ob man diese oder die Kronecker'sche Bestimmung der h-Grenzen benutzt.

zerlegen. Wenn nun die Function $\frac{f(x)}{x}$ zwischen 0 und 1 integrirbar ist, so haben beide Glieder für $\omega = \infty$ denselben bestimmten und endlichen Grenzwerth

$$\int_0^a \frac{f(x)}{x}\, dx,$$

und folglich die Differenz den Grenzwerth Null. Dass ferner die Annäherung an Null gleichmässig ist, lässt sich genau wie beim Beweise des Satzes 2 zeigen — es wurde ja dabei eben der Umstand benutzt, dass $\frac{f(x)}{x}$ für $0 < b < a < 1$ immer zwischen b und a integrirbar ist. Wir können somit den Satz aussprechen:

Satz 7. *Es ist immer* $\lim J = 0$, *wenn das Integral*

$$\int_0^a \frac{f(x)}{x}\, dx$$

für irgend ein ε [und nach den Voraussetzungen über $f(x)$ folglich für alle $\varepsilon < 1$] *bestimmt und endlich ist.* — Vergl. Kronecker, l. c. p. 651, wo dieser Satz in der That (gleichsam im Vorbeigehen) ausgesprochen wird, ohne doch in völlig strenger Weise nachgewiesen zu sein.

Es kann hierbei auch bemerkt werden, dass es viel einfacher ist, das Verschwinden von $\lim J(x)$ zu beweisen, wenn es angenommen wird, dass nicht nur $\frac{f(x)}{x}$, sondern sogar $\left|\frac{f(x)}{x}\right|$ durchaus integrabel ist ($\frac{f(x)}{x}$ „absolut integrabel"). Man braucht dann nur die offenbar immer geltende Ungleichheit

$$\left|\int_0^a \frac{f(x)}{x} \sin \omega\pi x\, dx\right| < \int_0^a \left|\frac{f(x)}{x}\right| dx \qquad \text{(unabh. von } \omega\text{)}$$

zu beachten. Aus derselben folgt nämlich, dass $\lim_{\omega=\infty} |J|$ mit ε unendlich klein wird, falls $f(x) : x$ absolut integrabel ist. Vergl. Kronecker, l. c. p. 648; Dini, l. c. p. 46.

5. Einer Bemerkung von Kronecker (l. c. p. 651) nachgehend, können wir endlich folgendes als eine Consequenz des Satzes 6 bezeichnen.

Satz 8. *Es ist* $\lim J = 0$, *wenn* ε *und* $\alpha(\omega)$ *sich so bestimmen lassen, dass für irgend eine endliche positive Grösse* G

$$\left|\sum_{i=2k}^{p} (-1)^i \cdot f\left(\frac{x}{\omega} + \frac{i}{\omega}\right)\right| < G \tag{10}$$

bleibt (für alle ω), *sobald* (wenn k und m wie oben bestimmt sind)

$$2k \leqq p \leqq 2m-1,$$

ist (und überdies $\alpha(\omega)$ die immer vorausgesetzten Eigenschaften hat).

Der Beweis geht unmittelbar aus einem bekannten Satze von Abel (Crelle J. I, p. 314) hervor. Nach demselben folgt nämlich aus (10)

$$\left| \sum_{i=2k}^{2m-1} \frac{(-1)^i \cdot f\left(\frac{x}{\omega}+\frac{i}{\omega}\right)}{x+i} \right| < \frac{G}{x+2k},$$

und da das rechte Glied für $\omega = \infty$ sich gleichmässig der Null nähert, falls $\lim \omega . \alpha = \infty$ und also $\lim k = \infty$ ist, so sind wenigstens in diesem Falle die Bedingungen des Satzes 6 erfüllt. Dasselbe ist aber auch für $\lim \omega\alpha < \infty$ der Fall: aus der Art der Bedingung (10) folgt nämlich unmittelbar, dass wenn sie für irgend eine Function α erfüllt ist, dasselbe für jede bei beliebigem ω-Werthe grössere α gilt (wenigstens wenn man den G-Werth verdoppelt); wenn also eine Function α mit $\lim \omega\alpha < \infty$ der Bedingung genügt, so thut es auch eine beliebige α mit $\lim \omega\alpha = \infty$, und die Sache reducirt sich also auf diesen Fall. In der Bedingung (10) braucht sogar nicht der k-Werth Null ausgeschlossen zu sein.

Die Unabhängigkeit von ε können wir hier *nicht* nachweisen — obgleich es offenbar gilt, dass wenn die Bedingung für den *grösseren* zweier ε-Werthe erfüllt ist, dasselbe auch für den *kleineren* stattfindet.

Vom Satze 8 ist *die Dirichlet'sche Bedingung* eine einfache Folgerung:

Satz 9. *Es ist immer* $\lim J = 0$, *wenn* $f(x)$ *für hinreichend kleines* δ *im Intervalle* $0 \ldots \delta$ *monoton ist* (niemals abnimmt oder niemals zunimmt).

Dann haben nämlich für $\varepsilon \leqq \delta$ die Glieder der Reihe (10), vom Factor $(-1)^i$ abgesehen, alle dasselbe Vorzeichen, und ihre numerische Werthe nehmen bei wachsendem i niemals ab, da $f(+0) = 0$ ist. Hieraus folgt, dass der absolute Werth der Summe — für alle in Frage kommenden p-Werthe und ganz unabhängig von der Function α — kleiner (oder jedenfalls nicht grösser) als derjenige des letzten Gliedes ist, und also immer $\leq |f(\varepsilon)|$, folglich kleiner als eine endliche Grösse, weshalb die Bedingung (10) erfüllt ist. [Vgl. Kronecker, l. c. p. 654.]

§ 4.

Modificirte Form der Summe (9).

1. Man kann der Mehrzahl der obigen Bedingungssätze eine modificirte Form geben, indem man die Summe (9) durch einen anderen, gewissermassen einfacheren Summenausdruck ersetzt.

Es ist in der That

$$\frac{f\left(\frac{x}{\omega}+\frac{2i}{\omega}\right)}{x+2i}-\frac{f\left(\frac{x}{\omega}+\frac{2i+1}{\omega}\right)}{x+2i+1}=\frac{f\left(\frac{x}{\omega}+\frac{2i}{\omega}\right)-f\left(\frac{x}{\omega}+\frac{2i+1}{\omega}\right)}{x+2i+1}+\frac{f\left(\frac{x}{\omega}+\frac{2i}{\omega}\right)}{(x+2i)(x+2i+1)}.$$

Hieraus folgt, dass der absolute Werth der Summe (9) gleich

$$(11)\quad \Theta_1\left|\sum_{i=k}^{m-1}\frac{f\left(\frac{x}{\omega}+\frac{2i}{\omega}\right)-f\left(\frac{x}{\omega}+\frac{2i+1}{\omega}\right)}{x+2i+1}\right|+\Theta_2\left|\sum_{k}^{m-1}\frac{f\left(\frac{x}{\omega}+\frac{2i}{\omega}\right)}{(x+2i)(x+2i+1)}\right|$$

ist, wo $\Theta_1=\pm 1$, $\Theta_2=\pm 1$. Ferner ist, unabhängig von x,

$$(12)\qquad \left|\sum_{k}^{m-1}\frac{f\left(\frac{x}{\omega}+\frac{2i}{\omega}\right)}{(x+2i)(x+2i+1)}\right|<M\cdot\sum_{i=k}^{\infty}\frac{1}{2i(2i+1)},$$

wo M die obere Grenze für $|f(x)|$ zwischen 0 und ε bedeutet. Da die Reihe $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{2i(2i+1)}$ bekanntlich convergirt, so ist hier für $\omega=\infty$ der Grenzwerth des rechten Gliedes gleich Null, wenn

$$\lim k=\infty\ (\lim \omega\alpha=\infty)$$

ist, und somit unter dieser Voraussetzung, unabhängig von ε,

$$\lim_{\omega=\infty}\int_0^1 dx\cdot\left|\sum_{k}^{m-1}\frac{f\left(\frac{x}{\omega}+\frac{2i}{\omega}\right)}{(x+2i)(x+2i+1)}\right|=0,$$

da der Summenausdruck sich gleichmässig der Null nähert. Wenn dagegen k endlich bleibt, so ist doch immer

$$\lim_{\varepsilon=0}\lim_{\omega=\infty}\int_0^1 dx\left|\sum_{k}^{m-1}\frac{f\left(\frac{x}{\omega}+\frac{2i}{\omega}\right)}{(x+2i)(x+2i+1)}\right|=0,$$

weil $\lim_{\varepsilon=0} M = 0$. Andererseits bleibt aber die Ungleichheit (12) bestehen, wenn man statt $\alpha(\omega)$ ein constantes $\varepsilon_1 < \varepsilon$ voraussetzt; dann wird aber nothwendig $\lim k = \infty$ (da $\lim \omega\varepsilon_1 = \infty$), und der Ausdruck auf der linken Seite nähert sich also gleichmässig der Null. Hieraus folgt, dass wenn man wieder ein mit ω veränderliches α voraussetzt, der Grenzwerth desselben Ausdruckes für $\omega = \infty$ unabhängig von ε ist, sowie auch der Grenzwerth des nachher betrachteten Integrals. Aus unserer letzten Gleichung folgt also die vorangehende, und diese findet somit *immer* statt, weshalb in Betracht des Ausdruckes (11) auch, ohne irgend eine Beschränkung, der Grenzwerth (8) gleich

$$(13) \qquad \lim_{\omega=\infty} \int_0^1 dx \,.\, \left| \sum_{i=k}^{m-1} \frac{f\left(\frac{x}{\omega}+\frac{2i}{\omega}\right) - f\left(\frac{x}{\omega}+\frac{2i+1}{\omega}\right)}{x+2i+1} \right|$$

ist. Folglich gilt:

Satz 3a. *Der Satz* 3 *wird in keiner Hinsicht sachlich verändert, wenn man darin den Grenzwerth* (8) *durch den Grenzwerth* (13) *ersetzt.* [Auch die Unabhängigkeit von α und ε bleibt bestehen.]

2. Man kann aber noch einen Schritt weiter gehen. Wenn ϱ eine *beliebige positive* Grösse bedeutet, welche wir überdies *constant* (unabhängig sowohl von x als auch von ω) annehmen, so ist, wie man leicht findet (vgl. oben), das Integral in (13) gleich

$$\Theta_1 \int_0^1 dx \,.\, \left| \sum_{k}^{m-1} \frac{f\left(\frac{x}{\omega}+\frac{2i}{\omega}\right) - f\left(\frac{x}{\omega}+\frac{2i+1}{\omega}\right)}{\varrho+2i} \right|$$

$$+ \Theta_2 \int_0^1 dx \,.\, |\varrho - x - 1| \,.\, \left| \sum_{k}^{m-1} \frac{f\left(\frac{x}{\omega}+\frac{2i}{\omega}\right) - f\left(\frac{x}{\omega}+\frac{2i+1}{\omega}\right)}{(\varrho+2i)\,(x+2i+1)} \right|$$

$$(\Theta_1 = \pm 1,\ \Theta_2 = \pm 1).$$

Der zweite Integrand ist hier (numerisch) kleiner als

$$(\varrho+2) \,.\, M_1 \,.\, \sum_{k}^{\infty} \frac{1}{2i(2i+1)},$$

wo M_1 den grössten vorkommenden numerischen Werth des Zählers in den Gliedern des Summenausdruckes bedeutet (also M_1 eine endlich bleibende und mit ε verschwindende Grösse). Ganz wie im analogen

Falle bei der Deduction des vorigen Satzes, sieht man mit Hülfe hiervon ein, dass der Summenausdruck unter dem Integralzeichen sich bei unbegrenzt wachsendem ω gleichmässig der Null nähert, und dass also das Integral im Limes verschwindet. Hieraus ergiebt sich ferner unmittelbar, dass der Grenzwerth (13) und folglich auch (8) gleich

$$(14) \qquad \lim_{\omega=\infty} \int_0^1 dx \,.\, \left| \sum_k^{m-1} \frac{f\left(\frac{x}{\omega}+\frac{2i}{\omega}\right) - f\left(\frac{x}{\omega}+\frac{2i+1}{\omega}\right)}{\varrho+2i} \right|$$

ist. Also:

Satz 3b. *Der Satz* 3 *wird in keiner Hinsicht sachlich verändert, wenn man darin den Grenzwerth* (8) *durch den Grenzwerth* (14) *ersetzt* (wobei ϱ eine ganz beliebige positive Constante bedeutet).

Die Sätze 3a und 3b lassen sich in ganz derselben Weise specialisiren, wie der Satz 3 durch die oben hergeleiteten 4, 5, 6. Es dürfte überflüssig sein, die so entstehenden Sätze hier ausführlich auszusprechen, da der Wortlaut derselben selbstverständlich ist (dass auch in Betreff der Abhängigkeit oder Unabhängigkeit der verschiedenen Bedingungen von $\alpha(\omega)$ und ε ganz dasselbe gilt, wie bei den Sätzen 4, 5, 6, geht unmittelbar aus der obigen Darstellung hervor). Wir bezeichnen diese Sätze im Folgenden mit

4a, 5a, 6a,
4b, 5b, 6b.

§ 5.

Zweite Reihe speciellerer Bedingungen.

1. Wir gehen jetzt zur Aufstellung einiger neuen Sätze über, welche hervorgehen, wenn man die obigen in einer gewissen Richtung specialisirt.

Die in (8), (13), (14) vorkommenden Summenausdrücke sind numerisch kleiner (oder jedenfalls nicht grösser) als die Summen der numerischen Werthe ihrer Glieder $U_i(x, \omega)$, und somit die Integrale in (8), (13), (14) kleiner (bez. nicht grösser) als die Summe der Integrale über die numerischen Werthe der Glieder $U_i(x, \omega)$, folglich auch

$$\lim_{\omega=\infty} \int_0^1 dx \left| \sum U_i(x, \omega) \right| \leqq \lim_{\omega=\infty} \sum \int_0^1 dx \,.\, |U_i(x, \omega)|.$$

Wenn man also in irgend einer Weise Grössen bestimmt, die grösser (oder wenigstens nicht kleiner) sind als die Integrale auf der rechten Seite in dieser Ungleichheit, so ist das Verschwinden der Summe

dieser Grössen für $\omega = \infty$ eine hinreichende Bedingung für das Verschwinden von $\lim J$.

Selbstverständlich erhält man also Specialfälle der Sätze 3, 4, 5, 6, 3a, 4a, 5a, 6a, 3b, 4b, 5b, 6b, wenn man ganz einfach die zugehörigen Summenausdrücke durch die Summen der numerischen Werthe der Glieder ersetzt. Und zwar gilt es hierbei, dass die in den verschiedenen Sätzen eingeführten neuen Limesausdrücke in derselben Ausdehnung, wie die ursprünglichen, von ε und α unabhängig sind: die immer stattfindende Unabhängigkeit von ε wurde nämlich eben dadurch bewiesen, dass wir zu Reihen übergingen, deren Glieder $\geqq$ die numerischen Werthe der ursprünglichen Glieder waren (man sehe den Beweis des Satzes 2 mit Corollarium); und dasselbe war in der That auch der Fall bei dem Beweise, dass im Satze 3 (und folglich auch in 3a und 3b) der in Frage kommende Grenzwerth — mit der genannten Reservation — unabhängig von $\alpha(\omega)$ ist.

Aber es ist bemerkenswerth, dass die Benutzung der Form (14) des Limesausdruckes es gestattet, einige noch speciellere Sätze von besonderer Einfachheit aufzustellen.

2. In dem Falle, dass die Glieder des Summenausdruckes in (14) *durchgehends dasselbe Vorzeichen* haben, z. B. immer negativ sind, d. h. wenn $f(x)$ immer mit x wächst, so wissen wir nach den Beweisen der Sätze 8 und 9, dass der Grenzwerth (8) und also (nach dem vorigen Paragraphen) auch der Grenzwerth (14) verschwindet. Wenn man also, bei irgend einer gegebenen Function $f(x)$, eine integrable und zunehmende Function $F(x)$ mit $F(+0) = 0$ bestimmen kann, welche überdies der Bedingung

$$F(x+h) - F(x) \geqq |f(x+h) - f(x)| \qquad (h > 0)$$

genügt, so ist mit Sicherheit die Bedingung des Satzes 3b erfüllt, und also $\lim J = 0$. Eine solche Function $F(x)$ existirt immer, wenn die *Derivirte* $f'(x)$ [für irgend einen ε-Werth] im Intervalle $0 \ldots \varepsilon$ *absolut integrirbar* ist — sei es, dass $f'(x)$ ein- oder mehrdeutig ist (vgl. Note 1). Man setze nämlich dann

$$F(x) = \int_0^x |f'(x)|\, dx.$$

Wie in der soeben erwähnten Note bemerkt wird, lässt sich in diesem Integrale $|f'(x)|$ durch $\overline{f'}(x)$ ersetzen, wo $\overline{f'}(x)$ die obere Grenze für die Werthmenge $|f'(x)|$ — bei festem x — bedeutet. Es ist also

$$F(x) = \int_0^x \overline{f'}(x)\, dx,$$

und somit

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} \bar{f}'(x)dx.$$

Da andererseits (s. Note 1)

$$f(x+h) - f(x) = \int_x^{x+h} f'(x)dx$$

ist, und immer $|f'(x)| \leqq \bar{f}'(x)$, so folgt

$$F(x+h) - F(x) \geqq |f(x+h) - f(x)|.$$

Da überdies $F(x)$ stetig ist, und $F(+0) = 0$, können wir also den Satz aufstellen:

Satz 10. *Es ist immer* $\lim J = 0$, *wenn für hinreichend kleines* ε *die* (ein- oder mehrdeutige) *Function* $f'(x)$ *im Intervalle* $0 \ldots \varepsilon$ *absolut integrirbar ist* (doch immer mit Reservation für den Fall, dass $f'(x)$ eine nicht-reductible Menge von Unendlichkeitsstellen hat).

3. Wir bemerken ferner, dass immer

$$\left|f\left(\frac{x}{\omega} + \frac{2i}{\omega}\right) - f\left(\frac{x}{\omega} + \frac{2i+1}{\omega}\right)\right| < D(\omega, i)$$

ist, wo $D(\omega, i)$ die „Schwankung" [s. Note 1] der Function $f(x)$ im Intervalle

$$\frac{2i}{\omega} \cdots \frac{2i+2}{\omega}$$

bedeutet. Es gilt also, dass man in den Sätzen 4b, 5b, 6b den absoluten Werth des Summenausdruckes durch die Summe

$$\sum_{i=k}^{m-1} \frac{D(\omega, i)}{\varrho + 2i} \tag{15}$$

ersetzen kann. Wenn wir der beliebigen positiven Grösse ϱ den Werth 2 ertheilen, so ist unmittelbar ersichtlich, dass die (positive) Summe (15) kleiner ist als das Integral

$$\int_{\alpha(\omega)}^{\varepsilon} \frac{\varphi(\omega, z)}{z}\, dz, \tag{16}$$

wo $\varphi(\omega, z)$ diejenige Function bedeutet, welche in jedem Intervalle $\frac{2i}{\omega} \cdots \frac{2i+2}{\omega}$ constant und gleich $D(\omega, i)$ ist. Das Integral (16) ist gleich

$$M(\omega)\{\log \varepsilon - \log \alpha(\omega)\},$$

wo $M(\omega)$ einen gewissen *Mittelwerth* für $D(\omega, i)$ bedeutet. Für das Verschwinden von $\lim J$ ist also nach dem Satze 6b hinreichend, wenn bei irgend einer Function $\alpha(\omega)$ der mehrerwähnten Art

$$\lim_{\omega=\infty} M(\omega)\{\log \varepsilon - \log \alpha(\omega)\} \tag{17}$$

für irgend einen ε-Werth verschwindet oder wenigstens mit ε unendlich klein wird.

Hier ist zu bemerken, dass zufolge der Annahmen über die Function $f(x)$, immer $\lim_{\omega=\infty} M(\omega) = 0$ ist. Bei stetigen Functionen $f(x)$ ist dies selbstverständlich. Aber es gilt auch wenn beliebig nahe an $x = 0$ Unstetigkeiten vorkommen. Wenn nämlich σ und Θ zwei beliebig kleine positive Grössen bedeuten, so kann man — da unendlich nahe an $x = 0$ nur unendlich kleine „Sprünge“ (s. Note 1) vorkommen können, weil $f(+0)$ endlich und bestimmt ist — einen ω-Werth ω_1 so gross wählen, dass diejenigen Strecken

$$\frac{h}{\omega_1} \cdots \frac{h+1}{\omega_1}$$

(zwischen 0 und ε), welche Stellen mit Sprüngen $> \sigma$ enthalten, sämmtlich zwischen $x = \alpha(\omega)$ und $x = \varepsilon$ fallen, und in den übrigen die Schwankung von $f(x)$ immer $< \sigma + \Theta$ ist. Derjenige Theil des Integrals (16) mit $\omega = \omega_1$, welcher sich auf diese letzterwähnten Strecken bezieht, ist kleiner als

$$\int_{\alpha(\omega_1)}^{\varepsilon} \frac{\sigma+\Theta}{z}\, dz,$$

und für ein beliebiges $\omega > \omega_1$ gilt dann offenbar auch das analoge. Andererseits liegen diejenigen Intervalle $\frac{h}{\omega} \cdots \frac{h+1}{\omega}$, welche Sprünge $> \sigma$ enthalten, selbstverständlich für alle $\omega > \omega_1$ zwischen $\alpha(\omega_1)$ und ε. Wenn $\eta(\omega)$ die Gesammtlänge dieser Intervalle bedeutet, und $S(\omega)$ die grösste zu einem solchen Intervalle gehörende Schwankung von $f(x)$, so ist derjenige Theil des Integrals (16), welche sich auf diese Intervalle bezieht, kleiner als

$$\frac{\eta(\omega) \cdot S(\omega)}{\alpha(\omega_1)}.$$

Aber dieser Ausdruck verschwindet für $\omega = \infty$: denn zufolge der angenommenen Integrabilität von $f(x)$ ist $\lim_{\omega=\infty} \eta(\omega) = 0$, und $S(\omega)$ bleibt endlich, $\alpha(\omega_1)$ ist constant. Man hat somit

$$\int_{\alpha(\omega)}^{\varepsilon} \frac{\varphi(\omega, x)}{x}\, dx < (\sigma + \Theta + \delta) \int_{\alpha(\omega)}^{\varepsilon} \frac{dz}{z},$$

wo δ [und sogar $\delta \int_{\alpha}^{\varepsilon} \frac{dx}{x}$] für $\omega = \infty$ verschwindet, und also ist

$$M(\omega) < \sigma + \Theta + \delta.$$

Da σ und Θ beliebig klein waren, ist hieraus zu schliessen, dass

$$\lim_{\omega=\infty} M = 0$$

ist (unabhängig von ε). Der Ausdruck (17) reducirt sich also (da ε constant ist), vom Zeichen abgesehen, auf

$$\lim_{\omega=\infty} M(\omega) \,.\, \log \alpha(\omega). \tag{18}$$

Selbstverständlich bleibt ferner die bei (17) ausgesprochene Bedingung *a fortiori* hinreichend, wenn man darin die Grösse $M(\omega)$ durch irgend eine andere $N(\omega)$ ersetzt, von welcher nachgewiesen ist, dass $N(\omega) \geqq M(\omega)$ ist, aber $\lim N(\omega) = 0$.

Wir können also folgendes aussagen:

Satz 11. *Es ist immer* $\lim J = 0$, *wenn es für irgend eine Function* $\alpha(\omega)$ *der oben angegebenen Art gilt, dass*

$$\lim_{\omega=\infty} N(\omega) \,.\, \log \alpha(\omega) \tag{19}$$

wenigstens für hinreichend kleines ε *numerisch unterhalb einer beliebig gegebenen Grenze liegt, wo* $N(\omega)$ *irgend eine positive Function von* ω *bedeutet, von welcher bewiesen ist, dass — wenn* $\varphi(\omega, x)$ *die oben definirte Function bedeutet, welcher wir kurz den Namen Schwankungsfunction geben können —*

$$\int_{\alpha(\omega)}^{\varepsilon} \frac{\varphi(\omega, x)}{x}\, dx \leqq N(\omega) \int_{\alpha(\omega)}^{\varepsilon} \frac{dx}{x} \tag{20}$$

ist, und überdies $\lim_{\omega=\infty} N(\omega) = 0$, *was in der That immer stattfindet, wenn in* (20) *das Zeichen* $=$ *gilt.*

Hieraus folgt ferner unmittelbar:

Satz 11a. *Es ist* $\lim J = 0$, *wenn für irgend einen positiven* δ*-Werth der Grenzwerth*

$$\lim_{\omega=\infty} \frac{N(\omega)}{[\alpha(\omega)]^{\delta}} \tag{21}$$

sich so verhält, wie im Satze 11 *über* $N(\omega) \,.\, \log \alpha(\omega)$ *gesagt wurde.*

Da nämlich $\lim (\log \alpha \,.\, \alpha^{\delta}) = 0$ ist, so wird für hinreichend grosse ω das Product in (19) numerisch kleiner als der Quotient in (21).

4. Selbstverständlich erhält man Specialfälle dieser Sätze, wenn man $N(\omega)$ gleich der *grössten* $\Delta(\omega)$ *der fraglichen Schwankungen setzt.* Hierbei ist jedoch zu bemerken, dass diese Bestimmung von $N(\omega)$ nur dann in Frage kommen kann, wenn $f(x)$ im Intervalle $0 \ldots \varepsilon$

stetig ist. Sonst wird nämlich offenbar niemals $\lim \Delta(\omega) = 0$. Freilich wird immer $\lim \Delta(\omega)$ mit ε unendlich klein, aber hieraus folgt offenbar nicht, dass

$$\lim_{\varepsilon=0} \lim_{\omega=\infty} \Delta(\omega) \,.\, \log \varepsilon = 0$$

ist, und die obige Deduction verliert aus diesem Grunde ihre Gültigkeit. Wenn dagegen $f(x)$ bis $x = \varepsilon$ stetig ist, so wird immer $\lim \Delta(\omega) = 0$, und man hat folgende Sätze:

Satz 12. *Wenn $f(x)$ stetig ist, so wird immer* $\lim J = 0$, *wenn für irgend eine Function $\alpha(\omega)$ mit den mehrerwähnten Eigenschaften*

$$\lim \Delta(\omega) \,.\, \log \alpha(\omega)$$

wenigstens bei hinreichend kleinem ε-Werthe numerisch unterhalb einer beliebig kleinen Grenze liegt; $\Delta(\omega)$ bedeutet hier die grösste Schwankung von $f(x)$, welche zu einem Intervalle $\frac{2i}{\omega} \ldots \frac{2i+2}{\omega}$ (oder zu einem Theile eines solchen) *zwischen $x = \alpha(\omega)$ und $x = \varepsilon$ gehört.*

Satz 12a. *Wenn $f(x)$ stetig ist, so wird* $\lim J = 0$, *wenn für irgend einen positiven δ-Werth die Grösse*

$$\lim \frac{\Delta(\omega)}{[\alpha(\omega)[^{\delta}}$$

sich so verhält, wie oben $\lim \Delta(\omega) \,.\, \log \alpha(\omega)$.

Diese beiden Sätze lassen sich endlich auf folgende Weise specialisiren:

Satz 13. *Wenn $f(x)$ stetig ist, so wird* $\lim J = 0$, *wenn es wenigstens bei hinreichend kleinem ε gilt, dass für alle Strecken von hinreichend kleiner Ausdehnung β, welche zwischen $x = \beta$ und $x = \varepsilon$ fallen, das Product*

$$D_\beta \log \beta$$

numerisch unterhalb einer beliebigen gegebenen Grenze liegt, wo D_β die zu den resp. Strecken gehörende Schwankung von $f(x)$ bedeutet.

Satz 13a. *Wenn $f(x)$ stetig ist, so wird* $\lim J = 0$, *wenn für irgend einen positiven δ-Werth der Quotient*

$$\frac{D_\beta}{\beta^{\delta}}$$

sich so verhält, wie oben das Product $D_\beta \,.\, \log \beta$.

Die Richtigkeit dieser Sätze geht unmittelbar hervor, wenn man in 12 bez. 12a $\alpha(\omega) = \frac{2}{\omega}$ setzt. Es sei bemerkt, dass man offenbar die Worte „zwischen β und ε“ auch durch „zwischen 0 und ε“ ersetzen kann.

Die Bedingung 13a ist (mit geringer Modification) dieselbe, welche Lipschitz im 63. Bande des Crelle'schen Journals hergeleitet hat.

Die Bedingung 13 findet man im Wesentlichen bei Dini l. c. p. 49 wieder.

Der Satz 13a giebt unmittelbar:

Satz 13b. *Es ist* $\lim J = 0$, *wenn* $f(x)$ *zwischen endlichen Grenzen bleibt.*

5. Es verdient im Anschluss zum Vorigen noch folgendes bemerkt zu werden. Es bedeute $R(\omega, z)$ irgend eine stetige Function, deren Derivirte auch eindeutig und stetig ist, und welche für $0 \leq z \leq 1$ die Eigenschaft $R(\omega, z) \geqq \varphi(\omega, z)$ hat. Zufolge diesen Annahmen ist es erlaubt [s. Note III], diejenige partielle Integration vorzunehmen, welche zur folgenden Gleichung führt:

$$\int_{\alpha(\omega)}^{\varepsilon} \frac{R(\omega, z)}{z}\, dz = R(\omega, \varepsilon).\log\varepsilon - R(\omega, \alpha).\log\alpha - \int_{\alpha(\omega)}^{\varepsilon} R_z'(\omega, z)\log z\, dz.$$

Da andererseits

$$\int_{\alpha(\omega)}^{\varepsilon} \frac{\varphi(\omega, z)}{z}\, dz \leqq \int_{\alpha(\omega)}^{\varepsilon} \frac{R(\omega, z)}{z}\, dz$$

ist, so lässt sich folgendes aussprechen:

Satz 14. *Es bedeute* $\varphi(\omega, z)$ *die zu einem gewissen* ω *gehörende „Schwankungsfunction" [s. oben], und es sei für* $0 \leqq z \leqq 1$ $\varphi(\omega, z) \leqq R(\omega, z)$, *wo* $R(\omega, z)$ *eine nebst ihrer Derivirten* $R_z'(\omega, z)$ *eindeutige und stetige* (aber mit ω veränderliche) *Function von* z *bedeutet; dann ist immer* $\lim J = 0$, *wenn es für irgend einen* ε*-Werth und irgend eine Function* $\alpha(\omega)$ *der mehrerwähnten Art gilt, dass die zwei Limesgrössen*

$$\lim_{\omega=\infty} R[\omega, \alpha(\omega)]\log\alpha(\omega),\quad \lim_{\omega=\infty} \int_{\alpha(\omega)}^{\varepsilon} R_z'(\omega, z)\log z\, .\, dz$$

numerisch je unterhalb einer beliebig gegebenen positiven Grenze liegen, während

$$\lim_{\omega=\infty} R(\omega, z) = 0$$

ist. — Hierbei ist zu bemerken: die letzte Bedingung kann offenbar nicht erfüllt sein, ohne dass $x = \varepsilon$ Stetigkeitsstelle für $f(x)$ ist.

6. Hier sei folgende Anmerkung eingefügt. Die soeben hergeleiteten Bedingungssätze 11, 11a, 12, 12a, 14 lassen sich ein wenig modificiren, indem man unter $D(\omega, i)$ nicht die Schwankung von $f(x)$ im Intervalle $\frac{2i}{\omega} \ldots \frac{2i+2}{\omega}$ versteht, sondern die grösste vorkommende Schwankung in einer zwischen $\frac{2i}{\omega}$ und $\frac{2i+2}{\omega}$ fallende Strecke von der Länge $\frac{1}{\omega}$, und in entsprechender Weise die Bedeutung von $\varphi(\omega, z)$ und $\Delta(\omega)$ verändert. Es ist doch leicht ersichtlich, dass diese Veränderungen keine wesentlichere Bedeutung haben.

7. Eine Reihe verwandter Sätze wird erhalten, wenn man von der Summe (15) ausgehend folgendermassen verfährt.

Man ersieht sofort, dass das Verschwinden von $\lim J$ mit Sicherheit schon dann erfolgt, wenn es bei einer Function α mit $\lim \omega \,.\, \alpha = \infty$ gilt, dass für alle $i \geqq k$

$$D(\omega, i) < Ci^{-\delta},$$

also

$$iD(\omega, i) < Ci^{1-\delta} \tag{22}$$

ist, wo δ und C irgend welche positive Constanten bedeuten. Bekanntlich convergirt nämlich die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{\delta}(2i+\varrho)} \qquad (\varrho \text{ bel.}),$$

und es ist somit

$$\lim_{\omega=\infty} \sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{i^{\delta}(2i+\varrho)} = 0,$$

wenn $\lim\limits_{\omega=\infty} k = \infty$ ist. Ein Specialfall hiervon ist der Fall

$$iD(\omega, i) < Ck^{1-\delta}, \qquad 0 < \delta < 1, \tag{23}$$

woraus (22) folgt, da $1 - \delta$ positiv ist. [Offenbar ist doch (23) hinreichend auch für $\delta > 1$.] Die Bedingungsform (23) lässt sich auch so herleiten, dass man die Summe (15) [mit $\varrho = 1$] in der Form

$$\sum_{k}^{m-1} 2i\, D(\omega, i) \cdot \frac{1}{2i(2i+1)} \tag{24}$$

schreibt und observirt, dass die Ungleichheit

$$\sum_{k}^{\infty} \frac{1}{2i(2i+1)} < \frac{1}{2k} \tag{25}$$

gilt, was sich leicht nachweisen lässt. Hieraus ergiebt sich ferner leicht folgende Erweiterung der fraglichen Bedingung (23): es ist hinreichend, wenn unabhängig von i

$$iD(\omega, i) < \sigma(\omega, \varepsilon) \,.\, k$$

ist, wo

$$\lim_{\varepsilon=0} \lim_{\omega=\infty} \sigma(\omega, \varepsilon) = 0.$$

Denn nach (25) wird dann offenbar der Grenzwerth der Summe (24) gleich Null oder wenigstens mit ε unendlich klein. Man kann die letzte Bedingungsform auch so aussprechen, dass die Grösse $D(\omega, i)$ in zwei Factoren $D_1(\omega, i)$ und $D_2(\omega, i)$ mit den Eigenschaften

$$D_2(\omega, i) < C\frac{k}{i}, \quad D_1(\omega, i) < \sigma(\omega, \varepsilon), \quad \lim_{\varepsilon=0} \lim_{\omega=\infty} \sigma(\omega, \varepsilon) = 0$$

zerlegbar sein soll. Und es ist bei der Herleitung dieses Satzes die Annahme überflüssig, dass $\lim \omega \cdot \alpha = \infty$ sein soll; denn die Ungleichheit (25) gilt unabhängig von k.

Wir erinnern uns, dass $D(\omega, i)$ die Schwankung von $f(x)$ im Intervalle $\frac{2i}{\omega} \ldots \frac{2i+2}{\omega}$ bedeutet. Statt dieser Grösse ist es von Interesse, das Verhältniss $L(\omega, i)$ der Schwankung zur Länge des Intervalles einzuführen. Wir setzen also

$$D(\omega, i) = \frac{2L(\omega, i)}{\omega}.$$

Die Bedingung (22) nimmt dann die Form

$$\frac{2i}{\omega} L(\omega, i) < Ci^{1-\delta} \qquad (\delta > 0) \tag{26}$$

an; und der obigen Zerlegung von $D(\omega, i)$ entspricht eine Zerlegung von $L(\omega, i)$ in zwei Factoren $L_1(\omega, i)$, $L_2(\omega, i)$ mit den Eigenschaften

$$\frac{2i}{\omega} L_2(\omega, i) < Ck, \quad L_1(\omega, i) < \tau(\omega, \varepsilon), \quad \lim_{\varepsilon=0} \lim_{\omega=\infty} \tau(\omega, \varepsilon) = 0.$$

Die Bedingung (26) ist immer erfüllt, wenn der Ausdruck links unterhalb einer endlichen Grenze G bleibt; denn das rechte Glied bleibt für $C = G$ und $\delta < 1$ immer grösser als G. Dies lässt sich selbstverständlich folgendermassen modificiren: es ist hinreichend, wenn für hinreichend kleines ε

$$xl(\beta) < G \quad \text{(endliche Grösse)} \tag{27}$$

bleibt, wo x die untere Grenzstelle eines in die Strecke $0 \ldots \varepsilon$ fallenden Intervalles von der Länge β bedeutet, $l(\beta)$ die durch β dividirte Schwankung von $f(x)$ in demselben Intervalle. Da dies also für ein beliebiges x bei beliebig kleinem β gelten soll, so muss für alle Strecken β (von beliebiger Kleinheit), deren untere Begrenzungsstelle x fest ist und nicht in den Nullpunkt fällt, $l(\beta)$ unterhalb einer endlichen Grösse $(G : x)$ bleiben. Hieraus folgt mit Leichtigkeit, dass wenigstens die „obere" Derivirte $f'_+(x)$ [sei es, dass dieselbe eindeutig oder mehrdeutig ist] an keiner von Null verschiedenen x-Stelle unendlich sein kann. Dasselbe gilt aber auch für die „untere Derivirte" $f'_-(x)$. Man bemerke nämlich, dass wenn $\frac{2i}{\omega} L(\omega, i)$ unter einer endlichen Grenze bleibt, dasselbe auch für $\frac{2i+2}{\omega} L(\omega, i)$ gilt, weil $\frac{2}{\omega} L(\omega, i)$ d. h. $D(\omega, i)$ endlich bleibt — und dass allgemeiner $(x+\beta)\, l(\beta)$ mit $x\, l(\beta)$ endlich bleibt, weil $\beta\, l(\beta)$ [die Schwankung im Intervalle β] unterhalb einer endlichen Grenze liegen muss. An allen von Null verschiedenen x ist somit $f'(x)$ endlich (bestimmt oder un-

bestimmt) und also $f(x)$ stetig. Und man kann die fragliche Bedingung einfach dadurch ersetzen, dass

$$x\bar{f}'(x)$$

unterhalb einer endlichen Grenze bleiben soll (wo $\bar{f}'(x)$ dieselbe Bedeutung, wie oben, hat; s. den Beweis des Satzes 10). Man bezeichne nämlich mit $\lambda(\omega, i)$ bez. $\lambda(\beta)$ die obere Grenze für $\bar{f}'(x)$ [bei der Variation von x] im Intervalle $\frac{2i}{\omega} \ldots \frac{2i+2}{\omega}$ bez. im Intervalle β. Dann ist

$$L(\omega, i) \leqq \lambda(\omega, i), \quad l(\beta) \leqq \lambda(\beta),$$

und man kann somit in der Bedingung (26) bez. (27) $\lambda(\omega, i)$ bez. $\lambda(\beta)$ statt $L(\omega, i)$ bez. $l(\beta)$ einsetzen. Nach der Definition von $\lambda(\omega, i)$ bez. $\lambda(\beta)$ giebt es immer im Intervalle $\frac{2i}{\omega} \ldots \frac{2i+2}{\omega}$ bez. β Stellen x, für welche $\bar{f}'(x)$ beliebig nahe an $\lambda(\omega, i)$ bez. $\lambda(\beta)$ kommt. Andererseits kann, wie wir sahen, in (27) x ebensowohl die obere als die untere Grenzstelle des Intervalles β bedeuten, und somit offenbar eine beliebige Stelle des Intervalles. Es folgt also, dass man in der Bedingung (27) $x|f'(x)|$ statt $xl(\beta)$ schreiben kann, und dabei die Sache so verstehen, dass es erlaubt sein soll, für x jeden Werthe im Intervalle β einzusetzen. Es entsteht m. a. W. ganz einfach die Bedingung, dass $\lim_{x=0} x|f'(x)|$ endlich (bestimmt oder unbestimmt) sein soll.

Es ist hier zu bemerken, dass der specielle Fall, dass $\lim x|f'(x)| = 0$ ist oder die Null als untere Unbestimmtheitsgrenze hat (vgl. Dini's Arbeit p. 57), den Fall einschliesst, dass $f'(x)$ von 0 bis ε (falls ε hinreichend klein ist) absolut integrabel und für alle von Null verschiedenen x endlich ist (s. Note II). Dieser Fall ist aber ein Specialfall des Satzes 10. Dass es andererseits Functionen $f(x)$ giebt mit $f(+0)$ endlich (z. B. $= 0$) und z. B. $\lim x f'(x) = 1$, ist ziemlich leicht zu finden, obgleich wir gegenwärtig nicht näher hierauf eingehen können.

Uebrigens ist auch zu bemerken, dass man in betreff der Grösse $\lambda(\omega, i)$ eine ähnliche Factorenzerlegung, wie oben bei $D(\omega, i)$ und $L(\omega, i)$ vornehmen kann.

Als die hauptsächlichsten Ergebnisse dieser Betrachtungen können wir folgende Sätze bezeichnen:

Satz 15. *Es ist* $\lim J = 0$, *wenn man darlegen kann, dass für hinreichend kleine ε-Werthe, für hinreichend langsam mit $\frac{1}{\omega}$ abnehmende Functionen $\alpha(\omega)$ und für irgend welche positive Constanten δ und C die Ungleichheit*

$$iD(\omega, i) < Ci^{1-\delta}$$

in allen Intervallen $\frac{2i}{\omega} \ldots \frac{2i+2}{\omega}$ mit $\varepsilon > \frac{2i}{\omega} > \alpha(\omega)$ gilt, wo $D(\omega, i)$ die Schwankung von $f(x)$ im Intervalle $\frac{2i}{\omega} \ldots \frac{2i+2}{\omega}$ bedeutet.

Und diese Bedingung lässt sich auch so modificiren, dass man

$$i\,D(\omega, i) < Ck^{1-\delta}$$

annimmt, wo k (wie immer oben) die kleinste in Frage kommende Zahl i bedeutet. [Ebenso sind auch gewisse andere oben näher angegebene Modificationen möglich.]

Satz 16. *Es ist immer* $\lim J = 0$, *wenn für hinreichend kleines* ε *die Grösse*

$$x\bar{f}'(x)$$

im Intervalle $0 \ldots \varepsilon$ *unterhalb einer endlichen Grenze bleibt, wo* $\bar{f}'(x)$ *die obere Grenze — bei festem* x *— für die Werthmenge* $|f'(x)|$ *bedeutet* (also speciell $\bar{f}'(x) = |f'(x)|$, falls $|f'(x)|$ bestimmt ist).

In dem Falle, dass die obere Grenze für $x\bar{f}'(x)$ im Intervalle $0 \ldots \varepsilon$ mit ε verschwindet (vergl. Dini l. c. p. 57) ist $f'(x)$ sehr oft absolut integrabel (vgl. Satz 10). Aber auch andere Fälle sind denkbar.

Vergl. übrigens auch die obige Darstellung bei (26) und (27).

Offenbar setzt der gegenwärtige Satz Stetigkeit für $f(x)$ voraus.

Diesen schon oben bewiesenen Sätzen fügen wir noch den folgenden hinzu:

Satz 16a. *Wenn* $\bar{f}'(x)$ *für keine* x *zwischen* 0 *und* ε *unendlich ist* (0 excl.), *so ist* $\lim J = 0$, *wenn*

$$\bar{f}'(x) = \bar{f}_1'(x) \cdot \bar{f}_2'(x),$$
$$\lim_{x=0} \bar{f}_1'(x) = 0$$

ist, während $x\bar{f}_2'(x)$ *zwischen* 0 *und* ε *mit wachsendem* x *durchgehends abnimmt, und*

ist, sobald $\left.\begin{array}{c} x\bar{f}_2'(x) < C.k \\ x \geqq \frac{2k}{\omega} \end{array}\right\} \alpha(\omega) < \frac{2k}{\omega} \leqq \alpha(\omega) + \frac{2}{\omega},$

wo $\alpha(\omega)$ *irgend eine Function der mehrerwähnten Art bedeutet.*

Wie oben (p. 208) angedeutet wurde, sind hinreichende Bedingungen erfüllt, wenn $\lambda(\omega, i) = \lambda_1(\omega, i) \cdot \lambda_2(\omega, i)$ ist, und

$$\lambda_1(\omega, i) < \tau(\omega, \varepsilon), \quad \lim_{\varepsilon=0} \lim_{\omega=\infty} \tau(\omega, \varepsilon) = 0, \quad \frac{2i}{\omega}\lambda_2(\omega, i) < Ck.$$

Und die letzte Ungleichheit findet wiederum immer statt, wenn die Grösse $\frac{2i}{\omega}\lambda_2(\omega, i)$ mit wachsendem i durchgehends abnimmt, und überdies $\frac{2\lambda_2(\omega, i)}{\omega} < C$ ist, sobald $i \geqq k$. Aus der ersten Annahme folgt nämlich, dass für $i \geqq k$ $\frac{2i}{\omega}\lambda_2(\omega, i) \leqq \frac{2k}{\omega}\lambda_2(\omega, k)$ ist, und dies im Verein mit der zweiten Annahme (mit $i = k$) giebt unmittelbar

$$\frac{2i}{\omega}\lambda_2(\omega, i) < Ck.$$

Mit Anwendung hiervon leitet man den jetzt zu beweisenden Satz her — in analoger Weise wie die Bedingung (27) und nachher den Satz 16 aus der Bedingung (26). S. Note VII.

8. Hieran knüpft sich noch eine fernere, von Dini mitgetheilte Bedingungsform, welche, wie der Satz 16, von der Zerlegung in Intervalle von der Länge $\frac{2}{\omega}$ unabhängig ist (aber jedoch nicht besonders einfach).

Wie schon oben (§ 1) angedeutet wurde, kann man sagen, dass der Satz 1c in der Arbeit von Dini vorkommt, obgleich nur so, dass dabei die Function $\nu(x)$ eine für den Satz in seiner Allgemeinheit ganz fremde specielle Bedeutung hat. Hiermit verhält es sich in der That folgendermassen.

Aus dem Satze 16a ist unmittelbar folgendes zu erschliessen: Bei einem beliebigen ω-Werthe sei h die kleinste ganze Zahl, für welche die bei abnehmendem x unaufhörlich wachsende Function

$$x\bar{f}_2'(x) < Ch$$

ist, sobald

$$x \geqq \frac{2h}{\omega}.$$

Es sei ferner $\beta(\omega)$ eine Grösse, welche die Bedingungen

$$\frac{2h-2}{\omega} < \beta(\omega) \geqq \frac{2h}{\omega}, \quad \beta f_2'(\beta) > Ch$$

erfüllt, sonst aber auf beliebige Weise bestimmt werden kann. Wenn es nun gelingt, für die Function $\bar{f}_2'$ irgend welche Bedingungen zu finden, deren Erfüllung mit sich führt, dass die Function $\beta(\omega)$ die Eigenschaften unserer Functionen $\alpha(\omega)$ erhält, so sind jene Bedingungen, im Verein mit den Annahmen, dass $\lim_{x=0} \bar{f}_1'(x) = 0$ ist, und dass $x\bar{f}_2'(x)$ bei der Verkleinerung von x beständig zunimmt, für das Verschwinden von $\lim J$ hinreichend. Man braucht aber zu dem genannten Zwecke nur vorzuschreiben, dass die (immer positive) Function $x\bar{f}_2'(x)$ wenigstens für hinreichend kleine x-Werthe bei wachsendem x abnimmt, und dass $\bar{f}_2'(x)$ auch die übrigen im Satze 1c für die Function $\nu(x)$ vorgeschriebenen Bedingungen erfüllt. Zum Satze 1c gehört als hinreichende α-Bedingung, dass $\frac{\nu(\alpha)}{\omega}$ *oberhalb* einer von Null verschiedenen Grenze bleibt. Nun hat ja aber $\beta(\omega)$ die Eigenschaft $\beta\bar{f}_2'(\beta) > Ch$, woraus folgt

$$\frac{\bar{f}_2'(\beta)}{\omega} \geqq C\,\frac{h}{\omega\beta}.$$

Da immer $\frac{2h}{\omega} > \beta$ ist, bleibt $\frac{h}{\omega\beta}$ und somit $\frac{\bar{f}_2'(\beta)}{\omega}$ oberhalb einer von Null verschiedenen Grenze. Weil dies ohne irgend einer Ausnahme

der Fall ist, erfüllt also $\beta(\omega)$ die genannte α-Bedingung des Satzes 1 c, falls $\overline{f_2}'(x)$ die ebenda für $\nu(x)$ vorgeschriebenen Eigenschaften hat (man bemerke, dass zufolge der oben für β festgestellten Ungleichheiten und der Bedeutung der Zahl h, sei es dass

$$\lim_{x=0} x\,\overline{f_2}'(x) = \infty \quad \text{oder} \quad < \infty$$

ist, mit Sicherheit

$$\lim_{\omega=\infty} \beta(\omega) = 0$$

ist). Wir können somit den folgenden Satz aufstellen:

Satz 17. *Es ist* $\lim J = 0$, *wenn man*

$$\overline{f}'(x) = \overline{f_1}'(x) \cdot \overline{f_2}'(x)$$

setzen kann, wo

$$\lim_{x=0} \overline{f_1}'(x) = 0$$

ist, und $\overline{f_2}'(x)$ *die im Satze* 1 c *für die Function* $\nu(x)$ *festgestellten Bedingungen erfüllt* (wenigstens in einer hinreichend kleinen Strecke $0 \ldots \varepsilon$).

Dieser Satz ist (im Wesentl.) der obengenannte, von Dini hergeleitete (l. c. p. 68, 69). Besonders einfach ist derselbe nicht, da die für $\nu(x)$ geltenden Bedingungen ein wenig complicirt sind. Obgleich Dini seinen Satz in einer Form bewiesen hat, welche in gewissen Hinsichten von der obigen Herleitungsform abweicht, so geht doch aus unserer Darstellung hinreichend deutlich hervor, auf welche Weise der obige Satz 1 c in Dini's Darstellung zur Anwendung kommt.

S. übrigens die Note VI, welche eine auf diesen Paragraphen sich beziehende Bemerkung enthält.

§ 6.

Dritte Reihe von Bedingungen.

1. In diesem Paragraphen werden wir uns denken, dass $f(x)$ aus anderen Functionen *zusammengesetzt* ist, und Bedingungen für das Verschwinden von $\lim J$ in der Form von Eigenschaften dieser Functionen aussprechen, statt direct auf $f(x)$ zu beziehen. Man kann auf diese Weise zu Sätzen gelangen, welche in gewissem Sinne Verallgemeinerungen der obigen Sätze sind.

Selbstverständlich kann es sich hierbei nur darum handeln, die einfachsten — und daher auch wichtigsten — Fälle in Betracht zu ziehen.

Zunächst können wir folgendes aussprechen.

Satz 18. *Es ist* $\lim J = 0$, *wenn man* $f(x)$ *in zwei Glieder zerlegen kann:*

$$f(x) = F(x) + \chi(x)$$

wo

$$\lim_{\omega=\infty} \int_0^{\varepsilon} F(x) \frac{\sin \omega \pi x}{x} dx = 0$$

ist, während

$$\int_0^{\varepsilon} |\chi(x)| dx = 0. \tag{28}$$

Der Beweis ist leicht. Man hat

$$J = \int_0^{\varepsilon} F(x) \frac{\sin \omega \pi x}{x} dx + \int_0^{\varepsilon} \chi(x) \frac{\sin \omega \pi x}{x} dx.$$

Vom ersten Gliede auf der rechten Seite haben wir angenommen, dass es für $\omega = \infty$ verschwindet. Ferner ist

$$\left| \int_0^{\varepsilon} \chi(x) \frac{\sin \omega \pi x}{x} dx \right| = \pi\omega \cdot \left| \int_0^{\varepsilon} \chi(x) \frac{\sin \omega \pi x}{\omega \pi x} dx \right| < \pi\omega \cdot \int_0^{\varepsilon} |\chi(x)| dx.$$

Da das letztere Integral nach unserer Annahme unabhängig von ω verschwindet, wird also das zweite Integral im Ausdrucke für J unabhängig von ω gleich Null, und somit $\lim J = 0$. — Offenbar kann man ganz allgemein sagen, dass $\lim J$ sich für zwei verschiedene Functionen $f(x)$ auf ganz dieselbe Weise verhält, wenn die Differenz $\chi(x)$ dieser Functionen der Bedingung (28) genügt. Und diese Bedingung ist, wenn $\chi(x)$ durchaus endlich ist oder nur „hebbare" Unendlichkeiten hat, damit gleichbedeutend, dass wenn σ eine beliebig kleine positive Grösse bedeutet, diejenigen x im Intervalle $0 \ldots \varepsilon$, für welche $|\chi(x)| > \sigma$ ist, eine Menge vom Inhalt Null bilden (s. Note I).

Corollarium I. Wenn für irgend eine Function $f(x)$ der Grenzwerth $\lim J = 0$ ist, so bleibt dieses Verhältniss bestehen, wenn man $f(x)$ so verändert, dass man eine nicht-ausgedehnte Menge hebbarer Unendlichkeiten oder anderer hebbarer Unstetigkeiten einführt — auch wenn diese in jedem Intervalle $0 \ldots \delta$ vorkommen, so dass $f(+0)$ nicht $= 0$ wird (wenn man nicht von diesen Unstetigkeiten absieht).

Corollarium II. Die oben immer angenommene *Eindeutigkeit* von $f(x)$ ist in Bezug auf das Verhalten von $\lim J$ *nicht wesentlich*, sobald nur $f(+0) = 0$ (ohne Zweideutigkeit) ist, und $f(x)$ integrabel. Wenn nämlich $g_1(x)$ und $g_2(x)$ zwei eindeutige Functionen sind, welche je in einer mehrwerthigen $f(x)$ eingehen [in dem Sinne, dass für alle x der Werth $g_1(x)$ bez. $g_2(x)$ zur Menge $f(x)$ gehört], so verschwindet immer das zwischen zwei beliebigen Grenzen innerhalb des betrachteten Gebietes genommene Integral $\int |g_1(x) - g_2(x)| dx$ (s. Note 1).

Unmittelbar ergiebt sich jetzt der folgende zweite Satz:

Satz 19. *Es ist* $\lim J = 0$, *wenn* $f(x)$ *unter der Form einer Summe zweier Functionen* $f_1(x)$ *und* $f_2(x)$ *dargestellt ist,*

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

für welche, bei irgend einem ε,

$$\lim_{\omega=\infty} \int_0^\varepsilon f_1(x) \frac{\sin \omega\pi x}{x}\, dx = 0, \quad \lim_{\omega=\infty} \int_0^\varepsilon f_2(x) \frac{\sin \omega\pi x}{x}\, dx$$

ist, oder allgemeiner, wenn man

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \chi(x)$$

hat, wo $f_1(x)$ *und* $f_2(x)$ *denselben Bedingungen genügen, und* $\chi(x)$ *der Bedingung* (28).

2. Eine hübsche Anwendung dieser einfachen Sätze ist die folgende Herleitung eines Satzes, welcher, so viel ich weiss, zuerst von du Bois Reymond ausgesprochen wurde*).

Man setze

$$\psi(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(z)\, dz.$$

Dann ist unter allen Umständen

$$\psi'(x) = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \int_0^x f(z)\, dz - \frac{1}{x^2} \int_0^x f(z)\, dz$$

$\left(\text{wo } \psi'(x) \text{ und } \frac{d}{dx} \int_0^x f(z)\, dz \text{ ein- oder mehrdeutige Functionen bedeuten}\right)$

und somit

$$\frac{d}{dx} \int_0^x f(z)\, dz = x\psi'(x) + \psi(x)$$

oder

$$f(x) = x\psi'(x) + \psi(x) + \chi(x),$$

wo

$$\chi(x) = f(x) - \frac{d}{dx} \int_0^x f(z)\, dz.$$

Nach den Sätzen 7 und 10 hat man, wenn $\psi'(x)$ *absolut integrabel* ist,

$$\lim_{\omega=\infty} \int_0^\varepsilon x\psi'(x) \frac{\sin \omega\pi x}{x}\, dx = 0, \quad \lim_{\omega=\infty} \int_0^\varepsilon \psi(x) \frac{\sin \omega\pi x}{x}\, dx = 0.$$

Dann ist nämlich auch $x\psi'(x)$ absolut integrabel; und dies gilt auch

*) Comptes rendus 1881.

in dem Falle, dass $\psi'(x)$ mehrdeutig ist; also wird nach dem Satze 7 und dem Corollarium II zum Satze 18 der erste der Grenzwerthe gleich Null*). Andererseits ist die Function $\psi(x)$ offenbar stetig an allen von Null verschiedenen Stellen, und die Stetigkeit wird in der That auch für $x = 0$ bestehen; denn es ist

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(s)\,ds = \frac{x \cdot m(x)}{x},$$

wo $m(x)$ zwischen der unteren und der oberen Grenze für $f(s)$ im Intervalle $0 \ldots x$ liegt, weshalb $\lim_{x=0} m(x) = 0$ ist, und also auch $\psi(+0) = 0$. Wenn nun überdies $\psi'(x)$ absolut integrabel ist, so wird nach dem Satze 10 der zweite der fraglichen Grenzwerthe gleich Null. Endlich folgt aus der Note 1, dass die Function $\chi(x)$ der Bedingung (28) genügt. Aus diesen Umständen folgt nach dem vorigen Satze, dass wir folgendes behaupten können:

Satz 20. *Es ist* $\lim J = 0$, *wenn für irgend einen* ε*-Werth die Function*

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{x}\int_0^x f(s)\,ds\right\}$$

im Intervalle $0 \ldots \varepsilon$ *absolut integrabel ist.*

Dini hat einen allgemeineren Satz aufgestellt, welcher aussagt, dass $\lim J = 0$ wird, wenn

$$\frac{\varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_n}{x}\,\frac{d^n}{dx^n}\left\{\frac{1}{\varphi_n}\int_0^x \frac{dx}{\varphi_{n-1}}\int_0^x \cdots \int_0^x \frac{dx}{\varphi_1}\int_0^x f(x)\,dx\right\}$$

in einem Intervalle $0 \ldots \varepsilon$ absolut integrabel ist, wo φ_1, $\varphi_2 \ldots \varphi_n$ stetige Functionen von x sind, welche nebst ihrer Derivirten gewisse ziemlich ausführliche Bedingungen erfüllen. Es lässt sich dies in analoger Weise, wie der Satz 20 beweisen — wobei die obige Zerlegung von $f(x)$ in drei Glieder durch eine Zerlegung in mehrere Glieder ersetzt wird. Wir führen diesen Beweis hier nicht aus (vgl. die Darstellung von Dini, l. c. p. 77—82).

---

*) Hierbei ist zu bemerken: $x\psi'(x)$ hat nicht nothwendig den bestimmten Grenzwerth Null, wie im Satze 7 über $f(x)$ angenommen wird; aber es gilt in der That, dass $\lim J = 0$ ist, sobald $\frac{f(x)}{x}$ absolut integrabel, auch wenn $f(+0)$ nicht den bestimmten Werth Null hat, wie aus der Bemerkung nach dem Satze 7 unmittelbar hervorgeht (doch muss in Unbestimmtheitsfällen selbstverständlich die untere Unbestimmtheitsgrenze gleich Null sein, vergl. Note II).

3. Es sei jetzt $f(x)$ — immer mit $f(+0) = 0$ — als *Product* aus zwei Factoren dargestellt,

$$f(x) = \varphi(x) \,.\, F(x),$$

wo also entweder $\varphi(+0) = 0$ oder $F(+0) = 0$ ist. Es giebt dann vorzugsweise zwei Mittel, um Bedingungen für das Verschwinden von $\lim J$ auf Eigenshaften von $\varphi(x)$ und $F(x)$ zurückzuführen, nämlich die partielle Integration und die Anwendung des sogenannten „zweiten Mittelwerthsatzes".

Man erhält durch partielle Integration

$$(29) \qquad J = \varphi(\varepsilon) \int_0^{\varepsilon} F(x) \frac{\sin \omega\pi x}{x}\, dx - \int_0^{\varepsilon} \varphi'(x)\, dx \int_0^{x} F(\varepsilon) \frac{\sin \omega\pi\varepsilon}{\varepsilon}\, d\varepsilon$$

oder auch

$$(29\,\text{a}) \quad J = \varphi(+0) \int_0^{\varepsilon} F(x) \frac{\sin \omega\pi x}{x}\, dx + \int_0^{\varepsilon} \varphi'(x)\, dx \int_x^{\varepsilon} F(\varepsilon) \frac{\sin \omega\pi\varepsilon}{\varepsilon}\, d\varepsilon.$$

Und diese partielle Integration ist erlaubt, wenn $\varphi(x)$ stetig und $|\varphi'(x)|$ integrabel, sowie auch $F(x)$ integrabel *).

Nach (29) wird unter diesen Voraussetzungen $\lim J = 0$, wenn man überdies annimmt, dass (bei irgend einem ε)

$$\lim_{\omega = \infty} \int_0^{\varepsilon} F(x) \frac{\sin \omega\pi x}{x}\, dx = 0$$

ist. Denn erstens verschwindet für $\omega = \infty$ das erste Glied auf der rechten Seite in (29), da $\varphi(\varepsilon)$ endlich ist. Zweitens gilt dasselbe auch für das zweite Glied: da nämlich das erste Integral in (29) für *alle* $\varepsilon < 1$, incl. $\varepsilon = 0$, bei unbegrenzt wachsendem ω die Null als Grenzwerth hat, so muss die Annäherung an diesen Grenzwerth nothwendig *gleichmässig* sein; wenn also σ beliebig klein ist, so wird für hinreichend grosse ω das Doppelintegral numerisch kleiner als

$$\sigma \int_0^{\varepsilon} |\varphi'(x)|\, dx.$$

In dem Falle, dass $\varphi(+0) = 0$ ist, braucht man in Bezug auf das erste Integral in (29) [oder (29a)] nur anzunehmen, dass es bei der Variation von ω zwischen festen endlichen Grenzen bleibt. Dann wird nämlich das erste Glied im J-Ausdrucke (29) mit ε unendlich klein, und ebenso das zweite, falls $\varphi'(x)$ absolut integrabel. Wir können somit den folgenden Satz aussprechen:

*) S. Note III.

Satz 21. *Es ist* $\lim J = 0$, *wenn man*

$$f(x) = \varphi(x) \cdot F(x) \qquad [f(+0) = 0]$$

hat, wo $\varphi(x)$ *stetig,* $|\varphi'(x)|$ *und* $F(x)$ *integrabel sind, und überdies a) falls* $F(+0) = 0$ *und* $\varphi(+0) \neq 0$, *das Integral*

$$(30) \qquad \int_0^\infty F(x) \frac{\sin \omega \pi x}{x} dx$$

(bei irgend einem ε) *für* $\omega = \infty$ *verschwindet, b) falls* $\varphi(+0) = 0$, *das Integral*

$$\int_0^\infty [F(x) - F(+0)] \frac{\sin \omega \pi x}{x} dx$$

für $\omega = \infty$ *verschwindet, oder wenigstens das Integral* (30) *unabhängig von* ω *numerisch unterhalb einer endlichen Grenze liegt.*

Hier sei folgendes bemerkt. Wenn man $\varphi(x) = 1$ setzt, und über die Function $F(x)$ [mit $F(+0) = 0$] annimmt, dass sie irgend eine der in den Paragraphen 3—5 für $f(x)$ aufgestellten Bedingungen erfüllt, so geht der jetzt bewiesene Satz in den entsprechenden früheren Bedingungssatz über. Auch lässt sich der Satz 21 in demselben Sinne als Verallgemeinerung des „Fundamentalsatzes" 3 auffassen. Es liegt hier die Frage nahe, ob für $\varphi(+0) \neq 0$ auch in dem Sinne eine Verallgemeinerung stattfindet, dass die Bedingungen in 21 in der Weise erfüllt sein können, dass $F(x)$ der Fundamentalbedingung im Satze 3 genügt, ohne dass dies auch für $f(x)$ der Fall ist. Und man kann ebenso fragen, ob für $\varphi(+0) = 0$ $\lim J = 0$ sein kann, ohne dass $f(x)$ zum Gebiete des Fundamentalsatzes gehört, wenn $\varphi(x)$ und $F(x)$ den Bedingungen des Satzes 21 genügt, und überdies die für das Integral (30) vorgeschriebene Eigenschaft, endlich zu bleiben, auf einer Eigenschaft der Function $F(x)$ beruht, welche der gleicht, die im Fundamentalsatze für $f(x)$ festgestellt wurde, nämlich derjenigen, dass das Integral in (8) unterhalb einer endlichen Grenze bleibt. Die Entscheidung dieser Frage scheint in der That nicht ganz so einfach zu sein, und wir können um so mehr dieselbe bei Seite lassen, als das daran geknüpfte Interesse doch nicht so besonders gross ist, da es sich jedenfalls um sehr specielle Verhältnisse handelt (vergl. die Bemerkungen beim Satze 3). [Auch bei den Sätzen 18, 19 kann man die entsprechenden Fragen machen; aber es ist nahezu augenscheinlich, dass sie dort zu verneinen sind.]

4. Der „zweite Mittelwerthsatz" giebt folgendes:

Satz 22. *Für*

$$f(x) = \varphi(x) \cdot F(x) \qquad [f(+0) = 0]$$

ist $\lim J = 0$, *wenn in einer hinreichend kleinen Strecke* $0 \ldots \varepsilon$ *die*

Function $\varphi(x)$ monoton, $F(x)$ integrabel ist, und wenn ausserdem $\varphi(+0)$ einen endlichen Werth hat, und

$$\lim_{\omega=\infty} \int_0^{\cdot} F(x) \frac{\sin \omega\pi x}{x}\, dx = 0 \tag{31}$$

ist. Im Falle $\varphi(+0)=0$ braucht der Grenzwerth (31) *nur endlich* (bestimmt oder unbestimmt) *zu sein.*

Aus dem erwähnten Satze (s. Note IV) folgt nämlich unmittelbar, dass

$$J = \varphi(+0) \int_0^{\Theta \cdot} F(x) \frac{\sin \omega\pi x}{x}\, dx \qquad (0<\Theta<1)$$

wird, sobald $F(x)$ integrabel ist, und $|\varphi(x)|$ bei wachsendem x abnimmt (oder wenigstens nicht zunimmt). Und der Fall, da $|\varphi(x)|$ zunimmt, reducirt sich auf den genannten bei einer Substitution der Form $\varphi(x) = \psi(x) + C$, indem diese

$$\int_0^{\delta} f(x) \frac{\sin \omega\pi x}{x}\, dx = \int_0^{\delta} \psi(x) \cdot F(x) \frac{\sin \omega\pi x}{x}\, dx + C \int_0^{\delta} F(x) \frac{\sin \omega\pi x}{x}\, dx$$

giebt, und die Constante C sich immer so bestimmen lässt, dass für hinreichend kleines δ die Function $|\psi(x)|$ im Intervalle $0 \ldots \delta$ nicht zunimmt. Im Falle $\varphi(+0)=0$ kann man den numerischen Werth von C beliebig klein nehmen (obgleich δ mit $|C|$ verschwindet). Dies zeigt die Richtigkeit der letzten Behauptung im Satze 22, da in den betrachteten Integralen der Werth von δ unwesentlich ist (sobald δ nur in Bezug auf ω constant bleibt).

Auch dieser Satz verallgemeinert die Bedingungssätze der §§ 2—5 in demselben Sinne wie der vorige: wenn man vorschreibt, dass $F(x)$ den Bedingungen eines solchen Satzes genügen soll, so entsteht ein Satz, welcher für $\varphi(x)=1$ mit jenem Satze zusammenfällt. Auch hier kann man ferner fragen, ob eine Verallgemeinerung in der anderen, beim vorigen Satze näher angegebenen Bedeutung stattfindet. Diese Frage ist hier leicht zu entscheiden: die Monotonie von $\varphi(x)$ beachtend, zeigt man ohne Schwierigkeit, dass sie in der That zu verneinen ist; es dürfte überflüssig sein, dies näher auszuführen.

5. Aus den Sätzen 21 und 22 erhält man verschiedene Specialsätze, wenn man die Bedingungen für Endlichbleiben des Integrals (30) [(31)] näher verfolgt — was zu einer, wenigstens theilweise leicht gefundenen Verallgemeinerung der ganzen obigen Theorie führen würde, worauf wir hier nicht näher eingehen werden. Vergl. die Untersuchung von Dini, wo durchgehends $f(x) = \alpha(x) \cdot \beta(x)$ an-

genommen wird, wo $\alpha(x)$ monoton ist, und die Fälle unterschieden werden, dass $\alpha(+0)$ gleich Null oder nicht gleich Null ist.

Selbstverständlich kann man übrigens inbetreff der Natur der Factoren $\varphi(x)$ und $F(x)$ specielle Annahmen machen und dadurch verschiedene specielle Sätze erhalten (aus den obigen Sätzen 21, 22 oder in irgend einer anderen Weise). Vergl. die Darstellung von du Bois-Reymond in der obengenannten Abhandlung „Untersuchungen über die Convergenz etc."

§ 7.

Geometrische Deutung des Satzes 8.

1. Die im Satze 8 vorkommende Summe (10) lässt sich in der folgenden Form schreiben:

$$\frac{1}{2} f\left(\frac{x}{\omega} + \frac{2k}{\omega}\right) - \sum_{i=k}^{\frac{1}{2}(p-2+\Theta)} \left\{ -\frac{1}{2} f\left(\frac{x}{\omega} + \frac{2i}{\omega}\right) + f\left(\frac{x}{\omega} + \frac{2i+1}{\omega}\right) - \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{\omega} + \frac{2i+2}{\omega}\right) \right\}$$
$$+ (-1)^p \cdot \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{\omega} + \frac{p+\Theta}{\omega}\right),$$

wo $\Theta = 0$ oder $= 1$, jenachdem p gerade oder ungerade. Das erste Glied verschwindet immer für $\omega = \infty$, und das letzte wird wenigstens mit ε unendlich klein. Ferner ist die Summe

$$\sum_{i=k}^{\frac{1}{2}(p-2+\Theta)} = \sum_{i=k}^{\frac{1}{2}(p-2+\Theta)} \left(\Delta_{2i} : \frac{1}{\omega}\right),$$

wo Δ_{2i}, vom Zeichen abgesehen, den Flächeninhalt desjenigen Dreiecks bedeutet, dessen Eckpunkte die Abscissen

$$\frac{x}{\omega} + \frac{2i}{\omega}, \quad \frac{x}{\omega} + \frac{2i+1}{\omega}, \quad \frac{x}{\omega} + \frac{2i+2}{\omega}$$

und die Ordinaten

$$f\left(\frac{x}{\omega} + \frac{2i}{\omega}\right), \quad f\left(\frac{x}{\omega} + \frac{2i+1}{\omega}\right), \quad f\left(\frac{x}{\omega} + \frac{2i+2}{\omega}\right)$$

hat (und Δ_{2i} ist positiv oder negativ, je nachdem der mittlere Punkt oberhalb oder unterhalb der Verbindungslinie der beiden anderen liegt).

Es lässt sich also der Satz 8 in der folgenden Form aussprechen:

Satz 8a. *Es ist* $\lim J = 0$, *sobald* ε *und* $\alpha(\omega)$ *sich so bestimmen lassen, dass wenn innerhalb der Strecke* $0 \ldots \varepsilon$ *eine stetige Reihe von Dreiecken in der Curve* $y = f(x)$ *eingeschrieben ist mit* $x = \frac{2k}{\omega}$ *als*

untere Grenzstelle und je $\frac{1}{\omega}$, $\frac{1}{\omega}$, $\frac{2}{\omega}$ *als Projectionen der Seiten auf die x-Axe, die algebraische Summe dieser Dreiecke, je durch die x-Projection* $\frac{2}{\omega}$ *dividirt, unabhängig von* ω *und von der Anzahl der Dreiecke zwischen endlichen Grenzen bleibt.* [Wie der Ausdruck „stetige Reihe von eingeschriebenen Dreiecken" hier zu verstehen ist, dürfte aus dem Vorigen hinreichend deutlich sein.]

Für $\alpha = \frac{1}{\omega}$ ist diese Bedingung unwesentlich von derjenigen verschieden, welche Kronecker l. c. p. 653 ausspricht. Aus der Herleitung der Bedingungsform 8a ist nämlich leicht ersichtlich, dass man darin die Dreiecksreihe ebenso gut von der Abscisse $\frac{2k-1}{\omega}$ als von $\frac{2k}{\omega}$ anfangen kann.

2. Ferner ist zu bemerken, dass die Bedingungen des Satzes 8 erfüllt sind, wenn (für $x < 1$, $p < 2m$) die Grösse

$$\omega \left\{ \int_0^{\frac{p}{\omega}} f(z)\,dz - \frac{1}{\omega} \sum_{i=0}^{p} f\left(\frac{x}{\omega} + \frac{i}{\omega}\right) \right\} \tag{32}$$

numerisch unterhalb einer endlichen Grenze bleibt. Aus dieser Annahme folgt nämlich, dass dasselbe auch für die Summe

$$\omega \left\{ \int_0^{\frac{p+\Theta}{\omega}} f(z)\,dz - \frac{2}{\omega} \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(p+\Theta)} f\left(\frac{2}{\omega} \cdot \frac{x+1}{2} + \frac{2i}{\omega}\right) \right\}$$

gilt, wo $\Theta = 0$ oder $= 1$, je nachdem p gerade oder ungerade, und somit auch für die Differenz dieser beiden Ausdrücke:

$$\omega \int_{\frac{p}{\omega}}^{\frac{p+\Theta}{\omega}} f(z)\,dz - 2 \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}(p+\Theta)} f\left(\frac{x}{\omega} + \frac{2i+1}{\omega}\right) + \sum_{i=0}^{p} f\left(\frac{x}{\omega} + \frac{i}{\omega}\right).$$

Und hier kann man das erste Glied weglassen, da dasselbe jedenfalls numerisch kleiner ist als der Maximalwerth von $|f(x)|$ im Intervalle $0 \ldots \varepsilon$. Der übrige Theil des Ausdruckes reducirt sich aber bis auf eine endliche Anzahl von Gliedern auf die Summe

$$\sum_{i=0}^{p} (-1)^i f\left(\frac{x}{\omega} + \frac{i}{\omega}\right),$$

welche also numerisch unter einer endlichen Grenze bleibt. Die Be-

dingung des Satzes 8 ist somit erfüllt. Andererseits ist die Annahme (32) damit gleichbedeutend, dass die Summe

$$\sum_{i=0}^{p} \omega \left\{ \int_{\frac{i}{\omega}}^{\frac{i+1}{\omega}} f(z)\,dz - \tfrac{1}{2\omega}\left[f\left(\tfrac{x}{\omega} + \tfrac{i}{\omega}\right) + f\left(\tfrac{x}{\omega} + \tfrac{i+1}{\omega}\right)\right]\right\}$$

numerisch unterhalb einer endlichen Grenze bleibt. Aber jedes Glied in dieser Summe bedeutet geometrisch ein „Segment" (mit + oder —) der Curve $f(x) = 0$ mit der x-Projection $\frac{1}{\omega}$, durch diese Projection dividirt. Der Satz 8 enthält also den folgenden:

Satz 8b. *Es ist* $\lim J = 0$, *wenn es für hinreichend kleines* ε *gilt, dass eine in der Curve* $y = f(x)$ *eingeschriebene, von* $x = 0$ *ausgehende und nicht über* $x = \varepsilon$ *hinaus sich erstreckende gebrochene Linie, deren Glieder alle dieselbe x-Projection haben, unabhängig von Grösse und Anzahl der Glieder die Eigenschaft hat, dass die algebraische Summe der entsprechenden Curvensegmente, je durch die x-Projection dividirt, zwischen festen endlichen Grenzen liegt.*

Diesen Satz findet man bei Kronecker, l. c. p. 655. Auch die obige Herleitung desselben ist sehr unwesentlich von der Kronecker'schen verschieden.

Die von Hölder in der oben citirten Arbeit aufgestellte hinreichende Bedingung für Entwickelbarkeit einer Function in eine Fourier'sche Reihe ist im Satze 8b enthalten.

§ 8.

Die ursprüngliche Dirichlet'sche Integralform.

Es ist

$$\int_0^{\pi} f(x)\frac{\sin \omega\pi x}{x}\,dx = \int_0^{\pi} f(x)\left\{\frac{\sin \omega\pi x}{x} - \frac{\pi \sin \omega\pi x}{\sin \pi x}\right\} dx$$

$$+\pi \cdot \int_0^{\pi} f(x) \cdot \frac{\sin \omega\pi x}{\sin \pi x}\,dx$$

$$= \int_0^{\pi} f(x) \cdot x P(x) \frac{\sin \omega\pi x}{x}\,dx + \pi \cdot \int_0^{\pi} f(x)\frac{\sin \omega\pi x}{\sin \pi x}\,dx,$$

wo $P(x)$ eine für $|x| < 1$ convergente Dignitätsreihe bedeutet. Nach dem obigen Satze 7 wird der Grenzwerth (für $\omega = \infty$) des ersten Integrals auf der rechten Seite gleich Null, sobald $f(x)$ endlich und

integrabel ist: denn $x f(x) P(x)$ hat dann für $x = +0$ den Werth Null, und $f(x) . P(x)$ ist integrabel. Man erhält also

$$\lim_{\omega=\infty} \int_0^{\cdot} f(x) \frac{\sin \omega \pi x}{x} dx = \lim_{\omega=\infty} \int_0^{\pi \cdot} f\left(\frac{x}{\pi}\right) \frac{\sin \omega x}{\sin x} dx.$$

Hiermit ist bewiesen dass (wie oben behauptet wurde) die Untersuchung des ursprünglichen Dirichlet'schen Grenzwerthes (1) sich auf die Untersuchung des oben betrachteten Grenzwerthes $\lim J$ reducirt.

Note I. Die *Schwankung* einer Function in einem gewissen Intervalle ist die Differenz zwischen der oberen und der unteren Grenze für die Functionswerthe im Intervalle. Der *Sprung* einer eindeutigen Function an einer Stelle x ist der Grenzwerth, für $\delta = 0$, von der Schwankung im Intervalle $x - \delta \ldots x + \delta$. Der *Inhalt* einer Punktmenge ist die untere Grenze für die Gesammtlänge von Strecken (mit endlicher Anzahl), welche die Menge vollständig einschliessen (so dass jede zur Menge gehörende Stelle innerhalb einer solchen Strecke liegt). Eine Menge vom Inhalt Null heisst auch discrete oder nicht ausgedehnte Menge.

Eine in einem gegebenen Intervalle eindeutige und endlich bleibende Function $f(x)$ ist bekanntlich in diesem Intervalle „*integrirbar*", wenn man nach der Wahl einer beliebig kleinen positiven Grösse σ, eine solche Zerlegung des Intervalles in Partialintervalle δ_i finden kann, dass die Summe $\sum \delta_i D_i < \sigma$ wird, wo D_i die Schwankung von $f(x)$ im Intervalle δ_i bedeutet. Aber die Integrabilitätsbedingung lässt sich auch so formuliren: wenn σ beliebig klein ist, so sollen die Stellen x, an denen der Sprung von $f(x)$ grösser als σ ist, eine Menge vom Inhalt Null bilden (s. Pasch, Math. Ann. Bd. 30; vergl. auch eine Arbeit vom Verf., „Functionentheoretische Bemerkungen und Sätze", Acta Univ. Lundensis, Tome XXXIII, p. 37).

Wenn Unendlichkeitsstellen vorkommen, kann man mit Harnack (Math. Ann. Bd. 24, p. 220) die Integrabilität in jedem denkbaren Falle folgendermassen definiren: erstens sollen die Unendlichkeitsstellen eine nicht-ausgedehnte Menge bilden, und zweitens soll es gelten, dass wenn man diese Stellen in eine endliche Anzahl von Intervallen einschliesst und eine Function $\psi(x)$ so definirt, dass innerhalb dieser Intervalle $\psi(x) = 0$ ist, sonst aber gleich $f(x)$, die über das fragliche Intervall erstreckte Integration von $\psi(x)$ zu einem Werthe führt, welcher beliebig wenig von einer gewissen bestimmten endlichen Grösse abweicht, wenn die Gesammtlänge der Strecken, welche die Unendlichkeitsstellen einschliessen, hinreichend klein ist (und jene Grösse ist der Werth des Integrals). — Es ist hiernach an sich klar, dass

wenn eine Function $f(x)$ integrirbar ist, diese Eigenschaft bestehen bleibt, wenn man eine nicht-ausgedehnte Menge von „hebbaren" Unendlichkeitsstellen einführt, d. h. solche, für welche $f(x) = \pm\infty$ ist, während $f(x+0)$ und $f(x-0)$ endlich bleiben. Es gilt übrigens ganz allgemein, dass eine integrirbare Function (endlich bleibend oder nicht) integrirbar bleibt, wenn man für eine nicht-ausgedehnte x-Menge in ganz beliebiger Weise die Functionswerthe verändert.

Eine integrirbare Function kann bekanntlich nicht „total unstetig" sein: in jeder Theilstrecke müssen Stetigkeitsstellen vorkommen.

Aber die Integrirbarkeit ist nicht auf eindeutige Functionen beschränkt: eine *mehrdeutige* Function $f(x)$ ist integrirbar, wenn jede eindeutige Function $g(x)$, für welche bei jedem x der Werth $g(x)$ zur Menge $f(x)$ gehört, integrirbar ist, woraus leicht hervorgeht, dass das Integrationsresultat nicht von der Wahl von $g(x)$ abhängt, und sogar dass man $g(x)$ als die obere oder untere Grenze für die Menge $f(x)$ bestimmen kann, ohne den Integralwerth zu verändern. Es ergiebt sich auch ohne Schwierigkeit, dass eine integrirbare mehrdeutige Function für eine in jedem Intervalle condensirte x-Menge eindeutig und stetig ist.

Die „Integralfunction" $\int_a^x f(z)\,dz$ ist immer, falls $f(x)$ integrabel, eine *stetige* Function von x, unabhängig davon, ob $f(x)$ endlich bleibt, oder nicht*) (s. Harnack l. c. p. 220—222). Die Derivirte derselben (welche integrabel aber nicht immer eindeutig ist) fällt an allen Stetigkeitsstellen von $f(x)$ mit $f(x)$ zusammen (s. z. B. Lüroth und Schepp, Bearbeitung von Dini's Fondamenti etc. p. 368) und giebt also, da diese Stellen überall condensirt sind, dasselbe definite Integral, und die Differenz

$$f(x) - \frac{d}{dx}\int_a^x f(z)\,dz$$

hat die Eigenschaft, dass diejenigen Stellen, an denen dieselbe numerisch grösser als ein beliebig kleines σ ist (oder bei Mehrdeutigkeit sein kann), eine Menge vom Inhalt Null bilden.

Wenn eine Function sowohl integrabel ist, als auch die Eigenschaft hat, die Derivirte (eindeutig oder mehrdeutig) einer stetigen Function — der „primitiven Function" — zu sein, so fallen die Integralfunction $\int_a^x$ und die Primitive bis auf eine additive Constante zusammen, es ist m. a. W.

*) Sowie auch von der Vertheilung der ∞-Stellen.

$$f(x+h) - f(x) = \int_x^{x+h} f'(z)\,dz,$$

wenn $f(x)$ stetig, und $f'(x)$ integrabel ist — jedoch unter der Voraussetzung, dass $f'(x)$ *höchstens eine „reductible" Menge von Unendlichkeitsstellen hat* (s. Harnack l. c. p. 222—223), was im Vorigen (s. die Einleitung) immer vorausgesetzt wurde.

Note II. Bei Functionen $f(x)$, für welche $f(+0) = +\infty$ ist (ohne Unbestimmtheit), gilt es selbstverständlich als nothwendige (obgleich nicht hinreichende) Bedingung für Integrabilität in einer hinreichend kleinen Strecke $0 \ldots \delta$, dass (von hebbaren Unendlichkeiten abgesehen) $\lim_{x=0} xf(x) = 0$ ist oder die Null als untere Unbestimmtheitsgrenze hat.

Note III. Die durch *partielle Integration* gewonnene Formel

$$\text{(A)} \qquad \int_a^b \varphi(x) f(x)\,dx = \varphi(b) \int_a^b f(z)\,dz - \int_a^b \varphi'(x)\,dx \int_a^x f(z)\,dz$$

ist richtig, sobald $\varphi(x)$ stetig, $|\varphi'(x)|$ integrabel, und $|f(x)|$ integrabel ist, sowie auch $\varphi'(x)$ und $f(x)$ höchstens für eine reductible x-Menge unendlich gross. Dies lässt sich folgendermassen zeigen. Man hat immer mit Sicherheit

$$\frac{d}{dx}\left\{\varphi(x) \int_a^x f(z)\,dz\right\} = \varphi(x)\,\frac{d}{dx}\int_a^x f(z)\,dz + \varphi'(z)\int_a^x f(z)\,dz$$

(was bei Mehrdeutigkeit der linken Seite so zu verstehen ist, dass die rechte Seite in ganz derselben Weise mehrdeutig ist). Es ist also auch

$$\frac{d}{dx}\left\{\varphi(x) \int_a^x f(z)\,dz\right\} = \varphi(x) f(x) + \varphi'(x) \int_a^x f(z)\,dz$$
$$+ \varphi(x)\left\{\frac{d}{dx}\int_a^x f(z)\,dz - f(x)\right\}.$$

Zufolge der Stetigkeit von $\varphi(x)$ und der absoluten Integrabilität von $f(x)$, ist das erste Glied auf der rechten Seite eine integrable Function (s. z. B. Lüroth und Schepp l. c. p. 419, § 226). Dasselbe gilt auch für das zweite Glied, da $\varphi'(x)$ absolut integrabel, und der Integralfactor stetig ist. Und das letzte Glied giebt, unabhängig von x, bei definiter Integration den Werth Null, wie aus der ersten Note folgt. Der ganze Ausdruck rechts repräsentirt also eine integrable Function. Folglich ist auch die Function auf der linken Seite inte-

grabel. Diese Function ist andererseits die Derivirte der stetigen Function $\varphi(x)\int_a^x f(z)dz$. Also ist (s. Note I) das definite Integral der linken Seite von a bis b gleich der Differenz zwischen den Werthen der letztgenannten Function für $x = b$ und $x = a$, d. h. gleich

$$\varphi(b)\int_a^b f(x)dx.$$

Wenn man auch rechts von a bis b integrirt, so geht die zu beweisende Gleichung (A) hervor. Zu bemerken ist doch hierbei, dass es in der That hinreicht, wenn man voraussetzt, dass die *eine* der Functionen, deren absolute Integrabilität oben angenommen wurde, *absolut* integrabel ist (obgleich beide integrabel sein sollen). Der Beweis wird in diesem Falle etwas ausführlicher (vgl. Lüroth u. Schepp, l. c. p. 493).

Note IV. Der sogenannte *zweite Mittelwerthsatz* in der Integralrechnung enthält Folgendes: Wenn $f(x)$ in einem Intervalle $a \ldots b$ endlich und integrirbar ist, und $\varphi(x)$ von a bis b niemals das Zeichen ändert und niemals numerisch wächst, so ist

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \varphi(a)\int_a^{a+\Theta(b-a)} f(x)dx,$$

wo $0 \leqq \Theta \leqq 1$. Vgl. du Bois Reymond, Crelle's J. Bd. 69 p. 78; Lüroth u. Schepp (Dini Fondamenti) § 212.

Note V. Kronecker stellt in dem citirten Aufsatze p. 664 den folgenden Bedingungssatz auf: Falls $f(x)$ stetig ist, so gilt die Dirichlet'sche Integralgleichung, wenn für alle x unterhalb einer gewissen Grenze x_0

$$\lim_{\sigma=0}[f(x+\sigma) - f(x)]\log\frac{1}{\Theta(\sigma)} = 0 \tag{B}$$

ist, wo die Function $\Theta(\sigma)$ den Bedingungen

$$\lim_{\sigma=0}\frac{\sigma}{\Theta(\sigma)} = 0, \quad \lim_{\sigma=0}\int_\sigma^{\sigma+\Theta(\sigma)}[f(x) - f(0)]\sin\frac{\pi x}{\sigma}\,d\log x = 0$$

genügt. Hier wird also — wie oben im Paragr. 1 angedeutet wurde — eine veränderliche Grösse $\Theta(\sigma)$ in Betracht gezogen, welche ganz dieselbe Rolle spielt, wie unsere Functionen $\alpha(\omega)$, mit $\lim \omega \,.\, \alpha = \infty$ (vergl. Kronecker's Bemerkungen p. 664). Und es wird sogar bemerkt, dass die zweite Θ-Bedingung damit gleichbedeutend ist, dass

$$\lim_{\sigma=0}\left[f\left(\sigma + \delta\Theta(\sigma)\right) - f(0)\right]\log\frac{\Theta(\sigma)}{\sigma} = 0 \tag{C}$$

ist, wo $0 \leqq \delta \leqq 1$, eine Gleichung welche offenbar unsere α-Bedingung (3) [im Satze 1b] in sich schliesst. Aber es wird nicht die (ziemlich leicht bewiesene) Thatsache hervorgehoben, dass die aufgestellten Θ-Bedingungen immer erfüllbar sind (sogar nicht, dass dies bei stetigem $f(x)$ gilt); und Kronecker scheint im Ganzen die Bedeutung seiner Functionen $\Theta(\sigma)$ unterschätzt zu haben: nach der Aufstellung der Gleichung (C) „*definirt*" er $\Theta(\sigma)$ durch die zur Form

$$\text{(D)} \qquad \lim_{\sigma=0} \Delta(\sigma) \log \frac{1}{\Theta(\sigma)} = 0$$

modificirte Gleichung (B) ($\Delta(\sigma) =$ der oberen Grenze für $|f(x+\sigma)-f(x)|$ bei verschiedenen x zwischen 0 und x_0) und leitet nachher mittelst der aus (C) hergeleiteten Gleichung

$$\text{(E)} \qquad \lim_{\sigma=0} \Delta(\sigma) \log \frac{\Theta(\sigma)}{\sigma} = 0$$

die Gleichung

$$\lim_{\sigma=0} \Delta(\sigma) \log \frac{1}{\sigma} = 0$$

her. In diese Bedingung, welche schon in Kronecker's vorangehender Untersuchung enthalten war, münden also die fraglichen, den Kronecker'schen Aufsatz abschliessenden Betrachtungen aus. Und hierbei ist zu bemerken, dass (abgesehen davon, ob wirklich (E) aus (C) folgt) man umgekehrt nur dann von (E) zu (C) schliessen kann, wenn $\frac{\Theta(\sigma)}{\sigma}$ *endlich* bleibt — weshalb es ganz natürlich war, dass die Annahme (E) zu einer schon vorher erhaltenen Bedingung zurückführen sollte. Uebrigens setzt Kronecker an der fraglichen Stelle durchgehends voraus, dass $f(x)$ stetig ist.

Wir bemerken hier auch, dass bei den obengenannten Untersuchungen von du Bois-Reymond, welche sich auf specielle $f(x)$ beziehen, veränderliche untere Integrationsgrenzen zur Anwendung kommen.

Note VI. Es ist eine naheliegende Frage, ob nicht das für die Herleitung der Bedingungen im Paragraphen 4 zu Grunde liegende Verfahren sich mit Vortheil so modificiren lässt, dass man, von der Bedingungsform des Satzes 3a oder 3b ausgehend, die Summe der absoluten Werthe der Glieder $U_i(x, \omega)$ der Summe unter dem Integralzeichen einführt, die Grössen $|U_i(x, \omega)|$ durch irgend welche von x wirklich abhängende positive Ausdrücke $\overline{U}_i(x, \omega)$ ersetzt, welche niemals kleiner als die entsprechenden $|U_i(x, \omega)|$ sind, und endlich die Integrationen

$$\int_0^1 \overline{U}_i(x, \omega)$$

wirklich ausführt. Ein solches Verfahren benutzt in der That Dini in der oben citirten Arbeit (Serie di Fourier etc.). Dasselbe kommt, mit unseren Bezeichnungen, auf Folgendes hinaus.

Die Summe unter dem Integralzeichen im Ausdrucke (13) ist gleich

$$\sum_{i=k}^{m-1} \frac{f\left(\frac{x}{\omega}+\frac{2i}{\omega}\right)-f\left(\frac{2i}{\omega}\right)+f\left(\frac{2i}{\omega}\right)-f\left(\frac{x}{\omega}+\frac{2i+1}{\omega}\right)}{x+2i+1},$$

und somit das Integral

$$\int_0^1 dx \left|\sum_{i=k}^{m-1}\right| < \sum_{i=k}^{m-1} \int_0^2 dx \, \frac{\left|f\left(\frac{x}{\omega}+\frac{2i}{\omega}\right)-f\left(\frac{2i}{\omega}\right)\right|}{2i+1} -$$

$$-\sum_{i=k}^{m-1} \int_0^2 \frac{x}{\omega} \cdot H(\omega, i, x) \frac{dx}{2i+1} < \sum_{i=k}^{m-1} \int_0^2 \frac{x}{\omega} \cdot \overline{H}(\omega, i) \cdot \frac{dx}{2i+1},$$

wo $\overline{H}(\omega, i)$ die als endlich angenommene obere Grenze — bei x-Werthen zwischen 0 und 2 — für die positive Grösse $H(\omega, i, x)$ bedeutet (welche durch die Gleichung

$$\frac{\omega}{x} \cdot H(\omega, i, x) = \left|f\left(\frac{x}{\omega}+\frac{2i}{\omega}\right)-f\left(\frac{2i}{\omega}\right)\right|$$

definirt ist). Durch Ausführung der Integrationen im letzten Summenausdrucke erhält man

$$\int_0^1 dx \left|\sum_{i=k}^{m-1}\right| < \sum_{i=k}^{m-1} \frac{2i}{\omega} \cdot \overline{H}(\omega, i) \cdot \frac{1}{i(2i+1)}$$

$$< \left\{\frac{2i}{\omega} \cdot \overline{H}(\omega, i)\right\}_{\max} \cdot \sum_{i=k}^{m-1} \frac{1}{i(2i+1)}.$$

Da die letzte Summe immer endlich ist, ergiebt sich als hinreichende Bedingung für die Gültigkeit der Dirichlet'schen Gleichung, dass die obere Grenze des eingeklammerten Productes (bei den verschiedenen i) für hinreichend kleines ε und hinreichend grosses ω beliebig klein

wird. Dies kommt aber darauf hinaus, dass $\lim_{x=0} x\bar{f}'(x)$ verschwinden soll (s. Dini's Satz l. c. p. 57).

Da man ferner, wie wir jetzt wissen, immer annehmen kann, dass $\lim_{\omega=\infty} k = \infty$ ist, und somit $\lim \sum_{k}^{m-1} \frac{1}{i(2i+1)} = 0$, so reicht es schon hin, dass $x\bar{f}'(x)$ endlich bleibt, und wir kommen auf unseren obigen Satz 16 zurück. Durch Modification des Verfahrens kann man auch andere Resultate im Paragr. 4 zurückbekommen; aber etwas wesentlich Neues ist auf dem fraglichen Wege kaum zu gewinnen.

Note VII. Den im Texte gegebenen Andeutungen über den Beweis des Satzes 16a fügen wir hier folgende Bemerkungen hinzu. Im Producte $\lambda_1(\omega, i) . \lambda_2(\omega, i) = \lambda(\omega, i)$ bedeute $\lambda_1(\omega, i)$ die obere Grenze für $\bar{f}_1'(x)$ im Intervalle $\frac{2i}{\omega} \cdots \frac{2i+2}{\omega}$. Dann wird [da $\lambda(\omega, i)$ obere Grenze für $\bar{f}'(x)$ ist] $\lambda_2(\omega, i)$ sicher nicht grösser als die obere Grenze für $\bar{f}_2'(x)$ im fraglichen Intervalle. Diese obere Grenze ist aber gleich $\bar{f}_2'\left(\frac{2i}{\omega}\right)$, da $x\bar{f}_2'(x)$ und somit auch $\bar{f}_2'(x)$ bei wachsendem x abnimmt. Es wird also $\frac{2i}{\omega} \lambda_2(\omega, i) \leqq \frac{2i}{\omega} \bar{f}_2'\left(\frac{2i}{\omega}\right)$, folglich $\frac{2i}{\omega} \lambda_2(\omega, i) < Ck$, wenn $i \geqq k$ [nach den Annahmen über $x\bar{f}_2'(x)$]. Die Annahme $\lim_{x=0} \bar{f}_1'(x) = 0$ giebt ferner $\lim_{\varepsilon=0} \lim_{\omega=\infty} \lambda_1(\omega, i) = 0$. Die erforderlichen Bedingungen für λ_1 und λ_2 sind also erfüllt. — Man kann übrigens den fraglichen Satz auf verschiedene Weisen modificiren. Die oben angewandte Formulirung ist der folgenden Anwendung [Satz 17] angepasst.

Lund, 6. September 1898.

Sur le produit de deux fonctions cylindriques.

Par

NIELS NIELSEN à Copenhague.

§ 1.

Développement du produit $J^{\mu}(x)\,J^{\nu}(x)$. Formules de M. Lommel.

La fonction cylindrique de la première espèce $J^{\mu}(x)$ peut être définie par la sèrie

$$J^{\mu}(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+2n}}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(\mu+n+1)},$$

définition qui est valable dans toute l'étendue du plan, pourvu que l'on ait défini x^{μ} d'une manière convenable. Nous supposons généralement que l'argument x et l'indice μ soient tous deux complexes.

Multiplions maintenant les deux séries obtenues pour $J^{\mu}(x)$ et $J^{\nu}(x)$, nous aurons en appliquant la règle de Cauchy

$$J^{\mu}(x)\,J^{\nu}(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n A_n \left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+\nu+2n},$$

où le coefficient A_n, après une réduction légère, peut s'écrire

$$A_n = \frac{1}{\Gamma(\mu+n+1)\,\Gamma(\nu+n+1)} \cdot \sum_{p=0}^{p=\infty} \binom{\mu+n}{p}\binom{\nu+n}{n-p}$$

$$= \frac{\binom{\mu+\nu+2n}{n}}{\Gamma(\mu+n+1)\,\Gamma(\nu+n+1)},$$

d'où finalement

$$(1) \qquad J^{\mu}(x)\,J^{\nu}(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \binom{\mu+\nu+2n}{n} \left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+\nu+2n}}{\Gamma(\mu+n+1)\,\Gamma(\nu+n+1)}.$$

De cette formule bien connue on peut en déduire une foule d'autres

sur les fonctions cylindriques, formules dont quelques-unes sont connues auparavant. Mais les démonstrations données pour ces formules sont peu directes et assez compliquées. Par notre procèdé les formules en question se déduisent immédiatement de (1) qui es leur origine naturelle.

Supposons en effet que p soit un positif entier, nous aurons en vertu de (1)

$$(\alpha) \qquad J^{-\mu}(x)\,J^{\mu-p}(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \binom{2n-p}{n} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p}}{\Gamma(n+1-\mu)\,\Gamma(n+1-p+\mu)},$$

$$(\beta) \qquad J^{-\mu+p}(x)\,J^{\mu}(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \binom{2n+p}{n} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}}{\Gamma(n+1+p-\mu)\,\Gamma(\mu+n+1)}.$$

Divisons maintenant en deux parties la somme qui figure au second membre de (α), la première de $n=0$ à $n=p-1$, la dernière de $n=p$ à $n=\infty$.

Nous voyons sans peine que cette dernière partie est égale à

$$(-1)^p J^{-\mu+p}(x)\,J^{\mu}(x).$$

Cela posé, appliquons la formule

$$\Gamma(m+1-\mu)\,\Gamma(m+1+\mu-p) = \frac{(-1)^m(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-m)}{(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-p+m+1)} \frac{\pi}{\sin\mu\pi},$$

ce qui donne, après une réduction facile

$$(2) \qquad J^{-\mu}(x)J^{\mu-p}(x) + (-1)^{p-1}J^{-\mu+p}(x)\,J^{\mu}(x)$$
$$= \frac{\sin\mu\pi}{\pi} \sum_{n=0}^{E\left(\frac{p-1}{2}\right)} (-1)^n \frac{(p-n-1)!}{n!} \binom{\mu-n-1}{p-2n-1} \left(\frac{2}{x}\right)^{p-2n},$$

où $E\left(\frac{p-1}{2}\right)$ désigne le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{p-1}{2}$.

De cette formule (2) on peut déduire immédiatement les formules démontrées par M. Lommel*).

Supposons par exemple $p=1$, nous aurons la formule fondamentale du même auteur**).

$$(3) \qquad J^{-\mu}(x)\,J^{\mu-1}(x) + J^{-\mu+1}(x)\,J^{\mu}(x) = \frac{2\sin\mu\pi}{\pi x},$$

démontrée d'une autre manière par M. N. Sonine***).

*) Mathematische Annalen, tome 4, p. 109—110.
**) Ibid. tome 4, p. 105.
***) Ibid. tome 16, p. 33.

Posons encore $p = 2m + 1$, $\mu = \frac{2m+1}{2}$, nous aurons en outre

$$(4) \qquad \left(J^{-\frac{2n+1}{2}}(x)\right)^2 + \left(J^{\frac{2n+1}{2}}(x)\right)^2 = (-1)^n \sum_{m=0}^{m=n} (-1)^m \frac{(2n-m)!}{m!} \binom{2n-2m-1}{2n-2m} \left(\frac{2}{x}\right)^{2n-2m+1},$$

formule qui est également due à M. Lommel*).

Pour la fonction cylindrique de la seconde espèce $Y^\mu(x)$ prenons la définition de Schläfli**)

$$(\gamma) \qquad Y^\mu(x) = \frac{\pi}{\sin \mu\pi} \left(\cos \mu\pi J^\mu(x) - J^{-\mu}(x)\right),$$

expression qui, au facteur $1 + i \operatorname{tg} \mu\pi$ près, est identique à celle de Hermann Hankel***).

De cette définition (γ) qui est valable pour toutes les valeurs de μ, on tire immédiatement, en vertu de (2) la formule

$$(5) \qquad Y^{\mu-p}(x) J^\mu(x) - J^{\mu-p}(x) Y^\mu(x) = \sum_{n=0}^{E\left(\frac{p-1}{2}\right)} (-1)^n \frac{(p-n-1)!}{n!} \binom{\mu-n-1}{p-2n-1} \left(\frac{2}{x}\right)^{p-2n},$$

qui pour μ positif entier est trouvée par M. Lommel†).

Posons $p = 1$, nous aurons

$$(6) \qquad Y^{\mu-1}(x) J^\mu(x) - J^{\mu-1}(x) Y^\mu(x) = \frac{2}{x},$$

formule qui est due également à M. Lommel††), mais trouvé indépendamment par Hermann Hankel†††). Plus tard M. Sonine *†) a donné une autre démonstration de (6).

§ 2.

Développement d'une série de puissances positives.

Supposons que μ ne soit pas égal à un nombre entier négatif et désignons par ω le plus petit des modules

$$|\mu + n|, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

---

*) Mathematische Annalen, tome 2, p. 631.
**) Annali di Matematica, Serie II^a, tomo 6, p. 17.
***) Mathematische Annalen, tome 1, p. 472.
†) Ibid., tome 4, p. 111.
††) Ibid., tome 4, p. 108.
†††) Ibid., tome 8, p. 458.
*†) Ibid., tome 16, p. 33.

nous aurons en vertu de la définition même de $J^{\mu}(x)$:

$$(7) \qquad |J^{\mu}(x)| < \left| \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\mu}}{\Gamma(\mu+1)} \right| \cdot e^{\left|\frac{x^2}{4\omega}\right|}.$$

Cela posé, désignons par m et m' deux nombres positifs entiers quelconques et $m' > m$, nous aurons

$$(\alpha) \qquad \sum_{p=m}^{p=m'} |a_p J^{\mu+\nu}(x) J^{\nu+p}(x)| < e^{\left|\frac{x^2}{4\mu+4m+4}\right| + \left|\frac{x^2}{4\nu+4m+4}\right|} \cdot \sum_{p=m}^{p=m'} \frac{\left|a_p \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+\nu+2p}\right|}{|\Gamma(\mu+p+1)\,\Gamma(\nu+p+1)|},$$

pourvu que m soit supposé si grand que $R(\mu+m) \geqq 0$*), $R(\nu+m) \geq 0$. Le coefficients a_p sont des constantes quelconques.

De l'inégalité (α) on tire sans peine la proposition suivante:

Si la série

$$(\beta) \qquad \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{a_p \left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+\nu+2p}}{\Gamma(\mu+p+1)\,\Gamma(\nu+p+1)}$$

est supposée absolument convergente, la série plus compliquée

$$(\gamma) \qquad \sum_{p=0}^{p=\infty} a_p J^{\mu+p}(u) J^{\nu+p}(x)$$

sera nécessairement absolument convergente.

Introduisons maintenant dans (γ) la série infinie obtenue pour $J^{\mu+p}(x) J^{\nu+p}(x)$, nous aurons une série à double entrée Δ. Or, si la série (β) est absolument convergente on peut ranger d'une manière quelconque les termes de Δ**). En ordonnant ces termes selon les puissances de $\frac{x}{2}$ on aura une équation de la forme

$$\sum_{p=0}^{p=\infty} a_p J^{\mu+p}(x) J^{\nu+p}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+\nu} \sum_{p=0}^{p=\infty} b_p \left(\frac{x}{2}\right)^{2p},$$

où

$$(9) \qquad b_p = \frac{(-1)^p}{\Gamma(\mu+p+1)\,\Gamma(\nu+p+1)} \sum_{s=0}^{s=p} (-1)^s \binom{\mu+\nu+2p}{p-s} a_s.$$

---

*) $R(x)$ désigne la partie réelle de x.

**) Voir sur ce sujet un mémoire de M. Alfred Pringsheim inséré aux Sitzungsberichte der kgl. bayrischen Akademie d. Wissenschaften pour l'année 1897.

La série qui figure au second membre de (8) a encore les mêmes courbes de convergence que la série (β).

Posons par exemple $a_s = 1$, nous aurons en appliquant une formule bien connue sur les coefficients du binôme

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} J^{\mu+n}(x)\, J^{\nu+n}(x) = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{(-1)^p \binom{\mu+\nu+2p-1}{p} \left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+\nu+2p}}{\Gamma(\mu+p+1)\,\Gamma(\nu+p+1)},$$

ou bien

$$(10) \qquad \int x^{\mu-\nu} J^{\mu-1}(x)\, J^{\nu}(x)\, dx = x^{\mu-\nu} \sum_{n=0}^{n=\infty} J^{\mu+n}(x)\, J^{\nu+n}(x).$$

Posons encore $a_s = (-1)^s \binom{\varrho}{s}$, d'où

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \binom{\varrho}{n} J^{\mu+n}(x)\, J^{\nu+n}(x) = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{(-1)^p \binom{\mu+\nu+\varrho+2p}{p} \left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+\nu+2p}}{\Gamma(\mu+p+1)\,\Gamma(\nu+p+1)};$$

en mettant $\varrho = \frac{1}{2}$, $\nu = \mu - \frac{1}{2}$, nous aurons en appliquant la formule de multiplication de $\Gamma(2x)$:

$$(11) \qquad J^{2\mu}(2x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \binom{\frac{1}{2}}{n} J^{\mu+n}(x)\, J^{\mu+n-\frac{1}{2}}(x).$$

En supposant que ni μ ni ν soit égal à un négatif entier, on voit que l'équation (9) et ses analogues pour les valeurs plus petites de l'indice p suffisent à déterminer les coefficients a_s à l'aide des coefficients b_p. On aura en effet une expression de la forme

$$(\delta) \qquad a_p = \alpha_0^p b_p + \alpha_1^p b_{p-1} + \cdots + \alpha_p^p b_0,$$

En portant (δ) dans (9) on aura

$$\alpha_0^p = \Gamma(\mu+p+1)\,\Gamma(\nu+p+1),$$

$$\alpha_1^p = \frac{\mu+\nu+2p}{1!}\,\Gamma(\mu+p)\,\Gamma(\nu+p),$$

$$\alpha_2^p = \frac{(\mu+\nu+2p)(\mu+\nu+2p-3)}{2!}\,\Gamma(\mu+p-1)\,\Gamma(\nu+p-1).$$

. . . . . .

De cette manière on aura, en appliquant par exemple la conclusion habituelle de s à $s+1$, l'expression générale

$$(\varepsilon) \qquad \alpha_s^p = \frac{\mu+\nu+2p}{s!}(\mu+\nu+2p-s-1)(\mu+\nu+2p-s-2)\,..$$
$$..(\mu+\nu+2p-2s+1)\,\Gamma(\mu+p-s+1)\,\Gamma(\nu+p-s+1),$$

ou bien

$$(\xi)\quad \alpha_s^p = \frac{(\mu+\nu+2p)\,(\mu+\nu+2p-2s+1)}{2!}\,\mathrm{B}(\mu+p-s+1,\ \nu+p-s+1) \times \Gamma(\mu+\nu+2p-s),$$

formule qui est aussi valable pour $s=0$, $s=1$. Ainsi nous aurons finalement

$$(12)\quad a_p = (\mu+\nu+2p)\sum_{m=0}^{m=p}\frac{\mu+\nu+2m+1}{(p-m)!}\,\mathrm{B}(\mu+m+1,\ \nu+m+1) \times \Gamma(\mu+\nu+p+m)\,b_m.$$

Mais, si la série qui figure au second membre de (8) est supposée convergente en sera-t-il de même pour la série (β)?

Pour répondre à cette question, écrivons l'expression trouvée pour a_p sous la forme développée

$$(13)\quad \frac{a_p}{\Gamma(\mu+p+1)\,\Gamma(\nu+p+1)} = b_p + \frac{\mu+\nu+2p}{(\mu+p)\,(\nu+p)}\,b_{p-1} + \sum_{m=2}^{m=p}\frac{b_{p-m}}{m!}\,\frac{(\mu+\nu+2p)(\mu+\nu+2p-m-1)\ldots(\mu+\nu+2p-2m+1)}{(\mu+p)(\mu+p-1)\ldots(\mu+p-m+1)(\nu+p)(\nu+p-1)\ldots(\nu+p-m+1)}.$$

Posons ensuite $|\mu+\nu|=\beta$, tandis que α désigne le plus grand des modules $|\mu|$, $|\nu|$. De cette manière on obtiendra pour le terme générale A_m sous le signe de sommation

$$|A_m| < \frac{(2p+\beta)(2p-m-1+\beta)(2p-m-2+\beta)\ldots(2p-2m+1+\beta)}{m!\,(p-\alpha)^2(p-1-\alpha)^2\ldots(p-m+q-\alpha)^2 B}\,|b_{p-m}|,$$

où q désigne le plus petit positif entier qui donne

$$2q-2\alpha \geqq 1+\beta,$$

et généralement

$$2p-2m+2q-2\alpha \geqq 2p-2m+1+\beta;$$

ainsi B reste toujours fini et différent de zéro. Cela posé, on aura

$$|A_m| < \frac{(2p+\beta)\,(2p-m+1+\beta)^{q-2}\,2^{m-q+1}}{m!\,B(p-\alpha)(p-1-\alpha)\ldots(p-m+q-\alpha)}\,|b_{p-m}|,$$

ce qui montre qu'il est possible de déterminer un nombre fini R_p de sorte que

$$(\eta)\quad \left|\frac{a_p\left(\frac{x}{2}\right)^{2p}}{\Gamma(\mu+p+1)\,\Gamma(\nu+p+1)}\right| < \left|b_p\left(\frac{x}{2}\right)^{2p}\right| + \frac{(2p+\beta)\left|\frac{x^2}{4}\right|}{(p-\alpha)\,(p-1-\alpha)}\left|b_{p-1}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p-2}\right| + \frac{R_p}{(p-\alpha)\,(p-1-\alpha)}\quad S_1^p,$$

où l'on a posé

$$S_q^p = \sum_{n=q}^{n=p} \left| b_n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \right| .$$

Or, l'inégalité (η) nous donne sans peine

$$\sum_{p=n}^{p=n'} \left| \frac{a_p \left(\frac{x}{2}\right)^{2p}}{\Gamma(\mu+p+1)\,\Gamma(\nu+p+1)} \right| < S_n^{n'} + \frac{\beta+2n}{(n-\alpha)(n-1-\alpha)} S_{n-1}^{n'-1} + S_1^{n'} \sum_{p=n}^{p=n'} \frac{R_p}{(p-\alpha)(p-\alpha-1)},$$

ce qui montre que la série auxiliaire (β) a le même cercle de convergence que $\sum b_r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r}$. Ainsi nous avons démontré le théorème suivant:

Une série de puissances $\sum b_r x^{2r}$ qui est une fonction paire de x, peut être développée en série de la forme

$$(14) \qquad \sum_{r=0}^{r=\infty} b_r x^{2r} = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\mu-\nu} \sum_{s=0}^{s=\infty} a_s J^{\mu+s}(x) J^{\nu+s}(x),$$

où μ et ν désignent deux constantes quelconques, les négatifs entiers exclus. Ce développement et valable à l'intérieur du cercle de convergence de la série de puissances et les coefficients a_p sont déterminés par la formule

$$(15) \quad a_p = (\mu+\nu+2p) \sum_{m=0}^{m=p} \frac{\mu+\nu+2m+1}{(p-m)!} \mathrm{B}(\mu+m+1,\ \nu+m+1) \times \Gamma(\mu+\nu+p+m)\, 2^{2m} b_m.$$

Supposons par exemple $b_n = 1$, tandis que tous les autres coefficients b s'évanuissent, nous aurons

$$(16) \qquad \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+\nu+2n}}{\Gamma(\mu+n+1)\,\Gamma(\nu+n+1)} = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{\mu+\nu+2n+2p}{\mu+\nu+n+p} \binom{\mu+\nu+2n+p}{p} J^{\mu+n+p}(x) J^{\nu+n+p}(x),$$

formule qui nous sera bien utile plus bas.

§ 3.

Sur certains cas particuliers. Théorèmes de M. Ch. Neumann.

Il est évident que l'on peut déduire de notre formule générale (14) une foule d'autres plus particulières. Ce paragraphe est destiné à traiter les plus intéressants entre ces cas particuliers.

1° Posons à cet égard $\nu = -\mu$, nous aurons en vertu de (15)

$$a_0 = \frac{\pi\mu}{\sin \mu\pi} b_0, \tag{17a}$$

$$a_p = \frac{2p\mu\pi}{\sin \mu\pi}\left(\frac{b_0}{p} + \sum_{n=1}^{n=p} \frac{\binom{p+n}{p-n}}{p+n}(1^2-\mu^2)(2^2-\mu^2)\ldots(n^2-\mu^2)2^{2n} b_n\right), \tag{17b}$$

et nous avons le théorème suivant:

Une série de puissance $\sum b_r x^{2r}$ *qui est une fonction paire de* x, *peut être développée en série de la forme* $\sum a_n J^{n+\mu}(x) J^{n-\mu}(x)$, *où* μ *est une constante quelconque. Ce développement est valable à l'intérieur du cercle de convergence de la série de puissances, et les coefficients* a_n *sont déterminés à l'aide de* (17).

Posons $\mu = 0$, notre théorème donnera celui de M. Ch. Neumann*) sur les développement selon les carrés des fonctions cylindriques, tandisque $\mu = \frac{1}{2}$ donnera d'autres développements intéressants.

De (16) on tire dans notre cas particulier:

$$x^{2n} = \frac{2^{2n}\pi\mu(1^2-\mu^2)(2^2-\mu^2)\ldots(n^2-\mu^2)}{\sin \mu\pi} \sum_{p=n}^{p=\infty} \frac{2p}{p+n}\binom{p+n}{p-n} \times J^{p+\mu}(x) J^{p-\mu}(x), \quad n > 0; \tag{18}$$

pour $n = 0$ on aura au contraire

$$1 = \frac{\pi\mu}{\sin \pi\mu}\left(J^{\mu}(x) J^{-\mu} + 2\sum_{p=0}^{p=\infty} J^{p+\mu}(x) J^{p-\mu}(x)\right). \tag{19}$$

Prenons encore la fonction

$$\Pi^{\mu}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x \sin v) \cos \mu v \, dv,$$

de sorte que $\Pi^n(x)$ devient identique à $J^n(x)$, si n est un nombre pair.

*) Berichte über die Verh. der kgl. sächs. Gesellschaft d. Wissensch. 1869, p. 221—257; Mathematische Annalen, tome 3.

Ainsi $\Pi^{\mu}(x)$ est une intégrale de Bessel comme l'a appelée M. Lommel*). Pour la fonction $\Pi^{\mu}(x)$ Anger**) a donné le développement

$$\Pi^{\mu}(x) = \frac{\sin \mu\pi}{\mu\pi}\left(1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2^2-\mu^2)(4^2-\mu^2)\dots(4n^2-\mu^2)}\right).$$

Mettons maintenant 2μ au lieu de μ, nous aurons en vertu de (17)

$$a_p = 2\cos\mu\pi \sum_{n=0}^{n=p} (-1)^n \frac{p}{p+n}\binom{p+n}{2n} = 2C_p \cdot \cos\mu\pi.$$

Or, on démontrera sans peine la formule

$$C_{p+1} = C_p - C_{p-1},$$

ce qui donne

$$C_p = (-1)^m, \quad p = 3m; \quad C_p = \frac{(-1)^m}{2}, \quad p = 3m \pm 1,$$

et nous aurons le développement

$$(20) \quad \Pi^{2\mu}(x) = \cos\mu\pi \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \left(2J^{3n+\mu}(x)\,J^{3n-\mu}(x) + J^{3n+1+\mu}(x)\,J^{3n+1-\mu}(x) - J^{3n+2+\mu}(x)\,J^{3n+2-\mu}(x)\right).$$

Pour $\mu = 0$, (19) donnera une formule due à P.-A. Hansen***), et (20) le développement de $J^0(x)$.

Posons $\mu = \frac{1}{2}$, nous aurons, en vertu de (17), les formules

$$(21) \quad \cos 2x = \pi\left(J^{\frac{1}{2}}(x)J^{-\frac{1}{2}}(x) + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n 2n J^{n+\frac{1}{2}}(x)\,J^{n-\frac{1}{2}}(x)\right),$$

$$(22) \quad \frac{2x + \sin 2x}{2x} = \pi \sum_{n=0}^{n=\infty} J^{n+\frac{1}{2}}(x)\,J^{n-\frac{1}{2}}(x),$$

$$(23) \quad \frac{S_i(2x)}{2x} = \pi\left(J^{\frac{1}{2}}(x)J^{-\frac{1}{2}}(x) + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2n}{4n^2-1} J^{n+\frac{1}{2}}(x)\,J^{n-\frac{1}{2}}(x)\right),$$

où $S_i(x)$ désigne le sinus-intégral.

---

*) Mathematische Annalen, tome 16, p. 185.

**) Voir M. C. Wagner dans les Berner Mittheilungen, 1894, p. 245.

***) Voir M. Lommel: Studien über die Bessel'schen Functionen, p. 33.

2° Posons encore $\nu = 1 - \mu$, nous aurons

$$a_0 = \frac{\pi\mu(1-\mu)b_0}{\sin\mu\pi}, \tag{24a}$$

$$a_p = \frac{(2p+1)\pi\mu}{\sin\mu\pi}\left(\frac{1-\mu}{1}\cdot 2b_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\binom{p+n}{p-n}}{2n+1}(1^2-\mu^2)(2^2-\mu^2)\ldots(n^2-\mu^2)(n+1-\mu)2^{2n+1}b_n\right). \tag{24b}$$

On aura dans ce cas le théorème suivant:

Une série de puissances $\sum b_r x^{2r+1}$ *qui est une fonction impaire de* x, *peut être développée en série de la forme* $\sum a_n J^{n+\mu}(x)J^{n+1-\mu}(x)$, *où* μ *est une constante quelconque. Ce développement est valable à l'intérieur du cercle de convergence de la série de puissances, et les coefficients* a_n *sont déterminés à l'aide de* (24).

Posons $\mu = 0$, nous aurons un autre théorème de M. Ch. Neumann Pour $\mu = \frac{1}{2}$, notre théorème donnera le développement d'une fonction impaire selon les carrés de $J^{n+\frac{1}{2}}(x)$. Ainsi nous venons de donner la démonstration nécessaire du postulat de M. Lommel *).

De (16) on tire dans notre cas particulier

$$x^{2n+1} = \frac{2^{2n+1}\pi\mu(1^2-\mu^2)(2^2-\mu^2)\ldots(n^2-\mu^2)(n+1-\mu)}{\sin\mu\pi} \cdot \sum_{p=n}^{p=\infty}\frac{2p+1}{2n+1}\binom{p+n}{2n}J^{p+\mu}(x)J^{p+1-\mu}(x). \tag{25}$$

Pour l'autre intégrale de Bessel

$$\chi^{\mu}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(x\sin v)\sin\mu v\,dv$$

Anger a donné le développement

$$\chi^{1-2\mu}(x) = \frac{\sin 2\mu\pi}{2\mu\pi}\left(\frac{\frac{x}{2}}{1-\mu} + \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}}{(1^2-\mu^2)(2^2-\mu^2)\ldots(n^2-\mu^2)(n+1-\mu)}\right),$$

ce qui donne

$$\chi^{1-2\mu}(x) = \cos\mu\pi\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n\left(J^{3n+\mu}(x)J^{3n+1-\mu}(x) + 2J^{3n+1+\mu}(x)J^{3n+2-\mu}(x) + J^{3n+2+\mu}(x)J^{3n+3-\mu}(x)\right). \tag{26}$$

*) Mathematische Annalen, tome 2, p. 633.

Pour $\mu = 0$, (26) donnera le développement de $J^1(x)$.

Posons $\mu = \frac{1}{2}$, nous aurons, en vertu de (24), les formules que voici

$$\sin 2x = \pi \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n (2n+1) \left(J^{n+\frac{1}{2}}(x)\right)^2, \tag{27}$$

$$S_i(2x) = \pi \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(J^{n+\frac{1}{2}}(x)\right)^2, \tag{28}$$

dont la première est donnée par M. Lommel*).

§ 4.

Développement d'une série de puissances négatives.

Au paragraphe 2 nous avons donné le développement de $\left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+\nu+2n}$. Posons maintenant dans cette formule $n = 0$, nous aurons

$$\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+\nu}}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)} = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{\mu+\nu+2p}{\mu+\nu} \binom{\mu+\nu+p-1}{p} J^{\mu+p}(x) J^{\nu+p}(x).$$

Cela posé, mettons $\mu - n$ au lieu de μ et $-\mu - n$ au lieu de ν, n étant un positif entier, nous aurons après une réduction légère

$$\frac{1}{x^{2n}} = \frac{\left(\frac{\pi}{\sin \mu\pi}\right) 2^{-2n}}{\Gamma(n+\mu)\Gamma(n-\mu)} \sum_{p=0}^{p=n-1} (-1)^p \frac{2n-2p}{2n} \binom{2n}{p} \tag{29}$$
$$\times \left(J^{\mu+n-p}(x) J^{-\mu+n-p}(x) - J^{\mu-n+p}(x) J^{-\mu-n+p}(x)\right).$$

On aura de la même manière

$$\frac{1}{x^{2n+1}} = \frac{\left(\frac{\pi}{\sin \mu\pi}\right) 2^{-2n-1}}{\Gamma(\mu+n)\Gamma(-\mu+n+1)} \sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p \frac{2n-2p+1}{2n+1} \binom{2n+1}{p} \tag{30}$$
$$\times \left(J^{\mu+n-p}(x) J^{-\mu+n-p+1}(x) + J^{\mu-n+p-1}(x) J^{-\mu-n+p}(x)\right).$$

Ainsi nous avons donné le développement des puissances négatives de x. On voit que ces développements sont finis, tandis que les séries analogues obtenues pour les puissances positives sont infinies.

On peut regarder les formules (29), (30) comme une généralisation de la formule (4) de M. Lommel.

*) Mathematische Annalen, tome 2, p. 633.

En appliquant les expressions (29) ou (30) on aura pour les séries $\sum b_n x^{-2n}$ ou $\sum b_n x^{-2n-1}$ deux développements qui sont tous deux valables dans les domaines où les séries mêmes sont convergentes. En prenant pour point de départ l'inégalité (7) au paragraphe 2 on démontrera sans peine la vérité de notre assertion, de sorte que cette démonstration peut être supprimée.

De cette manière on aura le développement

$$(31)\quad \begin{cases} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{b_n}{x^{2n}} = \left(\frac{\pi}{\sin \mu\pi}\right)^2 \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \left(J^{n+\mu}(x) J^{n-\mu}(x) \right. \\ \qquad\qquad \left. - J^{-n+\mu}(x) J^{-n-\mu}(x)\right), \\ A_n = \sum_{p=0}^{p=\infty} (-1)^p \frac{2n}{2n+2p} \binom{2n+2p}{p} \frac{b_{n+p} \cdot 2^{-2n-2p}}{\Gamma(\mu+n+p)\Gamma(-\mu+n+p)}. \end{cases}$$

On aura en outre les formules analogues

$$(32)\quad \begin{cases} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{b_n}{x^{2n+1}} = \left(\frac{\pi}{\sin \mu\pi}\right)^2 \sum_{n=0}^{n=\infty} B_n \left(J^{\mu+n}(x) J^{-\mu+n+1}(x) \right. \\ \qquad\qquad \left. + J^{-\mu-n}(x) J^{\mu-n-1}(x)\right), \\ B_n = \sum_{p=0}^{p=\infty} (-1)^p \frac{2n+1}{2n+2p+1} \binom{2n+2p+1}{p} \frac{b_{n+p} \cdot 2^{-2n-2p-1}}{\Gamma(\mu+n+p)\Gamma(-\mu+n+p+1)}. \end{cases}$$

Dans ces développements μ est une constante quelconque *qui ne doit pas être égale à un nombre entier.*

Posons par exemple $\mu = \frac{1}{2}$, $b_s = \frac{\alpha^{2s+1}}{2s+1}$, (32) peut s'écrire

$$B_n = \frac{2n+1}{4} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{(-1)^p \binom{2n+2p+1}{p} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2n+2p+1}}{\Gamma\left(n+p+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n+p+\frac{3}{2}\right)} = \frac{2n+1}{4} \left(J^{n+\frac{1}{2}}(x)\right)^2,$$

et nous aurons finalement

$$(33)\quad \log \frac{x+\alpha}{x-\alpha} = \pi^2 \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{2n+1}{4} \left(J^{n+\frac{1}{2}}(\alpha)\right)^2 \left(\left(J^{n+\frac{1}{2}}(x)\right)^2 + \left(J^{-n-\frac{1}{2}}(x)\right)^2\right),$$

pourvu que $|x| > |\alpha|$.

§ 5.

Sur le produit $J^{\mu+p}(x) J^{\nu-p}(x)$. Séries de Schläfli.

Au paragraphe 1 nous avons démontré la formule générale

$$J^{\mu}(x) J^{\nu}(x) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(-1)^m \binom{\mu+\nu+2m}{m} \left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+\nu+2m}}{\Gamma(\mu+m+1)\Gamma(\nu+m+1)}.$$

Supposons maintenant que p soit un positif entier, nous aurons en appliquant la formule fondamentale de $\Gamma(\mu)$

$$(34) \qquad J^{\mu+p}(x)J^{\nu-p}(x)$$
$$= \sum_{m=0}^{m=\infty}(-1)^m\binom{\mu+\nu+2m}{m}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+\nu+2m}}{\Gamma(\mu+m+1)\Gamma(\nu+m+1)}$$
$$\cdot\frac{(\nu+m)(\nu+m-1)\dots(\nu+m-p+1)}{(\mu+m+1)(\mu+m+2)\dots(\mu+m+p)}.$$

Cela posé, désignons par $a_0, a_1, a_2, \dots$ des constantes quelconques, et supposons que la série

$$F(\mu,\nu) = a_0 + \sum_{s=1}^{s=\infty} a_s \frac{\nu(\nu-1)\dots(\nu-s+1)}{(\mu+1)(\mu+2)\dots(\mu+s)}$$

soit absolument convergente, pourvu que $R(\mu+\nu)$ soit plus grand que Ω, il viendra la formule

$$(35) \qquad \sum_{p=0}^{p=\infty} a_p J^{\mu+p}(x)J^{\nu-p}(x)$$
$$= \sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{(-1)^m\binom{\mu+\nu+2m}{m}\left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+\nu+2m}}{\Gamma(\mu+m+1)\Gamma(\nu+m+1)}F(\mu+m,\nu+m),$$

qui est vraie si $R(\mu+\nu)>\Omega$. La série qui figure au second membre, est absolument convergente à la même condition.

Prenons par exemple $a_s=(-1)^s$, et une formule bien connue qui est due à Stirling nous donne

$$F(\mu,\nu) = \frac{\mu}{\mu+\nu}, \quad R(\mu+\nu)>0,$$

d'où

$$(36) \qquad \sum_{p=0}^{p=\infty}(-1)^p J^{\mu+p}(x)J^{\nu-p}(x)$$
$$= \sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{(-1)^m\binom{\mu+\nu+2m}{m}\left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+\nu+2m}}{\Gamma(\mu+m+1)\Gamma(\nu+m+1)}\cdot\frac{\mu+m}{\mu+\nu+2m},$$

formule qui pour $\mu=\nu$ peut s'écrire

$$(37) \quad \frac{1}{2}\left(J^{\mu}(x)\right)^2 = \sum_{p=1}^{p=\infty}(-1)^{p-1}J^{\mu+p}(x)J^{\mu-p}(x), \quad R(\mu)>0.$$

La formule fondamentale nous donne en outre

$$(\alpha) \qquad J^{\mu+p}(x)J^{-p}(x) = \sum_{m=p}^{m=\infty} \frac{(-1)^m \binom{\mu+2m}{m-p}}{\Gamma(\mu+m+1)\Gamma(m+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+2m},$$

$$(\beta) \qquad J^{\mu-p}(x)J^{p}(x) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(-1)^m \binom{\mu+2m}{m}}{\Gamma(\mu+m+1)\Gamma(m+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+2m}.$$

En supposant ensuite $|a|<1$, nous aurons en vertu de (α), (β)

$$\sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} a^{-2p-\mu} J^{\mu+p}(x)J^{-p}(x) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+2m} a^{-\mu-2m}(1+a^2)^{\mu+2m}}{\Gamma(\mu+m+1)\Gamma(m+1)}.$$

Or, le second membre de cette équation n'est autre chose que $J^{\mu}\left(ax+\frac{x}{a}\right)$, donc nous aurons la formule

$$(38) \qquad J^{\mu}\left(ax+\frac{x}{a}\right) = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} a^{-2p-\mu} J^{\mu+\nu}(x)J^{-p}(x), \quad |a|<1.$$

Posons maintenant $xa=\alpha$, $\frac{x}{a}=\beta$, ce qui donne $x=\sqrt{\alpha\beta}$, $a=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$, et il viendra, en vertu de (38), la formule d'addition

$$(39) \quad J^{\mu}(\alpha+\beta) = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-p-\frac{\mu}{2}} J^{\mu+p}(\sqrt{\alpha\beta})J^{-p}(\sqrt{\alpha\beta}), \quad |\alpha|<|\beta|,$$

formule qui n'est pas identique à celles de Bessel*), de Schläfli**), et de M. Gegenbauer***).

Si μ est supposé égal au nombre positif entier n, la condition $|a|<1$ peut être supprimée, de sorte que dans ce cas (38) deviendra valable pour toutes le valeurs finies de a. En mettant $e^{i\Theta}$ au lieu de a on tire de (38) les séries de Schläfli†)

$$(40) \quad \begin{cases} J^{2r}(2x\cos\Theta) = \left(J^r(x)\right)^2 + 2\sum_{m=1}^{m=\infty} J^{r+m}(x)J^{r-m}(x)\cos 2m\Theta, \\ J^{2r+1}(2x\cos\Theta) = 2\sum_{m=0}^{m=\infty} J^{r+m+1}(x)J^{r-m}(x)\cos(2m+1)\Theta. \end{cases}$$

---

*) Voir M. C. Wagner dans les Berner Mittheilungen, 1894, p. 220.

**) Mathematische Annalen, tome 3, p. 137.

***) Sitzungsberichte der Wiener Academie, Bd. 70, math. naturw. Classe II, p. 14.

†) Mathematische Annalen, tome 3, p. 139.

Posons dans (38) $\frac{e^{i\Theta}}{i}$ au lieu de a ou, dans (40) $\frac{\pi}{2} - \Theta$ au lieu de Θ, nous aurons les développements analogues des fonctions $J^{2r}(2x \sin \Theta)$, $J^{2r+1}(2x \sin \Theta)$.

Ensuite en intégrant (40) de 0 à π, nous aurons

$$\int_0^{\pi} J^{2r}(2x \cos \Theta)\, d\Theta = \pi \left(J^r(x)\right)^2, \tag{41}$$

formule que M. Ch. Neumann a prise comme point de départ dans ses recherches sur les développements selon les carrés des fonctions $J^n(x)$. On aura de la même manière les formules intégrales trouvées par Schläfli.

Örslev, le 30 juillet 1898.

Ueber die Darstellung der symmetrischen und alternirenden Vertauschungsgruppen als Collineationsgruppen von möglichst geringer Dimensionenzahl.

Von

A. Wiman in Lund.

1. Das *Formenproblem einer endlichen Substitutionsgruppe,* welches in sich als speciellen Fall die Aufgabe der Auflösung der algebraischen Gleichungen enthält, verlangt die Bestimmung der Veränderlichen aus den Invarianten der Gruppe. Unter den Aufgaben mit isomorphen Gruppen hängt die zur *niedrigsten Dimension* gehörige ersichtlich von der geringsten Zahl von Parametern ab. Herr Klein bezeichnet dieselbe als ein *Normalproblem,* auf welches alle isomorphen Aufgaben reducirt werden sollen*). Hieraus erwächst insbesondere die Aufgabe, die algebraischen Gleichungen auf ihre bezüglichen Normalprobleme zurückzuführen. Die *allgemeine Gleichung* 5. *Grades* ist nun von Herrn Klein durch die *binäre Ikosaederirrationalität* gelöst**). Derselbe Verfasser hat auch gezeigt, wie die *Gleichungen* 6. *und* 7. *Grades auf quaternäre Formenprobleme* zurückführbar sind***); erst späterhin wurde eine *mit der alternirenden Gruppe von* 6 *Dingen isomorphe ternäre Collineationsgruppe* bekannt†). Betreffend die *allgemeinen Gleichungen, deren Gradzahl* > 7, gilt aber der Satz, dass eine solche Zurückführung auf niedrigere Formenprobleme nicht möglich ist, so dass dieselben *ihre eigenen Normalprobleme* bilden. Eine in diese Richtung

*) Man sehe Klein, „*Ueber die Auflösung gewisser Gleichungen vom siebenten und achten Grade*", Math. Ann. XV (1879) sowie „*Evanston Colloquium*", Lecture IX (1894). Vgl. auch Weber, „*Lehrbuch der Algebra*" II, p. 176 (1896).

**) Wir verweisen hier nur auf die zusammenfassende Darstellung von Klein, „*Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*" (1884).

***) Man sehe Klein, „*Zur Theorie der allgemeinen Gleichungen* 6. *und* 7. *Grades*", Math. Ann. XXVIII (1887).

†) Man sehe meine Schrift, „*Ueber eine einfache Gruppe von* 360 *ebenen Collineationen*", Math. Ann. 47 (1895).

gehende Vermuthung hatte zuerst Herr Klein ausgesprochen. Für $n = 8$ habe ich schon einen vollständigen Beweis des Satzes gegeben*), für höhere n aber bisher nur theilweise den Beweis skizzirt**). Erst hier wollen wir denselben völlig genau durchführen.

Nachdem man zwischen den Wurzeln einer allgemeinen Gleichung n^{ten} Grades die Identität

$$\sum_{i=1}^{i=n} x_i = 0$$

hergestellt hat, kann man dieselben als *überzählige homogene Coordinaten in einem* R_{n-2} auffassen. Die Vertauschungsgruppe der Wurzeln liefert also unmittelbar eine Collineationsgruppe dieses R_{n-2}. Wir wollen also beweisen, dass, *falls* $n > 7$, *in einem Raume von weniger als* $n-2$ *Dimensionen keine mit der symmetrischen oder alternirenden Gruppe von n Dingen holoedrisch isomorphe Collineationsgruppe existirt;* hierzu kommt noch, dass *in einem* R_{n-2} *durch die obigen Vertauschungsgruppen der* x_i *die einzigen mit denselben isomorphen Gruppen geliefert werden.* Letzterer Satz erleidet doch eine *Ausnahme für* $n = 9$, indem *in einem* R_7 *auch eine zweite mit der alternirenden Gruppe von 9 Dingen isomorphe Collineationsgruppe construirt werden kann.*

2. Ist n *Primzahl*, bleibt der Satz, dass die *die symmetrischen* $G_{n!}$ in einem Raume von weniger als $n-2$ Dimensionen als Collineationsgruppen nicht dargestellt werden können, *schon für gewisse Untergruppen* $G_{n(n-1)}$ gültig. Diese Untergruppen, von Kronecker als *metacyklisch* bezeichnet***), sind diejenigen, welche zu den allgemeinsten durch Radicale auflösbaren Gleichungen des bezüglichen Primzahlgrades gehören. Eine $G_{n(n-1)}$ der fraglichen Art besteht aus einer ausgezeichneten G_n und n cyklischen G_{n-1}, und dieselbe besitzt, einem beliebigen Theiler δ von $n-1$ entsprechend, eine ausgezeichnete $G_{n.\delta}$, in welcher statt der cyklischen G_{n-1} nur ihre Untergruppen G_δ auftreten†). Wir wollen den Satz beweisen, dass *für die Darstellung jeder solchen* $G_{n.\delta}$ *als Collineationsgruppe wenigstens ein Raum von* $\delta - 1$ *Dimensionen erforderlich ist.*

Nehmen wir also an, die $G_{n.\delta}$ existire etwa in einem R_m, wobei wir zunächst über m keine beschränkende Voraussetzung machen

*) „*Note über die Vertauschungsgruppen von acht Dingen*", Gött. Nachr. (1897).

**) „*Note über die symmetrischen und alternirenden Vertauschungsgruppen von n Dingen*", Gött. Nachr. (1897).

***) Nach Herrn Weber nennt man allgemeiner alle Gruppen metacyklich, deren Zerlegung auf lauter Primzahlindices führt, welche also zu „algebraisch auflösbaren" Gleichungen gehören.

†) Betreffend diese metacyklischen Gruppen verweisen wir übrigens auf Weber, *Lehrbuch der Algebra* I. Absch. 17, 18.

wollen. Nun ist es von vornherein klar, dass die $G_{n.\delta}$ das System der Punkte, welche bei der ausgezeichneten G_n fest bleiben, invariant lassen muss. Diese Punkte erfüllen eine gewisse Anzahl (höchstens n) von linearen Räumen. Wir behaupten, dass bei keiner Untergruppe $G_{\delta'}$ einer G_δ zwei oder mehr von jenen Räumen in sich übergehen können. Nehmen wir nämlich an, dies sei der Fall, so können wir den durch die betreffenden Räume vollständig bestimmten höheren linearen Raum in Betracht ziehen. Combiniren wir nun die $G_{\delta'}$ mit der G_n, so erhalten wir ersichtlich in dem letzteren Raume (und also auch in R_m) Collineationen, deren Periodenzahl n als Theiler enthält, und doch sollte man nach den Eigenschaften der in Rede stehenden Gruppen zu neuen $G_{\delta'}$ gelangen. *Jede G_δ muss also die zur G_n gehörigen Räume zu je δ cyklisch vertauschen und höchstens einen invariant lassen. Die niedrigste Dimensionenzahl, nämlich $\delta - 1$, erhält man also, wenn bei der G_n nur ein System von δ einzelnen Punkten fest bleibt.* Mithin sind für $\delta = n - 1$ $n - 2$ Dimensionen erforderlich.

Auf Grund dieser Eigenschaft ihrer metacyklischen Untergruppen $G_{n(n-1)}$ wissen wir also unter Anderem, dass die *symmetrischen* G_{51} *bez.* G_{71} *in keinem Raume von weniger als* 3 *bez.* 5 *Dimensionen construirt werden können.*

Als eine *Anwendung für* $\delta = \frac{n-1}{2}$ fügen wir hinzu, dass in der Theorie der elliptischen Modulfunctionen die den *Hauptcongruenzuntergruppen n^{ter} Stufe zugeordneten* $G_{\frac{n(n^2-1)}{2}}$ stets je $n + 1$ gleichberechtigte metacyklische Untergruppen $G_{\frac{n(n-1)}{2}}$ enthalten. Diese $G_{\frac{n(n^2-1)}{2}}$ können also *in einem Raume von weniger als* $\frac{n-3}{2}$ *Dimensionen nicht construirt werden. In einem* $R_{\frac{n-3}{2}}$ *gelingt aber ihre Darstellung;* Herr Klein hat nämlich ein System von $\frac{n-1}{2}$ *Modulformen* z_α abgeleitet, welche sich bei den bezüglichen $G_{\frac{n(n^2-1)}{2}}$ homogen linear substituiren*).

3. Wir wollen jetzt *für ein beliebiges* n das Problem betreffend *die Darstellung der symmetrischen* $G_{n!}$ *in einem Raume von möglichst geringer Dimensionenzahl* in Angriff nehmen.

Die Gruppe $G_{n!}$ kann stets durch das System von *Transpositionen:* $(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$, ... $(1,n)$ erzeugt werden. Denken wir uns nun die $G_{n!}$ in einem Raume R_m als Collineationsgruppe dargestellt, so

*) Man sehe Klein, „*Ueber die Auflösung gewisser Gleichungen vom 7. und 8. Grade*", Math. Ann XV (1879). Vgl. auch Klein-Fricke, „*Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen*" II, p. 312 (1892).

bieten sich von vornherein verschiedene Möglichkeiten dar. Diese wollen wir nach der Natur der den Transpositionen entsprechenden Collineationen ordnen. Bei einer solchen müssen ja die Punkte zweier Räume, etwa eines R_i und eines R_{m-i-1}, fest bleiben. Wir wählen $i \leqq m - i - 1$ und stellen *alle diejenigen Fälle als eine Classe zusammen, bei denen i denselben Werth besitzt.* Da wir schon wissen, dass die $G_{n!}$ stets in einem R_{n-2} dargestellt werden kann, so lassen wir die Fälle, bei denen $m > n - 2$, als hier ohne Interesse ausser Betracht. Es wird sich dann ergeben, dass unter dieser Beschränkung *nur die Fälle $i = 0$ und $i = 1$* symmetrische $G_{n!}$ liefern, und zwar nur *eine endliche Anzahl*, wenn man von den Vertauschungsgruppen der überzähligen Coordinaten $x_1, \ldots x_n$ im R_{n-2} absieht.

4. Es sei also zuerst $i = 0$, so dass *den Transpositionen centrische Perspectivitäten entsprechen.* Von den $n - 1$ erzeugenden Perspectivitäten: $(1, 2), (1, 3), (1, 4), \ldots (1, n)$ bestimmen μ beliebige eine $G_{\mu+1!}$. Es sei angenommen, dass man von den $n - 1$ zugehörigen Perspectivitätscentren kein System von m herauswählen kann, welche in einem Raume von weniger als $m - 1$ Dimensionen liegen; dagegen sei es möglich, deren $m + 1$ so zu wählen, dass dieselben in einem R_{m-1} enthalten sind*). Wir behaupten dann, dass alle $n - 1$ Centra in diesem R_{m-1} liegen müssen. Gesetzt nämlich, es sei das zu $(1, m+2)$ gehörige Centrum in dem durch die Centra von $(1, 2), (1, 3), \ldots (1, m+1)$ bestimmten R_{m-1} schon belegen; dann muss dieser R_{m-1} bei der Vertauschungsgruppe von $(m + 2, m + 3, \ldots n)$ invariant bleiben, und dabei das darin enthaltene Centrum von $(1, m + 2)$ mit denjenigen von $(1, m + 3), \ldots (1, n)$ vertauscht werden. Der fragliche R_{m-1} bleibt, wie leicht ersichtlich, bei jeder der erzeugenden Perspectivitäten und also auch bei der ganzen $G_{n!}$ invariant. Entweder wird also schon im R_{m-1} eine mit der $G_{n!}$ holoedrisch isomorphe Collineationsgruppe erzeugt, oder jeder Punkt von R_{m-1} bleibt bei einer ausgezeichneten Untergruppe fest. Letztere wäre, falls $n > 4$, entweder die $G_{n!}$ oder die alternirende $G_{\frac{n!}{2}}$; in beiden Fällen werden die Transpositionen und also auch ihre Centra in einander transformirt; bleibt also ein Centrum invariant, so müssen auch die übrigen dortselbst belegen sein; allein Perspectivitäten mit denselben Centren sind entweder identisch oder erzeugen keine endliche Gruppe. Bei einer $G_{4!}$ giebt es noch eine ausgezeichnete Vierergruppe; diese transformirt

*) Die folgenden Auseinandersetzungen haben keine Anwendung bei den Gruppen im R_4, weil nämlich hier *zwei* Centra bei den Perspectivitäten auftreten. Die Existenz einer $G_{4!}$, nämlich der Oktaedergruppe, im R_4 hat daher, wie wir finden werden, kein Analogon im Sinne dieser Nummer in den höheren Räumen.

die Transpositionen paarweise in einander, wie (1, 2) und (3, 4); wenn die Vierergruppe alle Punkte jenes R_{m-1} invariant liesse, so müssten mithin die Transpositionscentra paarweise zusammenfallen, was aber aus dem obigen Grunde nicht zulässig ist. *Man hat also schon im R_{m-1} eine Darstellung der $G_{n!}$*, wobei $m - 1 \leq n - 2$.

Unsere Aufgabe verlangt also zuerst *die Herstellung von $G_{n!}$ in einem R_{n-2}, ohne dass die Centra der $n - 1$ erzeugenden Perspectivitäten schon in einem niedrigeren Raume liegen;* dann kommt die Frage, ob man von solchen $G_{n!}$ zu $G_{n+1!}$ oder höheren symmetrischen Gruppen hinaufsteigen kann. Nehmen wir von jenen Centren je $n - 2$ heraus, so bestimmen diese je $n - 1$ R_{n-3}, welche bei eben so vielen Untergruppen $G_{n-1!}$ invariant bleiben. Das Schnittgebilde, welches μ von diesen R_{n-3} gemein haben, kann nicht vollständig auch einem $(\mu+1)^{\text{ten}}$ angehören; die ersteren enthalten ja alle dasjenige von den $n - 1$ Transpositionscentren, welches dem letzteren fehlt. Die Dimensionenzahl des gemeinschaftlichen Raumes fällt also um eine Einheit für jeden hinzutretenden R_{n-3}; es haben mithin alle $n - 1$ R_{n-3} keinen Schnittpunkt gemein. Hieraus folgt, dass man dem Coordinatensystem des R_{n-2} die $n - 1$ R_{n-3} zu Grunde legen kann. Es giebt aber noch einen n^{ten} gegenüber der $G_{n!}$ gleichberechtigten R_{n-3}, welcher zu der Permutationsgruppe von $(2, 3, \ldots n)$ gehört. Derselbe darf keine Coordinatenecke enthalten, denn es ist ja schon bewiesen, dass $n - 1$ von den n gleichberechtigten R_{n-3} keinen gemeinschaftlichen Schnittpunkt besitzen können. Wir können also nach einer leichten Transformation seine Gleichung auf die Gestalt

$$x_n = -\sum_{i=1}^{i=n} x_i = 0$$

bringen. Wir erhalten also *ein System überzähliger Coordinaten, welche der Identität*

$$\sum_{i=1}^{i=n} x_i = 0$$

genügen. Durch eine gegebene Permutation der n R_{n-3} wird eine Collineation völlig bestimmt. *Die $G_{n!}$ wird mithin als Vertauschungsgruppe der x_i erzeugt.* Wir sind also zu derselben Repräsentation der $G_{n!}$ gelangt, deren wir in der 1. Nummer Erwähnung gethan heben.

Es soll noch dargethan werden, dass *im R_{n-2} keine symmetrische $G_{n+1!}$* construirt werden kann, *welche die $G_{n!}$ als Untergruppe enthält.* Denken wir uns einstweilen, dass eine solche $G_{n+1!}$ existire. Innerhalb der $G_{n+1!}$ giebt es $\frac{n(n+1)}{2}$ Vertauschungsgruppen $G_{n-1!}$ von nur $n - 1$ Dingen, welche je eine von den $\frac{n(n+1)}{2}$ Transpositionen

stets in sich selbst transformiren. Den R_{n-3}, dessen alle Punkte bei einer Transposition fest bleiben, muss also die zugehörige $G_{n-1!}$ invariant lassen. Anderseits existirt bei einer $G_{n-1!}$ nur ein solcher R_{n-3}, nämlich derjenige, welcher durch die Centra der $n-2$ erzeugenden Transpositionen hindurchgeht; bei einer einzelnen Transposition bleiben ja nur die R_{n-3} durch das Centrum sammt demjenigen, welcher die festen Punkte enthält, invariant, und letzterer wird natürlich bei der $G_{n-1!}$ mit allen zu den $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Transpositionen gehörigen vertauscht.

Von den $\frac{n(n+1)}{2}$ R_{n-3} kennen wir schon n, nämlich $x_1=0,\ldots,x_n=0$; diese müssen bez. den Transpositionen $(1,n+1),\ldots(n,n+1)$ zugeordnet sein. Die anderen Transpositionen (i,k) kommen schon innerhalb der oben aufgestellten $G_{n!}$ vor; die Gleichungen $x_i-x_k=0$ definiren bez. die zugehörigen durch feste Punkte erfüllten R_{n-3} und liefern folglich die übrigen $\frac{n(n-1)}{2}$ von den bei $G_{n-1!}$ invarianten R_{n-3}.

Die $G_{n+1!}$ enthält noch n $G_{n!}$, welche den Zahlen $1,2,\ldots n$ zugeordnet sind. Weil $x_i-x_k=0$ $(i<k)$ bei der Vertauschungsgruppe von $(1,\ldots i-1,i+1,\ldots k-1,k+1,\ldots n+1)$ in sich übergeht, so wird ersichtlich die zur Zahl i gehörige $G_{n!}$ durch die Vertauschungen der n R_{n-3} $x_i=0$ und $x_i-x_l=0$ $\left(l\lesseqgtr i\right)$ erzeugt. Nun sollen wir aber von dieser $G_{n!}$ in genau derselben Weise wie von der ursprünglichen $G_{n!}$ auf die $G_{n+1!}$ geführt werden. Schreiben wir also:

$$y_i=-nx_i,\ y_k=x_i-x_k\quad(k=1,\ldots i-1,i+1,\ldots n),$$

so bewährt sich noch die Relation

$$\sum_{i=1}^{i=n}y_i=0.$$

Wenn nun die $G_{n!}$ wirklich existirte, so müssten ersichtlich $y_k=0$ und $y_k-y_l=0$ $(k,l=1,\ldots n)$ *dasselbe System von* R_{n-3} liefern wie $x_k=0$ und $x_k-x_l=0$. Dem ist aber nicht so, denn man erhält in dem obigen Beispiel $y_i-y_k=x_k-(n+1)x_i$, *Unsere Voraussetzung von der Existenz der* $G_{n+1!}$ *in einem* R_{n-2} *hat uns also auf einen Widerspruch geführt.*

Der obige Beweis hat aber, wie schon angedeutet, *keine Anwendung im* R_1, *weil hier bei den Transpositionen zwei einzelne feste Punkte, d. h. Centra auftreten.* Dass man *im* R_1 *zu einer* $G_{4!}$, *nämlich der Oktaedergruppe*, gelangen kann, beruht nun darauf, dass bei der Transposition $(3,4)$ die beiden Centra von $(1,2)$ mit einander vertauscht werden. Eine solche Vertauschbarkeit der beiden bei einer centrischen

Perspectivität in einem höheren Raume festbleibenden Gebilde ist offenbar unmöglich, da dieselben von ungleicher Dimension sind.

5. Wir ziehen jetzt den *zweiten Fall* in Betracht, wo *die bei einer Transposition*, etwa (1, 2), *festen Punkte einen* R_1 *und einen* R_{m-2} *erfüllen*. Diese Gebilde müssen bei der $G_{n-2|}$ der $n-2$ übrigen Dinge ein invariantes System bilden, und also für $m > 3$, wie wir zuerst annehmen wollen, jedes in sich übergeführt werden. Die Transpositionen (i, k), wo sowohl i als $k > 2$, sind mit (1, 2) vertauschbar; die zugehörigen R_1 müssen also bei (1, 2) in sich übergehen. Letzteres ist auf *zwei Weisen* möglich: entweder liegen die fraglichen R_1 in dem zu (1, 2) gehörigen R_{m-2}, oder dieselben treffen sowohl den R_1 als den R_{m-2} von (1, 2) in je einem Punkte.

Bei der ersten Möglichkeit betrachten wir das System von Transpositionen: (3, 1), (3, 2), (3, 4), ... (3, n). Von den zugehörigen R_1 liegen nach der Voraussetzung die $n-3$ letzteren in dem zu (1, 2 gehörigen R_{m-2}, nicht aber die beiden übrigen, denn dieselben müssen bei (1, 2) vertauscht werden. Durch eine gewisse Zahl von diesen R_1 wird ein linearer Raum völlig bestimmt. Liegt in diesem Raume ein einziger von den noch übrigen R_1, so müssen dieselben sich alle, auf Grund der Transitivitätseigenschaften der $G_{n|}$, dort befinden. So lange also letzteres nicht stattfindet, muss für jeden neu hinzutretenden R_1 die Dimensionenzahl des hindurchgehenden Raumes wenigstens um eine Einheit erhöht werden. Nun liegen die R_1 von (3, 1) und (3, 2) nicht in dem die $n-3$ übrigen enthaltenden R_{m-2}; die Dimensionenzahl des letzteren Raumes muss also mindestens $n-3$ sein, so dass $m-2 \geqq n-3$ und $m \geqq n-1$. Ja es muss sogar $m \geqq n$ sein, denn die beiden ersten R_1 bestimmen schon einen R_3, weil dieselben, wie wir sofort beweisen wollen, einander nicht treffen können. Es giebt nämlich nur zwei Möglichkeiten, nach welchen jede zwei der $n-1$ R_1 einander schneiden könnten: entweder müssten dieselben alle in einem R_2 liegen, dann aber würde dieser R_2 und mithin auch die R_1 von (3, 1) und (3, 2) im R_{m-2} enthalten sein; oder auch alle $n-1$ R_1 haben einen gemeinschaftlichen Punkt, und zwar im R_{m-2}; wenn aber die R_1 von (3, i) einander treffen, so muss dasselbe mit den R_1 von (1, i) und (2, i) der Fall sein; mithin müssen die R_1 von (3, 1) und (3, 2) den R_1 von (1, 2) schneiden; dieselben hätten also bei der Transposition (1, 2) zwei feste Punkte und könnten folglich dabei mit einander nicht vertauscht werden. Es ist also erwiesen, dass wir hier zu keiner Darstellung einer $G_{n|}$ in einem R_m, wo $m \leqq n-2$, gelangen können.

Nehmen wir also noch die zweite Möglichkeit in Betracht, dass nämlich die R_1 von (i, k), wo $i, k > 2$, den R_1 von (1, 2) schneiden. Nun ist letzterer R_1 bei einer $G_{n-2|}$ invariant; wenn $n > 6$, ist dies

nur möglich, falls jeder Punkt wenigstens bei der alternirenden $G_{\frac{n-2!}{2}}$ fest bleibt. Da letztere Gruppe die Transpositionen (i, k) in einander transformirt, müssen die in Rede stehenden R_1 einen gemeinschaftlichen Schnittpunkt auf dem R_1 von (1, 2) ausschneiden. Hier müssen sich aber, wie man leicht aus den Transitivitätseigenschaften der $G_{n!}$ erschliesst, sämmtliche zu Transpositionen gehörigen R_1 schneiden. Der fragliche Punkt bleibt bei der $G_{n!}$ invariant; die Geraden durch denselben bilden einen R_{n-1}, welcher ebenfalls die $G_{n!}$ erleiden soll; in diesem R_{n-1} entsprechen aber den Transpositionen centrische Perspectivitäten, so dass wir auf den Fall der vorigen Nummer zurückkommen. Ist aber $n = 6$, so kann zwar der R_1 die $G_{n-2!}$, d, h. eine Oktaedergruppe erleiden; bei derselben werden aber die Fixpunkte bei einer Transposition (3, 4) mit einander vertauscht, so dass dieselben nicht verschiedenartige Eigenschaften haben können, wie es mit den Schnittpunkten des R_1 mit den zur fraglichen Transposition gehörigen R_1 und R_{n-2} der Fall sein würde. Für $n = 6$ giebt es aber noch die Möglichkeit, dass jeder Punkt auf dem R_1 bei der ausgezeichneten Vierergruppe der $G_{n-2!}$ fest bleiben kann. In der That erhalten wir hier eine *Darstellung der* $G_{6!}$ *im* R_4, *aber dieselbe wie in der vorigen Nummer. Es beruht dies darauf, dass eine* $G_{6!}$ *auf zwei Weisen als Vertauschungsgruppe von* 6 *Dingen aufzufassen ist**). Geht man von dem einen System von 6 Dingen aus, so sind die zum anderen System gehörigen Transpositionen vom Typus (1, 2) (3, 4) (5, 6). Unsere Behauptung ist also erwiesen, wenn wir nur darlegen können, dass letzterer Operation eine centrische Perspectivität entspricht, weil wir dann auf die Voraussetzung der vorigen Nummer gekommen sind. Der Transposition (1, 2) sei die Collineation

$$(1, 2) \quad x_1' = x_1,\ x_2' = x_2,\ x_3' = -x_3,\ x_4' = -x_4,\ x_5' = -x_5$$

zugeordnet, so dass die festbleibenden Punkte den R_1 $x_3 = x_4 = x_5 = 0$ und den R_2 $x_1 = x_2 = 0$ erfüllen. Wir können ersichtlich für die zur (3, 4) gehörigen R_1 und R_2 $x_2 = x_4 = x_5 = 0$ bez. $x_1 = x_3 = 0$ wählen:

$$(3, 4) \quad x_1' = x_1,\ x_2' = -x_2,\ x_3' = x_3,\ x_4' = -x_4,\ x_5' = -x_5.$$

Nun müssen einerseits die R_1 von (3, 4) und (5, 6) dem R_1 von (1, 2) in demselben Punkte begegnen, weil jene beiden Transpositionen bei der Vierergruppe, welche jeden Punkt des letzteren R_1 invariant lässt, ineinander übergehen. Anderseits sollen (3, 4) und (5, 6) im R_2 $x_1 = x_2 = 0$ eine Vierergruppe erzeugen, und in einer Ebene muss eine solche aus 3 harmonischen Perspectivitäten bestehen, deren jede

*) Betreffend die zweite Art von Untergruppen einer $G_{6!}$ vom Index 6 vergleiche man etwa Weber, *Algebra* I, § 182.

Axe die Centra der beiden übrigen Perspectivitäten verbindet, denn nur so ist es möglich, dass die Transformationen einander invariant lassen; für Axe und Centrum von (3, 4) sind schon $x_3 = 0$ und $x_4 = x_5 = 0$ gewählt; wir bestimmen das Coordinatensystem endgültig, indem wir $x_4 = 0$ und $x_3 = x_5 = 0$ die Axe und das Centrum von (5, 6) darstellen lassen. Hieraus:

$$(5,6) \qquad x_1' = x_1,\ x_2' = -x_2,\ x_3' = -x_3,\ x_4' = x_4,\ x_5' = -x_5;$$

$$(1,2)(3,4)(5,6)\ x_1' = x_1,\ x_2' = x_2,\ x_3' = x_3,\ x_4' = x_4,\ x_5' = -x_5.$$

Da letztere Collineation eine centrische Perspectivität darstellt, sind wir auf den Fall der vorigen Nummer zurückgelangt*).

Betreffend *die* $G_{n!}$ *im* R_3 können wir uns hier kurz fassen, da Hr. Maschke soeben *alle quaternären Collineationsgruppen* $G_{n!}$ *und* $G_{\frac{n!}{2}}$ bestimmt hat. Von seinen Resultaten kommen hier, wo wir $n \geqq 5$ verlangen, *eine* $G_{6!}$ *und zwei* $G_{5!}$ in Betracht**). Die $G_{6!}$ war schon von Hrn. Klein aufgestellt, welcher ihre Existenz *aus der Liniengeometrie* erschlossen hatte***), und *die* $G_{5!}$ *werden aus den zweierlei Arten von Untergruppen der* $G_{6!}$ *erhalten. Die Ikosaederuntergruppe der einen* $G_{5!}$ *transformirt zwei Gerade und diejenige der anderen zwei* C_3 *in sich, und zwar beide Male in contragredienter Weise*†); bei den übrigen Operationen der $G_{5!}$ werden jene Geraden bez. C_3 vertauscht.

6. In den Fällen, wo $m - i - 1 > i > 1$, mag erstens der zu einer Transposition (k, l), wo $k, l > 2$, gehörige R_i sich ganz in dem R_{m-i-1} von (1, 2) sich befinden; dann ermittelt man aber in genau derselben Weise wie für $i = 1$ eine untere Grenze der Dimensionenzahl m, welche jedenfalls $> n - 2$ sein muss. Zweitens kann jener R_i von (k, l) mit dem R_i von (1, 2) einen R_{i_1} und mit dem R_{m-i-1} einen R_{i-i_1-1} gemein haben. Nun muss der R_i von (1, 2) bei der $G_{n-2!}$ von (3, 4, ..., n) in sich übergehen. *Entweder* muss also jeder Punkt von dem R_i bei der alternirenden $G_{\frac{n-2!}{n}}$, welche ersichtlich in den hier interessirenden Fällen einfach ist, fest bleiben, und dann beweist man wie für $i = 1$, dass jener R_{i_1} bei der ganzen $G_{n!}$ invariant bleiben muss; die $\infty^{m-i_1-1} R_{i_1+1}$, welche diesen R_{i_1} enthalten, bilden

*) Wegen der Herstellung einer $G_{6!}$ im R_4 verweisen wir übrigens auf Burkhardt, „*Hyperelliptische Modulfunctionen*“ II, Math. Ann. XXXVIII, p. 199.

**) Man sehe Maschke, „*Bestimmung aller ternären und quaternären Collineationsgruppen, welche mit symmetrischen und alternirenden Buchstabenvertauschungsgruppen holoedrisch isomorph sind*“, § 13. Math. Ann. LI.

***) Math. Ann. IV, p. 346; XXVIII, p. 519.

†) Betreffend die Bedeutung von Cogredienz und Contragredienz bei der Zuordnung zweier Reihen von Ikosaedersubstitutionen auf einander sehe man Klein, *Ikosaeder*, p. 232.

also einen R_{m-i_1-1}, in welchem schon die G_{n1} erzeugt wird, und in diesem R_{m-i_1-1} wird der Schluss, falls nöthig, in derselben Weise verfolgt. *Oder auch* wird die G_{n-21} wirklich in dem R_i erzeugt. Setzen wir $i = n - 2 - \varrho$, so ist einerseits nach der Voraussetzung

$$m > 2i + 1 = 2n - 3 - 2\varrho,$$

anderseits soll in den von uns zu betrachtenden Fällen $m \leqq n - 2$. Es muss also $n - 2 > 2n - 3 - 2\varrho$, oder $n < 2\varrho + 1$; aber es soll auch $i \geqq 2$, also $m > 5$ und $n > 7$, wofür $\varrho \geqq 4$ erforderlich ist. Nehmen wir jetzt an, R_m sei der niedrigste Raum, in welchem eine zu diesem Falle gehörende G_{n1}, wo $n \geqq m + 2$, erzeugt werden könnte; bei der Herstellung der G_{n-21} in dem R_i, wo $i = n - 2 - \varrho$ und $\varrho \geqq 4$, sollten also dann die bei einer Transposition festen Punkte zwei Räume von gleicher Dimension erfüllen; wir werden aber sofort finden, dass es keine Collineationsgruppen G_{n-21} von dieser Art giebt, und dass also der hier besprochene Fall auch keine G_{n1} in einem R_m mit $m \leqq n - 2$ liefert.

Es erübrigt nur noch die Fälle zu untersuchen, bei denen die zu einer Transposition (1, 2) gehörigen Räume von derselben Dimension sind, also $i = m - i - 1$, oder $m = 2i + 1$. Hier liegt zuerst die Möglichkeit vor, dass diese beiden R_i bei der (1, 2) zugeordneten G_{n-21} in sich selbst übergehen; dieselbe kommt aber hier, wo $n \geqq 2i + 3$ und $i \geqq 2$, ausser Betracht. Es sei nämlich angenommen für einen gewissen i-Werth erhalte man die erste diesbezügliche G_{n1}; die zugehörige G_{n-21} kann dann keine von unseren früher bekannten symmetrischen Gruppen sein, weil wir, wenn $m > 1$, keine G_{n1} in einem R_m gefunden haben, für welche $n \geqq 2m + 1$, was hier betreffend die G_{n-21} im R_i der Fall sein sollte; einer solchen Bedingung $n \geqq 2m + 1$ genügende symmetrische Gruppen wird aber auch der einzige noch zu erörternde Fall nicht liefern. Betrachten wir also näher diesen Fall, dass nämlich jene beiden zu (1, 2) gehörigen R_i bei der G_{n-21} vertauscht werden, und somit jeder in sich nur bei der alternirenden $G_{\frac{n-21}{2}}$ übergeht. Nun ergeben uns früher bekannte Resultate die $G_{\frac{81}{2}}$ bez. die $G_{\frac{71}{2}}$ als die höchsten alternirenden Gruppen im R_2 bez. R_3; auch wissen wir, dass im R_4 keine $G_{\frac{81}{2}}$ existirt. Allein für $i \geqq 4$ genügt es daran zu erinnern, dass die $G_{\frac{n-21}{2}}$ Untergruppen G_{n-41} enthält. Es sollte also zuerst die Construction der G_{n-41} im R_i, wo $n \geqq 2i + 3$, möglich sein. Dies ist aber in den R_i von $i = 4$ bis $i = 8$ nicht der Fall; denn in diesen Räumen wissen wir schon, dass ausser den Vertauschungsgruppen von je $i + 2$ R_{i-1} höchstens eine zweite G_{71} bez. G_{91} im R_5 bez. R_7 als G_{n1}, für welche $n \geqq i + 2$, zu-

reten können. Hieraus erschliesst man sofort, dass von $i = 2.4 + 1 = 9$ bis $i = 2.8 + 1 = 17$ es auch keine anderen $G_{n!}$ in einem R_i, für welche $i \leqq n - 2$, als jene Vertauschungsgruppen von je $i + 2$ R_{i-1} giebt, und in derselben Weise weiter aufwärts.

Aber auch jene $G_{7!}$ im R_5 und $G_{9!}$ im R_7 existiren nicht. Doch wollen wir betreffend die Unmöglichkeit der $G_{9!}$ den Beweis erst späterhin (Nr. 12) bei Gelegenheit der Construction einer zweiten $G_{\frac{9!}{2}}$ im R_7 erbringen. Versuchen wir hier also nur die $G_{7!}$ im R_5 zu construiren. Es sei:

(1, 2) $x_1' = x_1,\ x_2' = x_2,\ x_3' = x_3,\ x_4' = -x_4,\ x_5' = -x_5,\ x_6' = -x_6.$

Die beiden R_2 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ und $x_4 = x_5 = x_6 = 0$ sollen durch (3, 4) und also auch durch (1, 2) (3, 4) vertauscht werden. Die bei einer mit (1, 2) (3, 4) gleichberechtigten Operation festen Punkte müssen somit auch zwei R_2 erfüllen; denn, wenn $R_3 + R_1$ oder $R_4 + R_0$, hätten bei derselben auch Punkte auf jenen R_2 fest bleiben müssen. Die Operation (3, 4) (5, 6) soll die beiden zu (1, 2) gehörigen R_2 nicht vertauschen. Wir können also schreiben:

(3, 4) (5, 6) $x_1' = x_1,\ x_2' = x_2,\ x_3' = -x_3,\ x_4' = -x_4,$
$x_5' = -x_5,\ x_6' = x_6.$

Hieraus:

(1, 2) (3, 4) (5, 6) $x_1' = x_1,\ x_2' = x_2,\ x_3' = -x_3,\ x_4' = x_4,$
$x_5' = x_5,\ x_6' = -x_6.$

Bei einer mit (1, 2) (3, 4) (5, 6) gleichberechtigten Operation erfüllen also die festen Punkte einen R_1 und einen R_3. Nach endgültiger Fixirung des Coordinatensystems, so dass die Eckpunkte in $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ und $x_4 = x_5 = x_6 = 0$ bei der durch (3, 4) (5, 6) und (3, 5) (4, 6) erzeugten Vierergruppe invariant bleiben, ergiebt sich:

(3, 5) (4, 6) $x_1' = x_1,\ x_2' = -x_2,\ x_3' = x_3,\ x_4' = -x_4;$
$x_5' = x_5,\ x_6' = -x_6;$

(1, 2) (3, 5) (4, 6) $x_1' = x_1,\ x_2' = -x_2,\ x_3' = x_3,\ x_4' = x_4,$
$x_5' = -x_5,\ x_6' = x_6.$

Aus der Zusammensetzung von (1, 2) (3, 4) (5, 6) und (1, 2) (3, 5) (4, 6) würde man dann erhalten:

(3, 6) (4, 5) $x_1' = x_1,\ x_2' = -x_2,\ x_3' = -x_3,\ x_4' = x_4,\ x_5' = -x_5,$
$x_6' = -x_6,$

und zwar erfüllen dabei die festen Punkte den R_1 $x_2 = x_3 = x_5 = x_6 = 0$ und den R_3 $x_1 = x_4 = 0$, während anderseits, weil (3, 4) (5, 6) und (3, 6) (4, 5) innerhalb der $G_{7!}$ gleichberechtigt sind, die festen Punkte zwei R_2 erfüllen sollten. Der Versuch die $G_{7!}$ zu construiren führt also auf einen Widerspruch.

7. Unsere *Resultate betreffend die symmetrischen Gruppen* haben also ergeben, *dass in einem R_{n-3} nur zwei $G_{n!}$ als Collineationsgruppen darstellbar sind, nämlich die Oktaedergruppe oder $G_{4!}$ im R_1 und die $G_{6!}$ im R_3, und dass in einem R_{n-2} jede $G_{n!}$ auf blos eine Weise vorkommt, nämlich als Vertauschungsgruppe von n R_{n-3}; Ausnahme hiervon liefert nur die $G_{5!}$, welche im R_2, den beiden Systemen von Untergruppen der oben erwähnten $G_{6!}$ entsprechend, noch auf zwei Weisen auftritt.* Doch giebt es ganz gewiss *für alle $G_{n!}$ mit geradem n analoge Darstellungen mit der $G_{4!}$ im R_1 und der $G_{6!}$ im R_2*; nur wird *die Dimension höher* als in den hier in Betracht kommenden Fällen; übrigens werden wir am Ende unserer Arbeit noch einmal hierauf zurückkommen (Nr. 13).

8. Jetzt betrachten wir die *alternirenden* $G_{\frac{n!}{2}}$ und denken uns dieselben *durch ein System von Operationen*: (1, 2, 3), (1, 2, 4), ... (1, 2, n) *erzeugt.* Die bei (1, 2, 3) festbleibenden Punkte können *entweder zwei oder drei lineare Räume* erfüllen. Der Inbegriff dieser Räume muss *bei einer* $G_{3.\frac{n-3!}{2}}$ in sich übergehen, von welcher die Hälfte der Operationen durch Combination von (1, 2, 3) mit der geraden Vertauschungsgruppe von 4, 5, ... n entsteht; dabei müssen ersichtlich, falls letztere $G_{\frac{n-3!}{2}}$ einfach ist, also $n > 7$, die erwähnten Räume jeder in sich übergehen; wenn $n = 6, 7$ und jene Räume drei und von derselben Dimension sind, liegt aber auch die Möglichkeit vor, dass dieselben bei der $G_{3.\frac{n-3!}{2}}$ cyklisch vertauscht werden können. Bei der anderen Hälfte der Operationen erleiden sowohl 1, 2, 3 als 4, 5, ... n ungerade Vertauschungen, und zwar müssen die entsprechenden Collineationen zwei von den in Rede stehenden Räumen in einander überführen; man überzeugt sich in der That leicht, dass, falls hier jeder von jenen Räumen in sich überginge, eine Collineation von der Periode μ, wo μ nicht durch 3 theilbar, combinirt mit der Collineation (1, 2, 3), eine solche von der Periode 3μ ergeben würde, während doch anderseits die Structur der Vertauschungsgruppe $G_{3.\frac{n-3!}{2}}$ auch hier die Periode μ verlangt. *Es müssen also immer zwei Räume mit festen Punkten bei* (1, 2, 3) *die gleiche Dimension i haben,* um bei der zugehörigen $G_{3.\frac{n-3!}{2}}$ mit einander vertauschbar zu sein; *ein dritter Raum* mit festen Punkten kann entweder existiren oder nicht; wenn aber ein solcher vorkommt, muss derselbe bei der $G_{3.\frac{n-3!}{2}}$ *invariant* bleiben, *ausgenommen wenn auch seine Dimensionenzahl $= i$ und $n = 6, 7$,* wo nämlich noch die Möglichkeit, dass jene drei R_i bei der $G_{3.\frac{n-3!}{2}}$ alle möglichen Vertauschungen erleiden, zu untersuchen ist. *Die Dimension i* wählen wir als *Grund bei der folgenden Classeneintheilung.*

9. Bei der ersten Classe soll also *die Operation* (1, 2, 3) *zwei*

einzelne Punkte oder R_0 fest lassen; ist der Raum R_m kein eindimensionaler, bleiben noch *die Punkte eines R_{m-2} invariant.* Nun bleibt ersichtlich bei (1, 2, 3) jeder lineare Raum invariant, welcher die Verbindungsgerade der festen R_0 enthält. Betrachten wir jetzt die Transformationen (1, 2, 3) *und* (1, 2, 4), so sind *drei Fälle* denkbar: *die Verbindungsgeraden der zugehörigen R_0 können entweder zusammenfallen, oder dieselben schneiden einander, oder endlich dieselben sind zu einander windschief.* Der durch die fraglichen Geraden bestimmte R_1 *bez.* R_2 *oder* R_3 *bleibt bei der durch* (1, 2, 3) *und* (1, 2, 4) *erzeugten alternirenden* $G_{\frac{n!}{2}}$ *invariant.*

Im ersten Falle muss aber jener R_1 bei der ganzen $G_{\frac{n!}{2}}$ invariant bleiben, denn derselbe muss die zu einer beliebigen erzeugenden Operation (1, 2, n) gehörigen R_0 enthalten; durch die Transformation (1, 2) (4, n) wechseln nämlich die R_0 von (1, 2, 3) Platz, und diejenigen von (1, 2, 4) werden mit denjenigen von (1, 2, n) vertauscht. Es handelt sich also hier nur um *die auf einer Geraden erzeugten* $G_{\frac{n!}{2}}$, und wir können sofort die Resultate aufschreiben, dass ausser der $G_{\frac{3!}{2}}$ oder der cyklischen G_3 hier noch bekanntlich *die Tetraedergruppe oder* $G_{\frac{4!}{2}}$ *und die Ikosaedergruppe oder* $G_{\frac{5!}{2}}$ existiren.

In gleicher Weise bleibt *im dritten Falle der R_3 bei der ganzen* $G_{\frac{n!}{2}}$ *invariant.* Die Operationen (1, 2, 3) und (1, 4, 5) erzeugen nämlich einerseits die alternirende $G_{\frac{5!}{2}}$ von 1, 2, 3, 4, 5, anderseits müssen dieselben den durch die zugehörigen beiden R_0-Paare bestimmten Raum invariant lassen. Dieser Raum muss aber auf Grund der Transitivitätseigenschaften der $G_{\frac{5!}{2}}$ auch die zu (1, 2, 4) und (1, 2, 5) gehörigen R_0-Paare enthalten. Der Raum ist also in dem hier zu betrachtenden Falle jener durch (1, 2, 3) und (1, 2, 4) bestimmte R_3. Da man nun statt 5 eine beliebige Zahl n hätte nehmen können, so folgt, dass der fragliche R_3 die zu jeder Operation (1, 2, n) gehörigen R_0 enthalten und mithin bei der ganzen $G_{\frac{n!}{2}}$ invariant bleiben muss. Es gilt also nur *die zu diesem Falle gehörigen* $G_{\frac{n!}{2}}$ *im* R_3 zu finden. Nach den Resultaten von Hrn. Maschke kommen für uns hier *eine* $G_{\frac{6!}{2}}$ *und eine* $G_{\frac{5!}{2}}$ in Betracht*), welche als Untergruppen innerhalb der früher

*) Man sehe Maschke, l. c. § 10, 11. Eine zweite $G_{\frac{5!}{2}}$ im R_3, welche zu diesem Falle gehören sollte, lässt schon einen R_2 invariant.

(Nr. 5) erwähnten symmetrischen Gruppen enthalten sind. Die $G_{\frac{51}{2}}$ wird aus der binären Ikosaedergruppe erhalten, indem man substituirt:

$$x_1 = z_1^5,\ x_2 = z_1^2 z_2,\ x_3 = z_1 z_2^2,\ x_4 = z_2^5;$$

bei derselben bleibt nicht nur die durch die obige Substitution mit dem Parameter $z_1 : z_2$ definirte C_5 invariant, sondern auch eine zweite, deren Parameter sich aber contragredient substituirt.

Der zweite Fall giebt uns nur die alternirenden Vertauschungsgruppen von n R_{n-3} in einem R_{n-2} mit der Ausnahme, dass wir im R_2 zu noch höheren Gruppen gelangen, nämlich der $G_{\frac{51}{2}}$ und der $G_{\frac{61}{2}}$. Dass der R_2 hier eine Ausnahmerolle spielt, ist schon von vornherein zu erwarten, weil, falls $n > 4$, die Bedingung, dass die Verbindungsgeraden der zu jedem Paare $(1, 2, k)$ und $(1, 2, l)$, wo $k, l \leqq n$, gehörigen R_0 einander treffen, auf zwei Weisen erfüllt werden kann: entweder gehen die fraglichen Geraden alle *durch einen Punkt*, oder dieselben liegen alle *in einem* R_2, welcher dann bei der ganzen $G_{\frac{n!}{2}}$ invariant bleiben muss. Es sei nun der Raum, in welchem die $G_{\frac{n!}{2}}$ dargestellt wird, ein R_m. Bei der Operation $(1, 2, 3)$ bleiben zwei einzelne R_{m-1} invariant, welche den R_{m-2} der festen Punkte und je einen von den festen R_0 enthalten, dann aber auch jeder R_{m-1}, welcher die Verbindungsgerade der beiden R_0 enthält; also für $m = 2$ drei einzelne R_1. Von den beiden ersteren R_{m-1} kann keiner bei einer Operation $(1, 2, 4)$ invariant bleiben; dies würde übrigens, wie man in gewohnter Weise schliesst, die Invarianz desselben bei der ganzen $G_{\frac{n!}{2}}$ bedingen, so dass man, falls die Sache nicht schon aus anderen Gründen unmöglich wäre, die Gruppe schon in einem R_{m-1} hätte betrachten können. Bei $(1, 2, 3)$ und $(1, 2, 4)$ bleiben also nur diejenigen R_{m-1} invariant, welche den durch die Verbindungsgeraden der zugehörigen R_0-Paare bestimmten R_2 enthalten. Der entsprechende Satz gilt für eine Reihe von $\mu - 2$ erzeugenden Operationen: $(1, 2, 3)$, $(1, 2, 4)$, $\ldots$ $(1, 2, \mu)$; dabei ist noch zu beachten, dass, falls die $G_{\frac{n!}{2}}$ nicht schon einem niedrigeren Raume angehören soll, die Dimension des durch die R_0-Paare bestimmten Raumes für jede hinzutretende Operation um eine Einheit wachsen muss, bis man den Raum R_m selbst erhält, wozu m Operationen erforderlich sind, welche eine $G_{\frac{m+2!}{2}}$ definiren, bei deren Untergruppen $G_{\frac{m+1!}{2}}$ für $m > 2$ je ein einzelner R_{m-1} invariant bleibt, für $m = 2$ aber deren drei. Die $G_{\frac{m+2!}{2}}$ im R_m wird also durch die

alternirende Vertauschungsgruppe jener $m+2$ R_{m-1} erzeugt, was betreffend *die* $G_{\frac{4!}{2}}$ *im* R_2 *auf drei verschiedene Weisen* geschieht. Gerade wie in dem entsprechenden symmetrischen Falle (Nr. 4) können wir diese R_{m-1} dem Coordinatensystem zu Grunde legen und erhalten dann ein System überzähliger Coordinaten, welche der Bedingung

$$\sum_1^n x_i = 0$$

genügen, wo $n = m+2$. Nun ist die Frage, ob wir vielleicht im R_{n-2} noch eine $G_{\frac{n+1!}{2}}$ construiren können, welche die obige $G_{\frac{n!}{2}}$ als Untergruppe enthält. Eine solche $G_{\frac{n+1!}{2}}$ hat $\frac{n(n+1)}{2}$ Untergruppen $G_{\frac{n-1!}{2}}$, denen eben so viele R_{n-3} entsprechen sollen. Von diesen R_{n-3} sind n bekannt, nämlich $x_1 = 0, \ldots x_n = 0$. Von den anderen R_{n-3} muss einer bei der Vertauschungsgruppe von $x_3, \ldots x_n$ invariant bleiben, wenn nur bei den ungeraden Vertauschungen auch x_1 und x_2 permutirt werden, und die anderen müssen entsprechende Bedingungen erfüllen. Bei der geraden Vertauschungsgruppe von $x_3, \ldots x_n$, wo $n > 4$, bleibt nun nach den obigen Entwickelungen jeder R_{n-3} des Büschels $x_1 + ax_2 = 0$ invariant, sowie für $n = 5$ noch zwei einzelne R_{n-3}, nämlich $x_3 + jx_4 + j^2x_5 = 0$ und $x_3 + j^2x_4 + jx_5 = 0$, wo $j = e^{\frac{2\pi i}{3}}$; von diesen bleiben aber bei den noch übrigen Permutationen zwei einzelne R_{n-3} invariant, nämlich $x_1 - x_2 = 0$ und $x_1 + x_2 = 0$. Dass aber die übrigen $\frac{n(n-1)}{2}$ R_{n-3} nicht durch die Gleichungen $x_i - x_k = 0$ geliefert werden können, beweist man ganz wie in der 4. Nummer. In derselben Weise kann man auch die Möglichkeit durch $x_i + x_k = 0$ beseitigen. Ein anderes Coordinatensystem, von welchem man ausgehen könnte, wäre dann:

$$y_1 = -(n-2)x_1, \quad y_k = x_1 + x_k, \qquad (k = 2, 3, \ldots n)$$

wobei

$$\sum_1^n y_i = \sum_1^n x_i = 0.$$

Allein das System $y_i = 0$ und $y_i + y_k = 0$ fällt mit dem System $x_i = 0$ und $x_i + x_k = 0$ $(i, k = 1, \ldots n)$ nicht zusammen; man hat ja $y_1 + y_k = (3-n)x_1 + x_k$. Hiermit ist bewiesen, dass man *von der Vertauschungsgruppe* $G_{\frac{n!}{2}}$ *von* $n R_{n-3}$ *in einem* R_{n-2} *zu keiner* $G_{\frac{n+1!}{2}}$ *hinaufsteigen kann, es sei denn, dass* $n < 5$.

Der obige Beweisgang ist aus vielen Gründen *im* R_2 nicht anwendbar; für die $G_{\frac{61}{2}}$ hat man ja hier nicht ein einzelnes Coordinatensystem der x_i, sondern drei verschiedene. Doch brauchen wir uns hier nicht länger aufzuhalten, da die *Erweiterung der* $G_{\frac{61}{2}}$ *im* R_2 *auf die* $G_{\frac{51}{2}}$ *und die* $G_{\frac{61}{2}}$ schon bekannt ist. Die $G_{\frac{51}{2}}$ oder die ternäre Ikosaedergruppe wird übrigens aus der binären Ikosaedergruppe durch die Substitution

$$x_1 = s_1^2, \quad x_2 = s_1 s_2, \quad x_3 = s_2^2$$

erhalten. Betreffend die $G_{\frac{61}{2}}$ sei hier nur auf die Eigenschaft aufmerksam gemacht, dass die Operation (4, 5, 6) die drei bei (1, 2, 3) festen R_0 cyklisch vertauscht; wir hatten ja auch der Möglichkeit ähnlicher Fälle in Nr. 8 Erwähnung gethan.

10. Wir nehmen jetzt den *zweiten Fall* in Angriff; derselbe wird dadurch charakterisirt, dass *bei* (1, 2, 3) *die Punkte zweier* R_1 *und*, falls die Dimension $m > 3$, *eines* R_{m-4} *fest bleiben*. Betreffend *das gegenseitige Verhältniss der Operationen* (1, 2, 3) *und* (4, 5, 6) sind hier von vornherein verschiedene Fälle möglich. Es können *erstens* die beiden R_1 von (4, 5, 6) sich ganz in dem R_{m-4} von (1, 2, 3) befinden. In diesem Falle handelt es sich aber um weit grössere Dimensionenzahlen m als diejenigen, welche hier, wo $m \leqq n-2$, in Betracht zu nehmen sind. Dies beweist man in genau derselben Weise wie im entsprechenden Falle der Nr. 5, indem man das System der Operationen (4, 5, 6), (4, 5, 7), ... (4, 5, n), (4, 5, 3), (4, 5, 2), (4, 5, 1) und die durch die zugehörigen R_1-Paare bestimmten Räume betrachtet. Die R_1-Paare von diesen $n-2$ Operationen müssen hinreichen, um den ganzen R_m zu bestimmen, denn sonst würde die $G_{\frac{n!}{2}}$ in einem niedrigeren Raume existiren, von welchem man dann ausgehen könnte; diejenigen der $n-5$ ersteren Operationen sollen im R_{m-4} von (1, 2, 3) liegen; durch die drei letzteren wird also die Dimension des betreffenden Raumes mindestens um 4 erhöht; nun ist es ersichtlich, dass eine nachfolgende Operation die Dimensionenzahl höchstens um eben so viele Einheiten erhöhen kann als die vorangehende; im günstigsten Falle stellt sich also die Sache folgendermassen: (4, 5, 6) giebt schon 3 Dimensionen, jede von (4, 5, 7), ... (4, 5, n), (4, 5, 3) deren zwei und (4, 5, 2), (4, 5, 1) zusammen zwei, so dass $m \geqq 3 + 2(n-5) + 2 = 2n - 5$, also $> n-2$.

Wenn wir von einem etwaigen Falle im R_5 absehen, in welchem drei zu (4, 5, 6) gehörigen R_1 sich bei (1, 2, 3) cyklisch vertauschen, so muss jeder R_1 von (4, 5, 6) bei (1, 2, 3) in sich übergehen. Dies kann

zweitens dadurch geschehen, dass ein R_1 von (1, 2, 3) einen R_1 von (4, 5, 6) trifft. Da, *wenn* $n > 7$, die Operation (1, 2) (7, 8) die beiden R_1 von (1, 2, 3), und (4, 5) (7, 8) diejenigen von (4, 5, 6) vertauscht (nach Nr. 8), so müssen also beide R_1 von (4, 5, 6) beiden R_1 von (1, 2, 3) begegnen, und in gleicher Weise muss es sich mit den R_1-Paaren von (4, 5, 7) und (1, 2, 3) verhalten. Alle drei R_1-Paare bestimmen also denselben R_3; wenn aber die R_1 von (4, 5, 7) schon in dem durch das zu (4, 5, 6) gehörige R_1-Paar bestimmten R_3 liegen, so muss dasselbe für jede Operation (4, 5, i) gelten, und somit *jener* R_3 *bei der ganzen* $G_{\frac{n!}{2}}$ *invariant* bleiben. *Die alternirenden Gruppen im* R_3, welche unter dieser Nummer rubriciren, *sind* aber *im Wesentlichen durch die* $G_{\frac{7!}{2}}$ *und eine* $G_{\frac{6!}{2}}$ *erschöpft**), welche letztere indess schon in der vorigen Nummer unter Zugrundelegung eines anderen Systems von Ikosaedergruppen gegeben wurde.

Es bleiben noch übrig *Erörterungen betreffend die Existenz der* $G_{\frac{6!}{2}}$ *im* R_4 *und der* $G_{\frac{7!}{2}}$ *im* R_5. Im R_4 soll bei (1, 2, 3) ausser den Punkten zweier R_1 noch ein einzelner Punkt R_0 fest bleiben, und in gleicher Weise bei (4, 5, 6). Da nun der R_0 von (4, 5, 6) sowohl bei (1, 2, 3) als bei (1, 2) (4, 5) invariant bleiben soll, und die letztere Operation die beiden R_1 von (1, 2, 3) vertauscht, so müssen die zu (1, 2, 3) und (4, 5, 6) gehörigen R_0 zusammenfallen; es folgt, dass jeder R_1 von (4, 5, 6) jeden R_1 von (1, 2, 3) schneiden muss, damit dieselben bei der bez. Operation jeder in sich übergeführt werden können. Schreiben wir also:

$$(1,2,3)\ x_1' = jx_1,\ x_2' = jx_2,\ x_3' = j^2x_3,\ x_4' = j^2x_4,\ x_5' = x_5;\quad \left(j = e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)$$
$$(4,5,6)\ x_1' = jx_1,\ x_2' = j^2x_2,\ x_3' = jx_3,\ x_4' = j^2x_4,\ x_5' = x_5,$$

so ergiebt sich unmittelbar:

$$(1,2,3)(4,5,6)\ x_1' = j^2x_1,\ x_2' = x_2,\ x_3' = x_3,\ x_4' = jx_4,\ x_5' = x_5.$$

Bei (1, 2, 3) (4, 5, 6) bleiben also zwei einzelne R_0 und die Punkte eines R_2 invariant. Geht man nun von dem anderen Systeme von Ikosaederuntergruppen der $G_{\frac{6!}{2}}$ aus, so werden die Rollen von (1, 2, 3) und (1, 2, 3) (4, 5, 6) vertauscht. Hieraus erschliesst man, dass man

*) Man sehe Maschke, l. c. §§ 10, 11, 12. Es wären *noch zwei Ikosaedergruppen im* R_3 zu erwähnen; dieselben lassen aber schon Räume niedrigerer Dimension nämlich R_1 invariant, indem die eine zwei windschiefe R_1 in contragredienter Weise transformirt, die andere auf jeder Erzeugenden des einen Systems einer Fläche zweiten Grades eine binäre Ikosaedergruppe erzeugt, bei welcher diejenigen des anderen Systems unter sich vertauscht werden.

hier bloss zu der in der vorigen Nummer schon erhaltenen $G_{\frac{6!}{2}}$ im R_4 gelangen kann, nämlich *der alternirenden Vertauschungsgruppe von* $6R_3$. Es ist unmöglich von der $G_{\frac{6!}{2}}$ zu einer $G_{\frac{7!}{2}}$ hinaufzusteigen; denn zu den Operationen (4, 5, 6) und (4, 5, 7) und mithin zu jeder Operation (4, 5, i) sollte derselbe R_0, nämlich derjenige von (1, 2, 3) gehören. Der fragliche R_0 sollte also bei der ganzen $G_{\frac{7!}{2}}$ in sich übergehen; dies ist aber unmöglich, weil schon gegenüber der $G_{\frac{6!}{2}}$ kein invarianter Punkt existirt.

Betreffend *die* $G_{\frac{7!}{2}}$ *im* R_5, so ist die Möglichkeit, dass ein zu (1, 2, 3) mit einem zu (4, 5, 6) gehörigen R_1 zusammenfällt, und die übrigen ein windschiefes Viereck bilden, schon durch die vorigen Erörterungen erledigt, indem der diesen Viereck enthaltende R_2 invariant sein sollte. Ein anderer denkbarer Fall wäre, dass jeder R_1 von (4, 5, 6) mit einem anderen zu (1, 2, 3) gehörigen R_1-Paar Schnittpunkte gemein hätte. Wir können dann schreiben:

(1,2,3) $x_1' = x_1,\ x_2' = x_2,\ x_3' = jx_3,\ x_4' = jx_4,\ x_5' = j^2x_5,\ x_6' = j^2x_6;$

(4,5,6) $x_1' = x_1,\ x_2' = jx_2,\ x_3' = x_3,\ x_4' = j^2x_4,\ x_5' = jx_5,\ x_6' = j^2x_6.$

Hieraus:

(1.2,3)(4,5,6) $x_1' = x_1,\ x_2' = jx_2,\ x_3' = jx_3,\ x_4' = x_4,\ x_5' = x_5,\ x_6' = jx_6;$

(1,2,3)(4,6,5) $x_1' = x_1,\ x_2' = j^2x_2,\ x_3' = jx_3,\ x_4' = j^2x_4,\ x_5' = jx_5,\ x_6' = x_6.$

Die letzteren beiden Operationen erzeugen zwei innerhalb der $G_{\frac{7!}{2}}$ gleichberechtigte G_3 und sollen darum auch in geometrischer Hinsicht äquivalent sein. Weil aber bei (1, 2, 3) (4, 5, 6) die festen Punkte zwei R_2 und bei (1, 2, 3) (4, 6, 5) drei R_1 erfüllen, so muss ein Widerspruch in unserer Voraussetzung betreffend das Verhältniss von (1,2,3) und (4, 5, 6) zu einander enthalten sein.

Es ist noch eine *dritte Möglichkeit* übrig, dass nämlich bei (4, 5, 6) die drei zu (1, 2, 3) gehörigen R_1 cyklisch vertauscht werden. Dieser Fall lässt sich aber leicht beseitigen. Innerhalb der Vertauschungsgruppe von 4, 5, 6, 7 giebt es eine ausgezeichnete Vierergruppe, welche jeden der drei erwähnten R_1 in sich überführen muss. Dies kann auf zwei Weisen geschehen. Es kann erstens die Operation (4, 5) (6, 7) auf jedem der drei R_1 nur zwei Punkte fest lassen; dann überzeugt man sich aber leicht, dass die Zusammensetzung der den Operationen (4, 5, 6) und (4, 5) (6, 7) entsprechenden Collineationen eine Collineation von mindestens der Periode 6 (statt 3, wie es sein sollte) ergeben würde. Zweitens können die bei (4, 5) (6, 7) festen Punkte den einen

zu (1, 2, 3) gehörigen R_1 isolirt und den durch die beiden übrigen bestimmten R_3 erfüllen. Nun bleiben bei sowohl (1, 2, 3) als (4, 5, 6) nur ∞^1 R_2 invariant, nämlich diejenigen, welche je drei sich bei (4, 5, 6) cyklisch vertauschenden Punkte auf den zu (1, 2, 3) gehörigen R_1 enthalten. Aus der Beschaffenheit von (4, 5) (6, 7) folgt nun, dass jeder von diesen $\infty^1 R_2$ bei einer G_{36} in sich übergehen muss, welche durch Combination von (1, 2, 3) mit der geraden Vertauschungsgruppe von 4, 5, 6 und 7 entsteht. Weil aber die Operationen (1, 2, 3) und (4, 5, 6) innerhalb der $G_{\frac{7!}{2}}$ gleichberechtigt sind, müssen dieselben $\infty^1 R_2$ auch bei einer anderen G_{36} jeder in sich übergehen, welche durch Combination von (4, 5, 6) mit der geraden Vertauschungsgruppe von 1, 2, 3 und 7 erzeugt wird. Weil jene beiden G_{36} nur in der $G_{\frac{7!}{2}}$ und in keiner niedrigeren Gruppe als Untergruppen enthalten sind, so folgt, dass jeder der fraglichen R_2 bei der ganzen $G_{\frac{7!}{2}}$ invariant bleiben sollte. Wir sind also auch hier auf Ungereimtheiten geführt worden.

II. In den noch zu besprechenden Fällen erfüllen die bei einer Operation (1,2,3) festen Punkte *zwei* R_i, *wo* $i > 1$, und, *falls* $m > 2i+1$, *einen* R_{m-2i-2}. Nun soll letzterer Raum bei einer $G_{3.\frac{n-3!}{2}}$ in sich übergehen, welche durch die Permutationen von 1, 2, 3 einerseits, 4, 5, ... n anderseits entsteht. Ausgezeichnete Untergruppe dieser $G_{3.\frac{n-3!}{2}}$ ist die durch (1, 2, 3) erzeugte G_3, und die complementäre Gruppe ist eine symmetrische $G_{\frac{n-3!}{2}}$. Im R_{m-2i-2} kann aber (nach Nr. 7) für $m \leqq n-2$ keine $G_{\frac{n-3!}{2}}$ construirt werden. Jeder Punkt des fraglichen Raumes sollte also wenigstens bei der $G_{\frac{n-3!}{2}}$ in sich übergehen, da in den hier zu betrachtenden Fällen ausser der Identität keine niedrigere ausgezeichnete Untergruppe vorkommt. Hieraus folgt, dass auch bei (4, 5, 6) die Punkte des zu (1, 2, 3) gehörigen R_{m-2i-2} invariant bleiben müssen. Der in Rede stehende R_{m-2i-2} kann aber in einem zu (4, 5, 6) gehörigen R_i nicht enthalten sein, weil jene R_i mit einander vertauscht werden können, wie etwa bei der Operation (1, 2) (4, 5), und doch dabei der R_{m-2i-2} in sich übergeht. Die andere Möglichkeit wäre, dass die R_{m-2i-2} von (1, 2, 3) und (4, 5, 6) zusammenfielen. Dann würde aber derselbe R_{m-2i-2} auch zu (4, 5, 7) und überhaupt zu jeder Operation (4, 5, i) gehören und mithin bei der $G_{\frac{n!}{2}}$ invariant bleiben. Man könnte also die $G_{\frac{n!}{2}}$ schon in einem niedrigeren Raume construiren, wie etwa in dem durch die zu (1, 2, 3) gehörigen R_i bestimmten R_{2i+1}.

Es sei also fernerhin die Dimension $m = 2i+1$. Es ist hier zuerst

über die Existenz der $G_{\frac{7}{2}1}$ im R_5 zu entscheiden. Beachten wir hierzu, dass die alternirende Vertauschungsgruppe von 4, 5, 6, 7 die zu (1, 2, 3) gehörigen beiden R_2 in sich überführen muss, dass zu den Operationen von der Periode 3 innerhalb der einzigen $G_{\frac{4}{2}1}$ im R_2 (man vgl. Nr. 9) drei Fixpunkte gehören, dass anderseits die bei (4, 5, 6) festen Punkte $2R_2$ erfüllen sollen und also in einem der fraglichen R_2 nicht drei isolirte Punkte als Spuren liefern können, so haben wir schon den Beweis erbracht, dass eine hierher gehörige $G_{\frac{7}{2}1}$ im R_5 nicht existiren kann.

Wir gehen weiter zu immer höheren R_{2i+1}. Nun kennen wir stets von vornherein die höchsten alternirenden Gruppen $G_{\frac{\mu}{2}1}$, welche im R_i existiren*). Im R_{2i+1} gelangt man dann von dem hier zu Grunde liegenden Ansatze aus höchstens zu $G_{\frac{\mu+3}{2}1}$. Weil also im R_3 sowohl die $G_{\frac{6}{2}1}$ als die $G_{\frac{7}{2}1}$ auftreten, hat man zu untersuchen, ob die entsprechenden $G_{\frac{9}{2}1}$ und $G_{\frac{10}{2}1}$ im R_7 existiren. Wir werden in der nächsten Nummer zeigen, dass diese Frage betreffend die $G_{\frac{9}{2}1}$ zu bejahen ist, dass dagegen die $G_{\frac{10}{2}1}$ im R_7 nicht construirt werden kann. In höheren R_i sind die höchsten alternirenden Gruppen $G_{\frac{i+2}{2}1}$. Im R_{2i+1} sollte man also hier zu höheren Gruppen als $G_{\frac{i+5}{2}1}$ nicht gelangen können. Die Bedingung $m \leqq n-2$, welche die von uns gesuchten Gruppen erfüllen sollen, giebt $2i+1 \leqq i+3$; derselben wird also jedenfalls hier nicht genügt.

12. Wir wollen jetzt die soeben besprochene $G_{\frac{9}{2}1}$ *im* R_7 construiren. Die Operation, von welcher wir ausgehen, nennen wir (7, 8, 9) statt, wie früher, (1, 2, 3). Bei derselben sollen nun die Punkte zweier R_3 fest bleiben. Dieselben R_3 müssen bei den geraden Vertauschungen von 1, 2, 3, 4, 5, 6 jeder in sich übergehen, bei den ungeraden aber, wo auch 7, 8, 9 ungerade vertauscht werden, Platz wechseln. Im R_3 giebt es nun blos eine Collineationsgruppe $G_{\frac{6}{2}1}$, aber dieselbe hat zwei Systeme von Ikosaederuntergruppen. Wir behaupten, dass den Vertauschungsgruppen $G_{\frac{5}{2}1}$ von nur 5 Dingen das System von Ikosaedergruppen mit 2 festen Geraden entspricht. Dasselbe gehört

*) Denn wir kennen dieselben für alle Räume, deren Dimension $< 2i+1$.

nämlich zu dem Falle, wo bei einer Operation (1, 2, 3) in einem R_3 die festen Punkte zwei R_1 erfüllen, und, weil dieselbe Operation im R_7 die Punkte zweier R_3 fest lassen soll, ist die Möglichkeit mit zwei isolirten festen Punkten und denjenigen einer Geraden bei (1, 2, 3), welche zu dem anderen Systeme von Ikosaedergruppen gehört, offenbar nicht zulässig. Nach dieser Unterscheidung zwischen den beiden Systemen von Ikosaederuntergruppen giebt es, wie es besonders aus den erzeugenden Operationen des Herrn Maschke ersichtlich ist*), nur eine und also nicht zwei oder mehrere projectivisch nicht äquivalente Weisen, den verschiedenen Vertauschungen $G_{\frac{61}{2}}$ Collineationen im R_3 zuzuordnen. Es muss also *Cogrediens* zwischen den $G_{\frac{61}{2}}$ stattfinden, welche in den beiden zur Operation (7, 8, 9) gehörigen R_3 auftreten. Definiren wir die R_3 durch $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ bez. $x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = 0$, so kann man also, nach geeigneter Wahl des Coordinatensystems die $G_{\frac{61}{2}}$ durch genau identische Substitutionen in x_1, x_2, x_3, x_4 bez. x_5, x_6, x_7, x_8 erzeugen. Es wird also *das System von* ∞^3 *Geraden*

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = x_5 : x_6 : x_7 : x_8$$

bei der $G_{\frac{61}{2}}$ in sich transformirt. Anderseits giebt es $\infty^1 R_3$, nämlich

$$x_1 : x_5 = x_2 : x_6 = x_3 : x_7 = x_4 : x_8,$$

welche bei der $G_{\frac{61}{2}}$ *einzeln invariant bleiben.* Jene Systeme von $\infty^3 R_1$ bez. $\infty^1 R_3$ erfüllen eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit, welche durch das Determinantensystem

$$\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ x_5, & x_6, & x_7, & x_8 \end{vmatrix} = 0$$

definirt ist.

Wenn wir jetzt von der $G_{\frac{61}{2}}$ *zur* $G_{\frac{71}{2}}$ *hinaufsteigen* wollen, so gilt der Satz, dass *zwei von den* ∞^1 *bei der ersteren invarianten* R_3 *auch bei der letzteren in sich übergehen müssen.* Betrachten wir nämlich zunächst die alternirende $G_{\frac{51}{2}}$ von 1, 2, 3, 4, 5. Wir wissen schon, dass bei derselben in den beiden zur Operation (7, 8, 9) gehörigen R_3 je zwei R_1 in sich übergehen müssen. Von diesen vier R_1 werden je zwei, welche doch nicht zusammen in einem der erwähnten R_3 liegen dürfen, bei der $G_{\frac{51}{2}}$ cogredient transformirt. Wenn wir nun in diesen beiden

*) l. c. § 11.

R_1-Paaren die entsprechenden Punkte durch gerade Linien verbinden, so bilden dieselben bez. das eine Erzeugendensystem zweier bei der $G_{\frac{51}{2}}$ invarianten Flächen zweiten Grades. Jede Erzeugende des anderen Systems der bez. F_2 bleibt bei der $G_{\frac{51}{2}}$ invariant. Wenn wir von diesen beiden F_2 je eine invariante Erzeugende betrachten, so werden auf diese Weise ∞^2 *bei der* $G_{\frac{51}{2}}$ *in sich übergehende* R_3 bestimmt, und aus diesen erhalten wir jene ∞^1 bei der $G_{\frac{61}{2}}$ invarianten R_3, indem eine gewisse *projective Zuordnung* zwischen den beiden Systemen von bei der $G_{\frac{51}{2}}$ invarianten Erzeugenden festgehalten wird. Steigt man aber von der $G_{\frac{51}{2}}$ zu einer anderen $G_{\frac{61}{2}}$ hinauf, wie etwa der alternirenden Vertauschungsgruppe von 1, 2, 3, 4, 5, 7, so müssen wir auch hier ∞^1 durch eine projective Zuordnung zwischen den beiden erwähnten Erzeugendensystemen bestimmte R_3 erhalten. Sind die beiden Projectivitäten verschieden, so giebt es doch bekanntlich *zwei gemeinsame Elemente*, welche zwei bei der $G_{\frac{71}{2}}$ invariante R_3 definiren. Anderseits können die beiden projectiven Zuordnungen nicht identisch sein, falls man nämlich von der $G_{\frac{71}{2}}$ noch zu $G_{\frac{81}{2}}$ und höheren Gruppen hinaufsteigen soll, denn dann würde, wie man in gewohnter Weise schliesst, jeder von den ∞^1 bei der $G_{\frac{61}{2}}$ invarianten R_3 nicht nur bei der $G_{\frac{71}{2}}$ sondern auch bei der $G_{\frac{81}{2}}$ in sich übergehen. Dies ist aber unmöglich, weil die $G_{\frac{81}{2}}$ in einem R_3 nicht construirt werden kann.

Jene beiden bei der $G_{\frac{71}{2}}$ festbleibenden R_3 legen wir fortan dem Coordinatensysteme zu Grunde. In demselben kann die $G_{\frac{71}{2}}$ nicht cogrediente Substitutionen erzeugen, denn dann würde man hier wie bei der $G_{\frac{61}{2}}$ ∞^1 invariante R_3 erhalten. Dass die Möglichkeit von Contragredienz bei der $G_{\frac{71}{2}}$ im R_3 stattfindet, bei der $G_{\frac{61}{2}}$ aber nicht, beruht nun darauf, dass man wohl von der letzteren aber nicht von der ersteren durch Erweiterung die entsprechende symmetrische Gruppe erhalten kann; zwei Erzeugungsweisen der $G_{\frac{71}{2}}$, welche wohl innerhalb der G_{71} nicht aber innerhalb der $G_{\frac{71}{2}}$ mit einander äquivalent sind, liefern uns demnach eine Methode, die Collineationsgruppe $G_{\frac{71}{2}}$ im R_3

contragredient auf sich selbst zu beziehen; in den von Hrn. Maschke gegebenen erzeugenden Operationen findet dieses seinen Ausdruck darin, dass es völlig frei steht, die Rollen von zwei Grössen ϱ_1, ϱ_2 zu wechseln. Mit Benutzung der obigen Bemerkungen erhalten wir nun leicht aus den Resultaten des Hrn. Maschke im R_3*) die folgenden *erzeugenden Operationen der in Rede stehenden* $G_{\frac{7}{2}1}$ *im* R_7, wobei wir jedoch einen Proportionalitätsfactor weglassen:

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
$x_1' =$	jx_1	$\frac{1}{\sqrt{3}}(x_1 + \sqrt{2}\,x_4)$	$\nu_1 x_4$	$\frac{1}{\sqrt{5}}(\sqrt{3}x_3 + i\sqrt{2}x_4)$	$\varrho_1 x_3$
$x_2' =$	jx_2	$\frac{1}{\sqrt{3}}(x_2 + \sqrt{2}\,x_3)$	$\nu_2 x_3$	$\frac{1}{\sqrt{5}}(-i\sqrt{2}x_3 - \sqrt{3}x_4)$	$-\varrho_2 x_4$
$x_3' =$	$j^2 x_3$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}x_2 - x_3)$	$\nu_1 x_2$	$\frac{1}{\sqrt{5}}(\sqrt{3}x_1 + i\sqrt{2}x_2)$	$\varrho_2 x_1$
$x_4' =$	$j^2 x_4$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}x_1 - x_4)$	$\nu_2 x_1$	$\frac{1}{\sqrt{5}}(-i\sqrt{2}x_1 - \sqrt{3}x_2)$	$-\varrho_1 x_2$
$x_5' =$	jx_5	$\frac{1}{\sqrt{3}}(x_5 + \sqrt{2}\,x_8)$	$\nu_1 x_8$	$\frac{1}{\sqrt{5}}(\sqrt{3}x_7 + i\sqrt{2}x_8)$	$\varrho_2 x_7$
$x_6' =$	jx_6	$\frac{1}{\sqrt{3}}(x_6 + \sqrt{2}\,x_7)$	$\nu_2 x_7$	$\frac{1}{\sqrt{5}}(-i\sqrt{2}x_7 - \sqrt{3}x_8)$	$-\varrho_1 x_8$
$x_7' =$	$j^2 x_7$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}x_6 - x_7)$	$\nu_1 x_6$	$\frac{1}{\sqrt{5}}(\sqrt{3}x_5 + i\sqrt{2}x_6)$	$\varrho_1 x_5$
$x_8' =$	$j^2 x_8$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}x_5 - x_8)$	$\nu_2 x_5$	$\frac{1}{\sqrt{5}}(-i\sqrt{2}x_5 - \sqrt{3}x_6)$	$-\varrho_2 x_6$,

wo

$$E_1 = (1,2,3),\quad E_2 = (1,2)(3,4),\quad E_3 = (1,2)(4,5),\quad E_4 = (1,2)(5,6),$$
$$E_5 = (1,2)(6,7),$$

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \sqrt{\frac{3}{8}} \pm i\sqrt{\frac{5}{8}},\qquad \frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \sqrt{\frac{5}{12}} \pm i\sqrt{\frac{7}{12}},$$

Wir wollen jetzt die obige $G_{\frac{7}{2}1}$ *durch Hinzunahme einer Operation* $E_6 = (1,2)(7,8)$ *erweitern, so dass eine* $G_{\frac{8}{2}1}$ *erzeugt wird.* Durch E_6 muss natürlich der Inbegriff der bei der alternirenden Vertauschungsgruppe von 1, 2, 3, 4, 5, 6 invarianten $\infty^1 R_3$ sowie das zugehörige System von $\infty^3 R_1$ in sich transformirt werden. Man kann also E_6 in zwei verschiedene Transformationen zerlegen, von denen die eine

*) l. c. § 12.

jeden der $\infty^1 R_3$, die andere jeden der $\infty^3 R_1$ in sich überführt. Erstere muss ersichtlich in jedem der erwähnten R_3 die $G_{6\,\frac{1}{2}}$ zur $G_{8\,\frac{1}{2}}$ erweitern, und man kann also für die Herstellung der entsprechenden Substitutionen die von Hrn. Maschke gegebene Operation $F = (1, 2)$ benutzen*); letztere kann unmöglich mit der Identität zusammenfallen, denn dazu wäre erforderlich, dass die beiden bei der $G_{7\,\frac{1}{2}}$ invarianten R_3 auch bei der $G_{8\,\frac{1}{2}}$ in sich übergingen. Von den ∞^1 zur $G_{8\,\frac{1}{2}}$ gehörigen R_3 bleiben also nur zwei bei E_6 invariant. Es seien für diese α und β die Werthe der Verhältnisse

$$x_1 : x_5 = x_2 : x_6 = x_3 : x_7 = x_4 : x_8$$

Hiernach muss bei E_6 die Gleichung

$$\frac{x_1' - \alpha x_5'}{x_1' - \beta x_5'} = -\frac{x_3 - \alpha x_7}{x_3 - \beta x_7}$$

gelten, sowie die entsprechenden Gleichungen zwischen x_3', x_7', x_1, x_5; x_2', x_6', x_4, x_8; x_4', x_8', x_2, x_6. Betrachten wir $x_1 - \alpha x_5, \ldots$ bez. $x_1 - \beta x_5, \ldots$ als Coordinaten in den beiden bei E_6 festen R_3, so lässt sich jetzt die von Hrn. Maschke im R_3 für $(1, 2)$ gegebene Substitution in folgender Weise übertragen:

$$(E_6)\quad \begin{aligned} x_1' - \alpha x_5' &= -x_3 + \alpha x_7, & x_3' - \alpha x_7' &= x_1 - \alpha x_5, \\ x_2' - \alpha x_6' &= -x_4 + \alpha x_8, & x_4' - \alpha x_8' &= x_2 - \alpha x_6, \\ x_1' - \beta x_5' &= x_3 - \beta x_7, & x_3' - \beta x_7' &= -x_1 + \beta x_5, \\ x_2' - \beta x_6' &= x_4 - \beta x_8, & x_4' - \beta x_8' &= -x_2 + \beta x_6. \end{aligned}$$

Welchen Bedingungen muss man nun α und β unterwerfen, damit E_6 durch Combination mit der $G_{7\,\frac{1}{2}}$ wirklich eine $G_{8\,\frac{1}{2}}$ erzeuge? Es kommen hier, wie auch fernerhin, zwei Sätze von Hrn. Moore**) in Betracht, welche übrigens die Grundlage der oft genannten Untersuchungen von Hrn. Maschke bilden; nach demselben ist eine durch $k - 2$ Operationen definirte Gruppe, welche der Reihe nach sowohl für sich genommen als paarweise combinirt dieselben Perioden liefern wie die Buchstabenvertauschungen $(1, 2, 3)$, $(1, 2)\,(3, 4)$, $(1, 2)\,(4, 5)$, $\ldots\ldots (1, 2)\,(k-1, k)$ mit der alternirenden Vertauschungsgruppe von k Buchstaben holoedrisch isomorph, mit der symmetrischen aber, wenn noch eine erzeugende Operation hinzukommt, welche eine mit der Buchstabenvertauschung $(1, 2)$ äquivalente Rolle spielt. Nun ist es von

*) Vergl. hier und weiterhin Maschke l. c. § 13.

**) Proc. Lond. Math. Soc XXVIII, Nr. 597.

geometrischer Seite einleuchtend, dass die hieraus für E_6 entspringenden Bedingungen mit einer einzigen Ausnahme alle identisch erfüllt sind. Die Ausnahme bezieht sich auf die Combination von E_6 mit $E_5 = (1,2)(6,7)$, welche eine Collineation von der Periode 3 liefern soll. Hierfür ist in der That die Bedingung

$$(\alpha+\beta)^2(\varrho_1^2+\varrho_2^2-\varrho_1\varrho_2) - 4\alpha\beta\varrho_1\varrho_2 = 0$$

erforderlich, oder nach Einsetzung der Werthe von ϱ_1 und ϱ_2

$$(\alpha+\beta)^2 + 3\alpha\beta = 0.$$

Wir können mithin *auf* ∞^1 *Weisen von der* $G_{7,\frac{1}{2}}$ *zu einer* $G_{8,\frac{1}{2}}$ *gelangen.* Doch lassen sich diese ∞^1 $G_{8,\frac{1}{2}}$ in einander überführen, und zwar ganz einfach dadurch, dass man x_5, x_6, x_7, x_8 durch bez. kx_5, kx_6, kx_7, kx_8 ersetzt, wo k eine beliebig zu wählende Constante bedeutet. Die fraglichen $G_{8,\frac{1}{2}}$ sind also alle mit einander äquivalent. Wir treffen jetzt eine bestimmte Wahl durch die Festsetzung

$$\alpha+\beta = \sqrt{3}, \quad \alpha\beta = -1.$$

Dann ergiebt sich mit Leichtigkeit für $(1,2)(7,8)$ die folgende Substitution

$$(E_6)\qquad \begin{aligned} x_1' &= \tfrac{1}{\sqrt{7}}(\sqrt{3}x_3+2x_7), & x_5' &= \tfrac{1}{\sqrt{7}}(2x_3-\sqrt{3}x_7),\\ x_3' &= \tfrac{1}{\sqrt{7}}(-\sqrt{3}x_1-2x_5), & x_7' &= \tfrac{1}{\sqrt{7}}(-2x_1+\sqrt{3}x_5),\\ x_2' &= \tfrac{1}{\sqrt{7}}(\sqrt{3}x_4+2x_8), & x_6' &= \tfrac{1}{\sqrt{7}}(2x_4-\sqrt{3}x_8),\\ x_4' &= \tfrac{1}{\sqrt{7}}(-\sqrt{3}x_2-2x_6), & x_8' &= \tfrac{1}{\sqrt{7}}(-2x_2+\sqrt{3}x_6), \end{aligned}$$

Es ist jetzt die Frage, ob man *von der* $G_{8,\frac{1}{2}}$ *durch Hinzunahme einer Operation* $E_7 = (1,2)(8,9)$ *noch zu einer* $G_{9,\frac{1}{2}}$ *hinaufsteigen kann.* Nun muss offenbar E_7 das System der ∞^2 mit unserer ursprünglichen $G_{6,\frac{1}{2}}$ zusammenhängenden Geraden in derselben Weise in sich transformiren wie E_6. Weil die Combination von E_7 mit unserer früher aufgestellten $G_{7,\frac{1}{2}}$ eine $G_{7,1}$ liefern soll, muss E_7 die beiden bei jener $G_{7,\frac{1}{2}}$ festen R_3 vertauschen. Es muss sich also E_7 durch eine Substitution von der Gestalt

$$(E_7)\quad \begin{matrix} x_1' = \sigma_1 x_7, & x_2' = \sigma_1 x_8, & x_3' = -\sigma_1 x_5, & x_4' = -\sigma_1 x_6, \\ x_7' = -\sigma_2 x_1, & x_8' = -\sigma_2 x_2, & x_5' = \sigma_2 x_3, & x_6' = \sigma_2 x_4 \end{matrix}$$

darstellen lassen. Die Bedingungen, denen E_7 nach dem oben besprochenen Theoreme des Hrn. Moore genügen soll, sind jetzt, wenn man von der Combination $E_6 E_7$ absieht, identisch erfüllt. Damit aber $E_6 E_7$ eine Collineation von der Periode 3 liefere, muss zwischen σ_1 und σ_2 die Gleichung

$$4(\sigma_1+\sigma_2)^2 - 7\sigma_1\sigma_2 = 0$$

gelten. Um die Werthe von σ_1 und σ_2 zu fixiren, können wir die Bedingung $2(\sigma_1+\sigma_2) = \sqrt{7}$, $a_1\sigma_2 = 1$ einführen. Dann ergiebt sich

$$\begin{matrix}\sigma_1 \\ \sigma_2\end{matrix} = \frac{\sqrt{7}}{4} \pm i\,\frac{3}{4}.$$

Je nach dem Verhältnisse von $\sigma_1 : \sigma_2$, welches wir der Operation E_7 zu Grunde legen, können wir von der $G_{8\,|\,2}$ in zwei verschiedenen Weisen zu einer $G_{9\,|\,2}$ hinaufsteigen. Es ist hier zu entscheiden, ob diese beiden $G_{9\,|\,2}$ in einer $G_{10\,|\,2}$ enthalten sind. Wenn dies der Fall wäre, so hätte man die Eine $E_7 = (1,2)(8,9)$ und die andere $E_7 = (1,2)(8,10)$. Die Combination derselben würde also eine Collineation von der Periode 3 liefern. Dafür wäre aber erforderlich, dass $\sigma_1^2 : \sigma_2^2 =$ eine dritte Einheitswurzel. Hiermit ist bewiesen, dass *im R_7 keine Collineationsgruppe $G_{10\,|\,1}$ existirt.*

Wir wollen noch untersuchen, *ob die erhaltenen $G_{8\,|\,2}$ und $G_{9\,|\,2}$ im R_7 zu den entsprechenden symmetrischen Gruppen erweitert werden können.* Zu dem Ende braucht man eine *Substitution* $F = (1,2)$ aufzusuchen, welche von derselben Form wie E_7 sein muss, und deren Combination mit E_6, bez. mit sowohl E_6 als E_7, die Periode 2 liefert. Erstere Bedingung lässt sich in der That befriedigen, und zwar ergiebt sich

$$(F)\quad \begin{matrix} x_1' = x_7, & x_7' = x_1, & x_2' = x_8, & x_8' = x_2, \\ x_3' = -x_5, & x_5' = -x_3, & x_4' = -x_6, & x_6' = -x_4. \end{matrix}$$

Wir gelangen also *nur auf eine bestimmte Weise von der $G_{8\,|\,2}$ zu einer $G_{8\,|\,}$*. Da die Operation FE_7 keine endliche Periode liefert, ist dagegen *eine Erweiterung unserer $G_{9\,|\,2}$ zu einer $G_{9\,|\,}$ nicht möglich.* Dies liegt auch in der Natur der Sache, weil diejenigen Operationen, welche den

ungeraden Vertauschungen in der $G_{8!}$ entsprechen, die beiden $G_{\frac{9!}{2}}$ in einander transformiren, zu denen man von der $G_{\frac{8!}{2}}$ hinaufsteigen kann.

13. *Die soeben erhaltenen* $G_{8!}$ und $G_{\frac{9!}{2}}$ *im* R_7 *bieten besonderes Intereese, indem dieselben den von Herrn Klein gefundenen Darstellungsweisen der* $G_{6!}$ *und der* $G_{\frac{7!}{2}}$ *im* R_3 *entsprechen.* In der That kann man in derselben Weise *durch Verdoppelung der Zahl der homogenen Veränderlichen* weiter fortgehen und so ganz allgemein *eine Darstellungsweise der* $G_{2n!}$ *und der* $G_{\frac{2n+1!}{2}}$ *mit* 2^{n-1} *homogenen Veränderlichen* bekommen. Die Reihe fängt schon an *mit einer homogenen Variabelen*, wo wir *die* $G_{2!}$ *und die* $G_{\frac{3!}{2}}$ erhalten, dann kommen *die* $G_{4!}$ *und die* $G_{\frac{5!}{2}}$ *mit* 2 *homogenen Veränderlichen, die* $G_{6!}$ *und die* $G_{\frac{7!}{2}}$ *mit* 4, *die* $G_{8!}$ *und die* $G_{\frac{9!}{2}}$ *mit* 8 *u. s. w.* Es ist gar nicht schwierig für diese Reihe von Gruppen ganz allgemein ein System von erzeugenden Substitutionen aufzustellen. Man wolle in der That in dem oben gegebenen Beispiel beachten, wie regelmässig einerseits in E_2, E_4, E_6, anderseits in E_1, E_3, E_5, E_7 als einzige Irrationalitäten die Quadratwurzeln von immer höheren natürlichen Zahlen auftreten. Dass dies nicht zufällig ist, sondern dass man nach dem hier zu abstrahirenden Gesetze für höhere Gruppen die hinzukommenden Substitutionen $E_8, \ldots$ bez. E_9 aufschreiben kann, lässt sich sodann durch einen leichten Inductionsschluss darlegen. Es lässt sich auch ohne Mühe beweisen, dass *die in Rede stehende* $G_{\frac{2n+1!}{2}}$ *weder zu einer* $G_{2n+1!}$ *noch zu einer* $G_{\frac{2n+2!}{2}}$ *erweitert werden kann*; der fragliche Beweis lässt sich in der That in genau derselben Weise wie bei der $G_{\frac{9!}{2}}$ im R_7 erbringen, indem man den Umstand in Betracht zieht, dass man von einer $G_{\frac{2n!}{2}}$ stets in zwei bestimmten verschiedenen Weisen zu einer $G_{\frac{2n+1!}{2}}$ gelangen kann.

14. Jetzt kennen wir also *zwei allgemeine Classen von Collineationsgruppen*, welche den symmetrischen oder alternirenden Vertauschungsgruppen von n Dingen holoedrisch isomorph sind: erstens *Vertauschungsgruppen von* n R_{n-3} *in einem* R_{n-2}; zweitens *Darstellungen der symmetrischen* $G_{2n!}$ *und der alternirenden* $G_{\frac{2n+1!}{2}}$ *in einem* $R_{2^{n-1}-1}$. Dagegen steht *die* $G_{\frac{6!}{2}}$ *im* R_2 *noch isolirt* da. Weil man bei der erst-

genannten Classe die zu den n R_{n-3} gehörigen symmetrischen Functionen betrachten kann, führt also das betreffende Formenproblem unmittelbar zu einer algebraischen Gleichung n^{ten} Grades. Nun ist die Dimension für $n > 7$ niedriger in der ersten als in der zweiten Classe, ausgenommen $n = 9$, wo Gleichheit eintritt. *Die allgemeinen algebraischen Gleichungen n^{ten} Grades bilden mithin, falls $n > 7$, ihre eigenen Normalprobleme. Für $n = 5$ und $n = 7$ gehören aber die Normalprobleme zu den Collineationsgruppen der zweiten Classe und für $n = 6$ zu der G_{360} im R_2.*

Lund, November 1898.

Ueber eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einem willkürlichen Parameter.

Von

J. Horn in Charlottenburg.

In den Comptes rendus (17. Januar 1898) habe ich gezeigt, wie man vermittelst einer Methode successiver Annäherungen*) zur asymptotischen Darstellung der irregulären Integrale einer linearen Differentialgleichung durch die Thomé'schen Normalreihen gelangen kann**). Ein ähnliches Verfahren kann man, wie ich im 51. Bd. der Math. Ann. gezeigt habe, anwenden, um das Verhalten der Integrale einer nicht linearen Differentialgleichung erster Ordnung bei der Annäherung der Veränderlichen an eine Unbestimmtheitsstelle zu untersuchen***).

Ich betrachte jetzt ein Integral einer linearen Differentialgleichung als Function eines in den Coefficienten enthaltenen Parameters und leite vermittelst successiver Annäherungen eine asymptotische Darstellung dieser Function durch eine der Differentialgleichung formell genügende Reihe her. Um die Methode zunächst in einem einfachen Falle darzustellen, wähle ich eine Differentialgleichung, welche bei verschiedenen Problemen der mathematischen Physik auftritt, nämlich die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(\alpha) \qquad \frac{d\left(A\,\frac{dy}{dx}\right)}{dx} + (k^2 B + C)y = 0\,\dagger);$$

*) Vgl. Fuchs, Annali di Matematica 1870.

**) Vgl. Poincaré, Am. Journ. Bd. 7, Act. math. Bd. 8.

***) Vgl. meine Arbeit im 118. und 119. Bd. von Crelle's Journ.

†) Vgl. Sturm, Liouv. Journ. Bd. 1, S. 106 ff. und S. 373 ff., sowie in Betreff der spezielleren Differentialgleichung $\frac{d^2y}{dx^2} + k^2 By = 0$ Picard, Traité d'Analyse Bd. III, S. 119 ff. In dem Buch von Pockels „Ueber die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ und deren Auftreten in der mathematischen Physik" ist auch auf diejenigen Fälle hingewiesen, in welchen u nur von einer Veränderlichen abhängt. Als physikalische Aufgabe, welche auf eine nicht zu specielle Differentialgleichung (α) führt, sei das Problem der Wärmeleitung in einem heterogenen Stab genannt.

hierin ist k^2 ein willkürlicher Parameter, welcher auch complexe Werthe annehmen kann; A, B, C sind reelle Functionen der reellen Veränderlichen x, welche in dem Intervall $a \leqq x \leqq b$ nebst ihren Ableitungen jeder Ordnung stetig sein sollen; ausserdem sollen A und B für $a \leqq x \leqq b$ positiv sein. Ein Integral y von (α), welches ebenso wie seine Ableitung $\frac{dy}{dx}$ für $x = a$ einen von k^2 unabhängigen Werth besitzt, ist bekanntlich eine ganze transcendente Function von k^2.

Aus der Entwicklung dieser ganzen Function nach positiven Potenzen von k^2 lassen sich deren charakteristische Eigenschaften, insbesondere ihr Verhalten in der Nähe der wesentlich singulären Stelle $k = \infty$, nicht oder nur schwer erkennen; unmittelbaren Aufschluss darüber giebt aber eine Entwicklung von der Form

$$(\beta) \qquad y = \cos k\omega\left(\varphi_0 + \frac{\varphi_2}{k^2} + \cdots\right) + \sin k\omega\left(\frac{\varphi_1}{k} + \frac{\varphi_3}{k^3} + \cdots\right),$$

welche der Differentialgleichung (α) formell genügt und ähnlich gebildet ist wie die Thomé'schen Normalreihen; darin sind $\omega; \varphi_0, \varphi_1, \ldots$ Functionen von x, welche in § 1 berechnet werden. Ich zeige, dass die Reihe (β) die erwähnte ganze Function für grosse Werthe von k^2 in einem näher bezeichneten Sinne asymptotisch darstellt (§§ 2—5).

Aus dieser asymptotischen Darstellung lässt sich auf die Nullstellen und das Geschlecht der ganzen Function schliessen*). Wir wählen jedoch eine etwas andere Fragestellung.

Bei den erwähnten Problemen der mathematischen Physik kommt es auf solche Lösungen der Differentialgleichung (α) an, welche die Bedingungen

$$\frac{dy}{dx} - hy = 0 \quad \text{für} \quad x = a,$$
$$\frac{dy}{dx} + Hy = 0 \quad \text{für} \quad x = b$$

erfüllen, worin h und H positive Grössen sind, welche auch gleich Null oder unendlich gross sein können**).

Bekanntlich giebt es solche Lösungen (ausgezeichnete Lösungen) nur, wenn k^2 Nullstelle einer gewissen ganzen transcendenten Function $F(k^2)$ ist; man weiss, dass die Gleichung $F(k^2) = 0$ unendlich viele reelle positive Wurzeln k^2 (ausgezeichnete Werthe) besitzt; es ergiebt

*) Vgl. den zweiten Theil meines Aufsatzes „Verwendung asymptotischer Darstellungen zur Untersuchung der Integrale einer speciellen linearen Differentialgleichung" (Math. Ann. Bd. 49).

**) Im Falle $h = \infty$ geht die Bedingung $\frac{dy}{dx} - hy = 0$ in $y = 0$ über.

sich dies auch aus unserer asymptotischen Darstellung der grossen ausgezeichneten Werthe, woran sich eine asymptotische Darstellung der ausgezeichneten Lösungen mit grossem Index anschliesst (§ 6).

Man wird von den gegenwärtigen Untersuchungen Gebrauch machen können, um die für die Lösung der erwähnten physikalischen Aufgaben erforderliche Entwickelung einer Function von x in eine nach ausgezeichneten Lösungen der Differentialgleichung (α) fortschreitende Reihe zu beweisen*).

§ 1.

Wir bezeichnen mit y das Integral der Differentialgleichung (α), welches durch die Bedingungen

$$y = \alpha_0, \quad \frac{dy}{dx} = \alpha_0' \quad \text{für} \quad x = a$$

fixirt ist, und beschränken x auf das Intervall $a \leqq x \leqq b$. Durch formale Differentiation der Reihe

$$(\beta) \qquad y = \cos k\omega\left(\varphi_0 + \frac{\varphi_2}{k^2} + \cdots\right) + \sin k\omega\left(\frac{\varphi_1}{k} + \frac{\varphi_3}{k^3} + \cdots\right),$$

worin $\omega, \varphi_0, \varphi_1, \ldots$ von x abhängen, erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \cos k\omega \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varphi_{2\nu}' + \omega' \varphi_{2\nu+1}}{k^{2\nu}}$$

$$+ \sin k\omega \left(-k\omega'\varphi_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_{2\nu-1}' - \omega'\varphi_{2\nu}}{k^{2\nu-1}}\right),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \cos k\omega \left(-k^2\omega'^2\varphi_0 + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varphi_{2\nu}'' + 2\omega'\varphi_{2\nu+1}' + \omega''\varphi_{2\nu+1} - \omega'^2\varphi_{2\nu+2}}{k^{2\nu}}\right)$$

$$+ \sin k\omega \left(-k(2\omega'\varphi_0' + \omega''\varphi_0 + \omega'^2\varphi_1)\right.$$

$$\left. + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_{2\nu-1}'' - 2\omega'\varphi_{2\nu}' - \omega''\varphi_{2\nu} - \omega'^2\varphi_{2\nu+1}}{k^{2\nu-1}}\right).$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung (α) und Nullsetzen der Coefficienten von $k^2 \cos k\omega$ und $k \sin k\omega$ erhält man

$$-\omega'^2 A + B = 0,$$
$$2A\omega'\varphi_0' + (A\omega'' + A'\omega')\varphi_0 = 0;$$

*) Vgl. Sturm und Liouville, Liouv. Journ. Bd. 1 u. 2; Stekloff, Comptes rendus 1898 (17. Jan.).

durch Nullsetzen der Coefficienten von

$$\frac{\sin k\omega}{k^{2n-1}}, \quad \frac{\cos k\omega}{k^{2n}}$$

erhält man ferner

$$2A\omega'\varphi'_{2n} + (A\omega'' + A'\omega')\varphi_{2n} - (A\varphi''_{2n-1} + A'\varphi'_{2n-1} + C\varphi_{2n-1}) = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$2A\omega'\varphi'_{2n+1} + (A\omega'' + A'\omega')\varphi_{2n+1} + (A\varphi''_{2n} + A'\varphi'_{2n} + C\varphi_{2n}) = 0 \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Hieraus berechnet man

$$\omega' = \sqrt{\frac{B}{A}},$$

so dass man

$$\omega = \int_a^x \sqrt{\frac{B}{A}}\, dx$$

setzen kann, wo der positive Werth der Quadratwurzel genommen werden möge. Ferner erhält man

$$\varphi_0 = \frac{c_0}{\sqrt[4]{AB}},$$

$$\varphi_{2n} = \frac{1}{2\sqrt[4]{AB}} \int_a^x \frac{A\varphi''_{2n-1} + A'\varphi'_{2n-1} + C\varphi_{2n-1}}{\sqrt[4]{AB}}\, dx + \frac{c_{2n}}{\sqrt[4]{AB}} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$\varphi_{2n+1} = -\frac{1}{2\sqrt[4]{AB}} \int_a^x \frac{A\varphi''_{2n} + A'\varphi'_{2n} + C\varphi_{2n}}{\sqrt[4]{AB}}\, dx + \frac{c_{2n+1}}{\sqrt[4]{AB}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

worin die vierte Wurzel aus der positiven Grösse AB positiv angenommen werden möge. Die Integrationsconstanten $c_0, c_1, \ldots$ bestimmen wir so, dass bei formaler Rechnung y den Werth α_0, $\frac{dy}{dx}$ den Werth α_0' für $x = a$ annimmt, welches auch der Werth von k sein möge. Für $x = a$ ist

$$y = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varphi_{2\nu}(a)}{k^{2\nu}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varphi'_{2\nu}(a) + \omega'(a)\varphi_{2\nu+1}(a)}{k^{2\nu}};$$

es muss also sein

$$\varphi_0(a) = \alpha_0,$$
$$\varphi_{2n}(a) = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$
$$\varphi_1(a) = \frac{\alpha_0' - \varphi_0'(a)}{\omega'(a)},$$
$$\varphi_{2n+1}(a) = -\frac{\varphi_{2n}'(a)}{\omega'(a)} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Demnach wird

$$\varphi_0 = \frac{\alpha_0 \sqrt[4]{A(a)B(a)}}{\sqrt[4]{AB}},$$

$$\varphi_1 = -\frac{1}{2\sqrt[4]{AB}} \int_a^x \frac{A\varphi_0'' + A'\varphi_0' + C\varphi_0}{\sqrt[4]{AB}}\, dx + \frac{(\alpha_0' - \varphi_0'(a))\sqrt[4]{A(a)^3}}{\sqrt[4]{AB}\sqrt[4]{B(a)}},$$

$$\varphi_{2n} = -\frac{1}{2\sqrt[4]{AB}} \int_a^x \frac{A\varphi_{2n-1}'' + A'\varphi_{2n-1}' + C\varphi_{2n-1}}{\sqrt[4]{AB}}\, dx \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$\varphi_{2n+1} = -\frac{1}{2\sqrt[4]{AB}} \int_a^x \frac{A\varphi_{2n}'' + A'\varphi_{2n}' + C\varphi_{2n}}{\sqrt[4]{AB}}\, dx - \frac{\varphi_{2n}'(a)\sqrt[4]{A(a)^3}}{\sqrt[4]{AB}\sqrt[4]{B(a)}} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Wir werden zeigen, dass die Reihe (β) mit den soeben berechneten Werthen von ω und $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ das durch die angegebenen Anfangsbedingungen bestimmte Integral y der Differentialgleichung für grosse Werthe des Parameters k asymptotisch darstellt.

§ 2.

Wir bringen die Reihe (β) in Verbindung mit einer der Differentialgleichung (α) genügenden convergenten Reihe, welche man durch ein Verfahren successiver Annäherungen erhält.

Die Functionen

$$e^{ik\omega}\varphi, \quad e^{-ik\omega}\varphi,$$

wo

$$\varphi = \frac{\sqrt[4]{A(a)B(a)}}{\sqrt[4]{AB}}$$

gesetzt ist*), genügen der Differentialgleichung

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d\log A}{dx}\,\frac{du}{dx}$$

$$+\left(k^2\frac{B}{A} + \frac{1}{4}\left(\frac{d\log A}{dx}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{d\log\sqrt{\frac{B}{A}}}{dx}\right)^2 + \frac{1}{4}\,\frac{d^2\log(AB)}{dx^2}\right)u = 0,$$

deren linke Seite mit $D(u)$ bezeichnet werden möge. Setzt man

$$Q = \frac{1}{4}\left(\frac{d\log A}{dx}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{d\log\sqrt{\frac{B}{A}}}{dx}\right)^2 + \frac{1}{4}\,\frac{d^2\log(AB)}{dx^2} - \frac{C}{A},$$

so schreibt sich die Differentialgleichung (α)

$$D(u) = Qu.$$

Wir ersetzen sie durch die Kette von Differentialgleichungen

$$D(u_0) = 0,$$
$$D(u_m) = Qu_{m-1} \qquad (m = 1, 2, \ldots),$$

welche wir so integriren, dass für $x = a$

$$u_0 = \alpha_0, \quad u_0' = \alpha_0\varphi'(a)$$
$$u_1 = 0, \quad u_1' = \alpha_0' - \alpha_0\varphi'(a)$$
$$u_m = 0, \quad u_m' = 0 \qquad (m = 2, 3, \ldots)$$

wird. Dann ist

$$u_0 = \frac{e^{ik\omega}\alpha_0\varphi}{2} + \frac{e^{-ik\omega}\alpha_0\varphi}{2},$$

$$u_1 = \frac{e^{ik\omega}\varphi}{2ik}\int_a^x \frac{e^{-ik\omega}Qu_0}{\omega'\varphi}\,dx - \frac{e^{-ik\omega}\varphi}{2ik}\int_a^x \frac{e^{ik\omega}Qu_0}{\omega'\varphi}\,dx$$
$$+ \frac{(\alpha_0' - \alpha_0\varphi'(a))\,\varphi e^{ik\omega}}{2ik\omega'(a)\varphi(a)} - \frac{(\alpha_0' - \alpha_0\varphi'(a))\,\varphi e^{-ik\omega}}{2ik\omega'(a)\varphi(a)},$$

$$u_m = \frac{e^{ik\omega}\varphi}{2ik}\int_a^x \frac{e^{-ik\omega}Qu_{m-1}}{\omega'\varphi}\,dx$$
$$- \frac{e^{-ik\omega}\varphi}{2ik}\int_a^x \frac{e^{ik\omega}Qu_{m-1}}{\omega'\varphi}\,dx \qquad (m = 2, 3, \ldots).$$

---

*) Mit Rücksicht darauf, dass der Factor α_0 in $\varphi_0 = \alpha_0\varphi$ verschwinden kann.

Wir untersuchen die Convergenz der Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

für $a \leqq x \leqq b$. Wir setzen

$$k = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$

und beschränken uns, da es sich um eine eindeutige Function von k^2 handelt, auf die obere Halbebene der complexen Veränderlichen k

$$0 \leqq \vartheta \leqq \pi.$$

Für $a \leqq x \leqq b$ sei

$$|\varphi| \leqq M, \quad |\alpha_0\varphi| \leqq M_0, \quad \left|\frac{\alpha_0' - \alpha_0\varphi'(a)}{\omega'(a)\varphi(a)}\varphi\right| \leqq M_1,$$

$$\left|\frac{Q}{\omega'\varphi}\right| \leqq N.$$

Dann ist

$$|u_0| \leqq \frac{1}{2}M_0 e^{-r\omega\sin\vartheta} + \frac{1}{2}M_0 e^{r\omega\sin\vartheta} \leqq M_0 e^{r\omega\sin\vartheta},$$

da

$$e^{-r\omega\sin\vartheta} \leqq 1, \quad e^{r\omega\sin\vartheta} \geqq 1$$

ist. Ferner ist

$$|u_1| \leqq \frac{Me^{-r\omega\sin\vartheta}}{2r}\int_a^x M_0 N e^{2r\omega\sin\vartheta}dx + \frac{Me^{r\omega\sin\vartheta}}{2r}\int_a^x M_0 N dx + \frac{M_1 e^{-r\omega\sin\vartheta}}{2r} + \frac{M_1 e^{r\omega\sin\vartheta}}{2r};$$

da ω mit wachsendem x zunimmt, so ist

$$\int_a^x e^{2r\omega\sin\vartheta}dx \leqq e^{2r\omega\sin\vartheta}(x-a),$$

also

$$|u_1| \leqq \frac{M_0 MN e^{r\omega\sin\vartheta}(x-a)}{r} + \frac{M_1 e^{r\omega\sin\vartheta}}{r}.$$

Wenn

$$|u_{m-1}| \leqq \frac{M_0(MN)^{m-1}e^{r\omega\sin\vartheta}(x-a)^{m-1}}{(m-1)!\,r^{m-1}} + \frac{M_1(MN)^{m-2}e^{r\omega\sin\vartheta}(x-a)^{m-2}}{(m-2)!\,r^{m-1}}$$

ist, so haben wir

$$|u_m| \leqq \frac{Me^{-r\omega\sin\vartheta}}{2r}\int_a^x \frac{M_0N(MN)^{m-1}e^{2r\omega\sin\vartheta}(x-a)^{m-1}dx}{(m-1)!\,r^{m-1}}$$

$$+\frac{Me^{r\omega\sin\vartheta}}{2r}\int_a^x \frac{M_0N(MN)^{m-1}(x-a)^{m-1}dx}{(m-1)!\,r^{m-1}}$$

$$+\frac{Me^{-r\omega\sin\vartheta}}{2r}\int_a^x \frac{M_1N(MN)^{m-2}e^{2r\omega\sin\vartheta}(x-a)^{m-2}dx}{(m-2)!\,r^{m-1}}$$

$$+\frac{Me^{r\omega\sin\vartheta}}{2r}\int_a^x \frac{M_1N(MN)^{m-2}(x-a)^{m-2}dx}{(m-2)!\,r^{m-1}}$$

oder

$$|u_m| \leqq \frac{M_0(MN)^m e^{r\omega\sin\vartheta}(x-a)^m}{m!\,r^m}$$

$$+\frac{M_1(MN)^{m-1}e^{r\omega\sin\vartheta}(x-a)^{m-1}}{(m-1)!\,r^m}.$$

Es ist also

$$\sum_{m=0}^{\infty}|e^{ik\omega}u_m| \leqq M_0\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(\frac{MN(x-a)}{r}\right)^m$$

$$+\frac{M_1}{r}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{MN(x-a)}{r}\right)^{m-1}.$$

Die Reihe

$$e^{ik\omega}(u_0+u_1+u_2+\cdots)$$

ist demnach für alle Werthe von x im Intervall $a \leqq x \leqq b$ und für alle Werthe von k, welche der Bedingung

$$|k| \geqq R, \quad 0 \leqq \arg k \leqq \pi \qquad (R>0)$$

genügen, unbedingt und gleichmässig convergent. Dasselbe gilt für die Reihe

$$e^{ik\omega}k^n(u_n+u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots) \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Aehnlich beweist man die gleichmässige und unbedingte Convergenz der Reihen

$$\frac{e^{ik\omega}}{k}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{du_m}{dx},$$

$$e^{ik\omega}k^n\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{du_m}{dx} \qquad (n=1,2,\ldots)$$

in demselben Gebiete von x und k. Aus dem oben aufgestellten Ausdruck für u_m geht nämlich derjenige von u_m' hervor, wenn man ausserhalb der Integralzeichen $e^{\pm ik\omega}\varphi$ durch

$$e^{\pm ik\omega}(\pm ik\omega'\varphi + \varphi')$$

ersetzt. Wenn für $a \leqq x \leqq b$

$$|\omega'\varphi| \leqq L, \quad |\varphi'| \leqq L'$$

ist, so hat man

$$|u_m'| \leqq \frac{e^{r\omega\sin\vartheta}(Lr+L')M_0N(MN)^{m-1}(x-a)^m}{m!\,r^m} + \frac{e^{r\omega\sin\vartheta}(Lr+L')M_1N(MN)^{m-2}(x-a)^{m-1}}{(m-1)!\,r^m},$$

woraus das Behauptete folgt. Die gleichmässige Convergenz der Reihen

$$\frac{e^{ik\omega}}{k^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{d^2u_m}{dx^2},$$

$$e^{ik\omega}k^n\sum_{m=n+2}^{\infty}\frac{d^2u_m}{dx^2} \qquad (n = -1, 0, 1, \ldots)$$

ergiebt sich daraus, dass $D(u_m) = Qu_{m-1}$ oder

$$\frac{d^2u_m}{dx^2} = -\frac{d\log A}{dx}\frac{du_m}{dx} - \left(k^2\frac{B}{A} + \frac{C}{A} + Q\right)u_m + Qu_{m-1}$$

ist. Es ist also

$$\lim_{m=\infty} D(u_0 + u_1 + \cdots + u_m) = D(u_0 + u_1 + u_2 + \cdots).$$

Durch Addition der Gleichungen

$$D(u_0) = 0, \quad D(u_1) = Qu_0, \ \ldots, \ D(u_m) = Qu_{m-1}$$

erhält man

$$D(u_0 + u_1 + \cdots + u_m) = Q(u_0 + u_1 + \cdots + u_{m-1})$$

und hieraus für $m = \infty$

$$D(u_0 + u_1 + \cdots) = Q(u_0 + u_1 + \cdots);$$

d. h. die Reihe

$$y = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

genügt der Differentialgleichung (α).

§ 3.

Zur Untersuchung des Verhaltens der Reihenglieder u_m für grosse Werthe von k dient die folgende Hilfsbetrachtung.

Es sei $f(x)$ eine nebst ihren Ableitungen für $a \leqq x \leqq b$ stetige Function von x. Wir setzen

$$f_0 = f, \quad f_1 = \frac{d}{dx}\frac{f}{\omega'}, \quad f_2 = \frac{d}{dx}\frac{f_1}{\omega'}, \ldots.$$

Dann ist

$$e^{-ik\omega}\int_a^x e^{2ik\omega} f_\nu(x)\,dx = \frac{f_\nu(x)e^{ik\omega}}{2ik\omega'(x)} - \frac{f_\nu(a)e^{-ik\omega}}{2ik\omega'(a)}$$

$$-\frac{1}{2ik}\,e^{-ik\omega}\int_a^x e^{2ik\omega} f_{\nu+1}(x)\,dx \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Daraus folgt

$$J_1 = e^{-ik\omega}\int_a^x e^{2ik\omega} f(x)\,dx$$

$$= \frac{e^{ik\omega}}{2ik\omega'(x)}\left[f_0(x) - \frac{f_1(x)}{2ik} + \frac{f_2(x)}{(2ik)^2} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1} f_{n-1}(x)}{(2ik)^{n-1}}\right]$$

$$- \frac{e^{-ik\omega}}{2ik\omega'(a)}\left[f_0(a) - \frac{f_1(a)}{2ik} + \frac{f_2(a)}{(2ik)^2} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1} f_{n-1}(a)}{(2ik)^{n-1}}\right]$$

$$+ \frac{(-1)^n e^{-ik\omega}\varrho_n}{(2ik)^n},$$

wobei gesetzt ist:

$$\varrho_n = \int_a^x e^{2ik\omega} f_n(x)\,dx\,.$$

Es ist aber

$$\varrho_n = \frac{f_n(x)e^{2ik\omega}}{2ik\omega'(x)} - \frac{f_n(a)}{2ik\omega'(a)} - \frac{1}{2ik}\int_a^x e^{2ik\omega} f_{n+1}(x)\,dx.$$

Nun ist, wenn

$$k = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$

gesetzt und $0 \leqq \vartheta \leqq \pi$ angenommen wird,

$$|e^{2ik\omega}| = e^{-2r\omega\sin\vartheta} \leqq 1,$$

$$\left|\int_a^x e^{2ik\omega} f_{n+1}(x)\,dx\right| \leqq F_{n+1}(b-a),$$

wo F_{n+1} das Maximum von $|f_{n+1}(x)|$ für $a \leqq x \leqq b$ bezeichnet. Der

absolute Betrag von ϱ_n nähert sich demnach gleichmässig der Grenze Null, wenn k mit $0 \leqq \arg k \leqq \pi$ ins Unendliche geht. Wir schreiben

$$J_1 \sim \frac{e^{ik\omega}}{2ik\omega'(x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu f_\nu(x)}{(2ik)^\nu} - \frac{e^{-ik\omega}}{2ik\omega'(a)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu f_\nu(a)}{(2ik)^\nu}$$

und sagen, die Function J_1 werde durch die angeschriebene Reihe asymptotisch dargestellt.

In demselben Sinne wird $\frac{dJ_1}{dx}$ asymptotisch dargestellt durch die Reihe, welche man durch formale Differentiation der asymptotischen Reihe für J_1 erhält:

$$\frac{dJ_1}{dx} \sim \frac{e^{ik\omega}}{2}\left[f_0(x) + \frac{f_1(x)}{2ik} - \frac{f_2(x)}{(2ik)^2} + \cdots\right] + \frac{e^{-ik\omega}\omega'}{2\omega'(a)}\left[f_0(a) - \frac{f_1(a)}{2ik} + \frac{f_2(a)}{(2ik)^2} - \cdots\right],$$

d. h. $\frac{dJ_1}{dx}$ unterscheidet sich von dem Ausdruck, welchen man erhält, wenn man sich in jeder Klammer auf die $n+1$ ersten Glieder beschränkt, um

$$\frac{e^{-ik\omega}}{(2ik)^n}\varrho_n',$$

wo

$$\lim_{k=\infty} \varrho_n' = 0$$

ist. Dies ergiebt sich, wenn in

$$\frac{dJ_1}{dx} = e^{ik\omega} f(x) - ik\omega' J_1$$

für J_1 der asymptotische Ausdruck gesetzt wird. Ebenso findet man, dass $\frac{d^2J_1}{dx^2}$ asymptotisch dargestellt wird durch die Reihe, welche man durch zweimalige Differentiation der Reihe für J_1 erhält.

In ähnlicher Weise findet man

$$J_2 = e^{ik\omega}\int_a^x e^{-2ik\omega} f(x)\,dx$$

$$= -\frac{e^{-ik\omega}}{2ik\omega'(x)}\left[f_0(x) + \frac{f_1(x)}{2ik} + \cdots + \frac{f_{n-1}(x)}{(2ik)^{n-1}}\right] + \frac{e^{ik\omega}}{2ik\omega'(a)}\left[f_0(a) + \frac{f_1(a)}{2ik} + \cdots + \frac{f_{n-1}(a)}{(2ik)^{n-1}}\right] + \frac{e^{-ik\omega}\varrho_n}{(2ik)^n},$$

wenn gesetzt wird:

$$\varrho_n = e^{2ik\omega}\int_a^x e^{-2ik\omega} f_n(x)\,dx.$$

Es ist

$$\varrho_n = -\frac{f_n(x)}{2ik\omega'(x)} + \frac{f_n(a)\,e^{2ik\omega}}{2ik\omega'(a)} + \frac{1}{2ik}\,e^{2ik\omega}\int_a^x e^{-2ik\omega} f_{n+1}(x)\,dx.$$

Wir haben

$$\left| e^{2ik\omega}\int_a^x e^{-2ik\omega} f_{n+1}(x)\,dx \right| \leqq e^{-2r\omega\sin\vartheta}\int_a^x e^{2r\omega\sin\vartheta} F_{n+1}\,dx \leqq F_{n+1}(b-a),$$

wobei zu berücksichtigen ist, dass $e^{2r\omega\sin\vartheta}$ für die obere Grenze x grösser ist als an einer anderen Stelle des Integrationsweges. Daher hat auch jetzt ϱ_n die vorhin angegebene Eigenschaft. Wir schreiben

$$J_2 \sim -\frac{e^{-ik\omega}}{2ik\omega'(x)}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{f_\nu(x)}{(2ik)^\nu} + \frac{e^{ik\omega}}{2ik\omega'(a)}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{f_\nu(a)}{(2ik)^\nu}.$$

Wie vorhin sieht man, dass diese asymptotische Gleichung nach x differentiirt werden darf.

§ 4.

Vermittelst des in § 3 entwickelten Hilfssatzes bilden wir asymptotische Ausdrücke für die Glieder u_m der in § 2 aufgestellten Reihe.

Zunächst ist

$$u_0 = \frac{e^{ik\omega}\varphi_0}{2} + \frac{e^{-ik\omega}\varphi_0}{2}.$$

Demnach wird

$$u_1 = \frac{e^{ik\omega}\varphi_0}{4ik}\int_a^x \frac{Q}{\omega'}\,dx - \frac{e^{-ik\omega}\varphi_0}{4ik}\int_a^x \frac{Q}{\omega'}\,dx - \frac{e^{-ik\omega}\varphi_0}{4ik}\int_a^x \frac{e^{2ik\omega}Q}{\omega'}\,dx + \frac{e^{ik\omega}\varphi_0}{4ik}\int_a^x \frac{e^{-2ik\omega}Q}{\omega'}\,dx + \frac{(\alpha_0' - \alpha_0\varphi'(a))\,\varphi e^{ik\omega}}{2ik\omega'(a)\varphi(a)} - \frac{(\alpha_0' - \alpha_0\varphi'(a))\,\varphi e^{-ik\omega}}{2ik\omega'(a)\varphi(a)}.$$

Indem wir für das dritte und vierte Integral nach § 3 asymptotische Ausdrücke bilden, erhalten wir die asymptotische Gleichung

$$u_1 = e^{ik\omega}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{F_{1\nu}}{(ik)^\nu} + e^{-ik\omega}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{F_{1\nu}}{(-ik)^\nu} + \frac{e^{-ik\omega}\varrho_{1n}}{k^n},$$

wo ϱ_{1n} mit unendlich wachsendem $|k|$ gleichmässig zur Grenze Null geht für $0 \leqq \arg k \leqq \pi$ und für $a \leqq x \leqq b$.

Nehmen wir an, es bestehe auch die Gleichung

$$u_{m-1} = e^{ik\omega} \sum_{\nu=m-1}^{n} \frac{F_{m-1,\nu}}{(ik)^\nu} + e^{-ik\omega} \sum_{\nu=m-1}^{n} \frac{F_{m-1,\nu}}{(-ik)^\nu} + \frac{e^{-ik\omega} \varrho_{m-1,n}}{k^n},$$

wo $\varrho_{m-1,n}$ die vorhin für ϱ_{1n} angegebene Eigenschaft besitzt. Dann ist

$$u_m = \frac{e^{ik\omega}\varphi}{2ik} \sum_{\nu=m-1}^{n} \int_a^x \frac{Q F_{m-1,\nu}}{(ik)^\nu \omega' \varphi} dx$$

$$- \frac{e^{-ik\omega}\varphi}{2ik} \sum_{\nu=m-1}^{n} \int_a^x \frac{Q F_{m-1,\nu}}{(-ik)^\nu \omega' \varphi} dx$$

$$- \frac{e^{-ik\omega}\varphi}{2ik} \sum_{\nu=m-1}^{n} \int_a^x \frac{e^{2ik\omega} Q F_{m-1,\nu}}{(ik)^\nu \omega' \varphi} dx$$

$$+ \frac{e^{ik\omega}\varphi}{2ik} \sum_{\nu=m-1}^{n} \int_a^x \frac{e^{-2ik\omega} Q F_{m-1,\nu}}{(-ik)^\nu \omega' \varphi} dx$$

$$- \frac{e^{-ik\omega}\varphi}{2ik^{n+1}} \int_a^x \frac{Q \varrho_{m-1,n}}{\omega' \varphi} dx$$

$$+ \frac{e^{ik\omega}\varphi}{2ik^{n+1}} \int_a^x \frac{e^{-2ik\omega} Q \varrho_{m-1,n}}{\omega' \varphi} dx.$$

Daraus folgt

$$u_m = e^{ik\omega} \sum_{\nu=m}^{n} \frac{F_{m\nu}}{(ik)^\nu} + e^{-ik\omega} \sum_{\nu=m}^{n} \frac{F_{m\nu}}{(-ik)^\nu} + \frac{e^{-ik\omega} \varrho_{mn}}{k^n},$$

wo ϱ_{mn} die wiederholt angegebene Eigenschaft besitzt. Dabei sind die Glieder mit dem Nenner k^{n+1} in das Restglied einbezogen.

Für $m > n$ setzen wir

$$u_m = \frac{e^{-ik\omega} \varrho_{mn}}{k^n}, \qquad \lim_{k=\infty} \varrho_{mn} = 0.$$

Der Gleichmässigkeit halber schreiben wir

$$u_0 = e^{ik\omega} F_0 + e^{-ik\omega} F_0.$$

Wir setzen

$$F_\nu = F_{1\nu} + F_{2\nu} + \cdots + F_{\nu\nu} \qquad (\nu = 1,2,\ldots n),$$
$$\varrho_n = \varrho_{1n} + \varrho_{2n} + \cdots.$$

Dann ist

$$y = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$
$$= e^{ik\omega} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{F_\nu}{(ik)^\nu} + e^{-ik\omega} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{F_\nu}{(-ik)^\nu} + \frac{e^{-ik\omega}\varrho_n}{k^n}.$$

Die Reihe

$$e^{ik\omega} k^n (u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots)$$

oder, was dasselbe ist, die Reihe

$$\varrho_{n+1,n} + \varrho_{n+2,n} + \cdots$$

ist für $|k| \geq R > 0$, $0 \leq \arg k \leq \pi$ und für $a \leq x \leq b$ gleichmässig convergent. Man kann also nach Angabe einer beliebig kleinen positiven Grösse ε $p \geq n$ so gross wählen, dass für alle angegebenen Werthe von x und k

$$|\varrho_{p+1,n} + \varrho_{p+2,n} + \cdots| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Ferner kann man R so gross annehmen, dass

$$|\varrho_{1n} + \varrho_{2n} + \cdots + \varrho_{pn}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

wird. Es ist demnach $|\varrho_n| < \varepsilon$ für $|k| \geq R$, $0 \leq \arg k \leq \pi$, $a \leq x \leq b$; es besteht die asymptotische Gleichung

$$y \sim e^{ik\omega} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{F_\nu}{(ik)^\nu} + e^{-ik\omega} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{F_\nu}{(-ik)^\nu},$$

wo $F_0, F_1, F_2, \ldots$ reelle Functionen von x sind. Setzen wir

$$\varphi_0 = 2F_0,\ \varphi_1 = 2F_1,\ \varphi_2 = -2F_2,\ \varphi_3 = -2F_3, \ldots,$$

so haben wir die asymptotische Gleichung

$$y \sim \cos k\omega \left(\varphi_0 + \frac{\varphi_2}{k^2} + \cdots\right) + \sin k\omega \left(\frac{\varphi_1}{k} + \frac{\varphi_3}{k^3} + \cdots\right);$$

d. h. es ist

$$y = \cos k\omega \sum_{2\nu \leq n} \frac{\varphi_{2\nu}}{k^{2\nu}} + \sin k\omega \sum_{2\nu+1 \leq n} \frac{\varphi_{2\nu+1}}{k^{2\nu+1}} + \frac{e^{-ik\omega}\varrho_n}{k^n},$$

wo $\lim \varrho_n = 0$ ist, wenn k in der angegebenen Weise ins Unendliche geht.

Für reelle Werthe von k ist auch das Restglied reell. Setzt man $\varrho_n = \xi_n + i\eta_n$, so wird

$$\frac{e^{-ik\omega}\varrho_n}{k^n} = \frac{\xi_n \cos k\omega + \eta_n \sin k\omega}{k^n},$$

und man hat

$$\lim \xi_n = 0, \quad \lim \eta_n = 0,$$

wenn k als reelle Grösse unendlich gross wird.

§ 5.

Die soeben bewiesene asymptotische Gleichung kann differentiirt werden. Im § 3 wurde gezeigt, dass die Ableitungen der Functionen J_1 und J_2 nach x asymptotisch dargestellt werden durch die Reihen, welche man durch formale Differentiation der dortigen Reihen erhält. Dasselbe gilt also auch für die mit $e^{ik\omega}$ bezw. $e^{-ik\omega}$ multiplicirten Integrale, welche in dem in § 4 aufgestellten Ausdruck für u_m auftreten. Es wird demnach $\frac{du_m}{dx}$ asymptotisch dargestellt durch die Reihe, welche man durch formale Differentiation von

$$e^{ik\omega} \sum_{\nu=m}^{\infty} \frac{F_{m\nu}}{(ik)^\nu} + e^{-ik\omega} \sum_{\nu=m}^{\infty} \frac{F_{m\nu}}{(-ik)^\nu}$$

erhält, d. h. es ist

$$\frac{du_m}{dx} = e^{ik\omega} \left(\frac{\omega' F_{mm}}{(ik)^{m-1}} + \sum_{\nu=m}^{n} \frac{\omega' F_{m,\nu+1} + F_{m\nu}}{(ik)^\nu} \right)$$
$$+ e^{-ik\omega} \left(\frac{\omega' F_{mm}}{(-ik)^{m-1}} + \sum_{\nu=m}^{n} \frac{\omega' F_{m,\nu+1} + F'_{m\nu}}{(-ik)^\nu} \right)$$
$$+ \frac{e^{-ik\omega} \varrho'_{mn}}{k^n}, \quad \lim_{k=\infty} \varrho'_{mn} = 0.$$

Für $m > n+1$ schreiben wir

$$\frac{du_m}{dx} = \frac{e^{-ik\omega} \varrho'_{mn}}{k^n}, \quad \lim_{k=\infty} \varrho'_{mn} = 0,$$

während

$$\frac{du_{n+1}}{dx} = e^{ik\omega} \frac{\omega' F_{n+1,n+1}}{(ik)^n} + e^{-ik\omega} \frac{\omega' F_{n+1,n+1}}{(-ik)^n}$$
$$+ \frac{e^{-ik\omega} \varrho'_{n+1,n}}{k^n}$$

ist. Hieraus folgt

$$\frac{dy}{dx} = e^{ik\omega} \left(ik\omega' F_0 + \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\omega' F_{\nu+1} + F'_\nu}{(ik)^\nu} \right)$$
$$+ e^{-ik\omega} \left(-ik\omega' F_0 + \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\omega' F_{\nu+1} + F'_\nu}{(-ik)^\nu} \right) + \frac{e^{-ik\omega} \varrho'_n}{k^n},$$

wo

$$\varrho'_n = \varrho'_{1n} + \varrho'_{2n} + \cdots$$

ist. Wegen der gleichmässigen Convergenz der Reihe

$$e^{ik\omega}k^n \sum_{m=n+2}^{\infty} \frac{du_m}{dx} = \sum_{m=n+2}^{\infty} \varrho'_{mn}$$

nähert sich ϱ'_n gleichmässig der Grenze Null, wenn k mit $0 \leqq \arg k \leqq \varkappa$ unendlich gross wird. Wir können schreiben:

$$\frac{dy}{dx} \sim \cos k\omega \left((\varphi_0' + \omega'\varphi_1) + \frac{\varphi_2' + \omega'\varphi_3}{k^2} + \cdots\right)$$
$$+ \sin k\omega \left(-k\omega'\varphi_0 + \frac{\varphi_1' - \omega'\varphi_2}{k} + \cdots\right).$$

Aehnlich findet man die asymptotische Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} \sim \cos k\omega \,(-k^2\omega'^2\varphi_0 + \cdots)$$
$$+ \sin k\omega \left(-k(2\omega'\varphi_0' + \omega''\varphi_0 + \omega'^2\varphi_0) + \cdots\right).$$

Nun lässt sich zeigen, dass die für y gefundene asymptotische Reihe der Differentialgleichung (α) formell genügt. Durch Einsetzen der Reihe für y wird die linke Seite von (α)

$$\Delta(y) \sim \sum_{\nu=-2}^{+\infty} \frac{H_\nu}{k^\nu},$$

wo H_ν eine mit $\cos k\omega$ oder $\sin k\omega$ multiplicirte Function von x ist, je nachdem ν gerade oder ungerade ist. Es ist

$$\Delta(y) = \sum_{\nu=-2}^{+n} \frac{H_\nu}{k^\nu} + \frac{\xi_n \cos k\omega + \eta_n \sin k\omega}{k^n};$$

wenn k als reelle positive Grösse ins Unendliche geht, ist

$$\lim \xi_n = 0, \quad \lim \eta_n = 0,$$
$$\lim (\xi_n \cos k\omega + \eta_n \sin k\omega) = 0.$$

Wenn $H_{-2} = 0$, $H_{-1} = 0, \ldots H_{n-1} = 0$ ist, so erhält man durch Multiplication der Gleichung $\Delta(y) = 0$ mit k^n

$$H_n + \xi_n \cos k\omega + \eta_n \sin k\omega = 0$$

und hieraus für $\lim k = +\infty$

$$H_n = 0.$$

Für $x = a$ bestehen die asymptotischen Gleichungen

$$\alpha_0 \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varphi_{2\nu}(a)}{k^{2\nu}},$$

$$\alpha_0' \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varphi'_{2\nu}(a) + \omega'(a)\varphi_{2\nu+1}(a)}{k^{2\nu}}.$$

Dies ist aber nur möglich, wenn

$$\varphi_0(a) = \alpha_0, \quad \varphi_{2\nu}(a) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$
$$\varphi_0'(a) + \omega'(a)\,\varphi_1(a) = \alpha_0', \qquad \varphi_{2\nu}'(a) + \omega'(a)\,\varphi_{2\nu+1}(a) = 0$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots)$$

ist. Dadurch, dass die asymptotische Reihe für y der Differentialgleichung (α) formell genügen und dass die Functionen $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ für $x = a$ die soeben angegebenen Werthe annehmen sollen, ist diese Reihe vollständig bestimmt; sie muss also mit der in § 1 berechneten Reihe (β) übereinstimmen.

Als Hauptergebniss der bisherigen Entwicklungen haben wir den Satz:

Das durch die Anfangsbedingungen

$$y = \alpha_0, \quad \frac{dy}{dx} = \alpha_0' \quad \textit{für} \quad x = a$$

bestimmte Integral der Differentialgleichung

$$\frac{d\left(A\frac{dy}{dx}\right)}{dx} + (k^2 B + C)\,y = 0$$

wird durch die in § 1 *berechnete, der Differentialgleichung formell genügende Reihe*

$$y = \cos k\omega\left(\varphi_0 + \frac{\varphi_2}{k^2} + \cdots\right) + \sin k\omega\left(\frac{\varphi_1}{k} + \frac{\varphi_3}{k^3} + \cdots\right)$$

für grosse Werthe des Parameters k^2 asymptotisch dargestellt; d. h. die Reihe, welche man erhält, wenn man $\varphi_{n+1}, \varphi_{n+2} \ldots$) durch 0 ersetzt, unterscheidet sich von y um*

$$\frac{e^{-ik\omega}\varrho_n}{k^n},$$

wo sich ϱ_n gleichmässig der Grenze Null nähert, wenn der Parameter k mit $0 \leqq \arg k \leqq \pi$ ins Unendliche geht.

§ 6.

Wir bezeichnen mit y das Integral der Differentialgleichung (α) mit den Anfangsbedingungen

$$y = 1, \quad \frac{dy}{dx} = h \quad \text{für} \quad x = a,$$

wo h eine positive Grösse ist. Es bestehen dann die asymptotischen Gleichungen

$$y \sim \cos k\omega \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varphi_{2\nu}}{k^{2\nu}} + \sin k\omega \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_{2\nu-1}}{k^{2\nu-1}},$$

*) Dabei ist n irgend eine der Zahlen 0, 1, 2, ...

$$\frac{dy}{dx} \sim \cos k\omega \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varphi'_{2\nu} + \omega' \varphi_{2\nu+1}}{k^{2\nu}}$$
$$+ \sin k\omega \left(- k\omega' \varphi_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi'_{2\nu-1} - \omega' \varphi_{2\nu}}{k^{2\nu-1}} \right),$$

wenn in den in § 1 aufgestellten Formeln für $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_0' = h$$

gesetzt wird; daraus folgt, wenn unter H wieder eine positive Grösse verstanden wird, die asymptotische Gleichung

$$\frac{dy}{dx} + Hy \sim \cos k\omega \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varphi'_{2\nu} + H\varphi_{2\nu} + \omega' \varphi_{2\nu+1}}{k^{2\nu}}$$
$$+ \sin k\omega \left(- k\omega' \varphi_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi'_{2\nu-1} + H\varphi_{2\nu-1} - \omega' \varphi_{2\nu}}{k^{2\nu-1}} \right).$$

Der Werth, welchen die Function

$$\frac{dy}{dx} + Hy$$

für $x = b$ annimmt und welcher eine ganze transcendente Function von k^2 ist, werde mit $F(k^2)$ bezeichnet; es ist

$$F(k^2) \sim \cos k\varpi \left(\gamma_0 + \frac{\gamma_2}{k^2} + \cdots \right)$$
$$+ \sin k\varpi \left(\gamma_{-1} k + \frac{\gamma_1}{k} + \frac{\gamma_3}{k^3} + \cdots \right);$$

dabei ist

$$\varpi = \omega(b) = \int_a^b \sqrt{\frac{B}{A}}\, dx,$$

und $\gamma_{-1}, \gamma_0, \ldots$ sind die Werthe, welche die Functionen

$$- \omega' \varphi_0, \ \varphi_0' + H\varphi_0 + \omega' \varphi_1, \ldots,$$

in welchen $\alpha_0 = 1$, $\alpha_0' = h$ gesetzt ist, für $x = b$ annehmen.

Die Werthe von k^2, für welche die Differentialgleichung (α) ein die Bedingungen

$$\frac{dy}{dx} - hy = 0 \quad \text{für} \quad x = a,$$
$$\frac{dy}{dx} + Hy = 0 \quad \text{für} \quad x = b$$

erfüllendes Integral besitzt, sind die Wurzeln der Gleichung

$$F(k^2) = 0.$$

Wir lösen zunächst diese Gleichung, nachdem für $F(k^2)$ der asymptotische Ausdruck gesetzt ist, formal auf. Es ist

$$k\varpi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\gamma_0 + \frac{\gamma_2}{k^2} + \cdots}{\gamma_{-1}k + \frac{\gamma_1}{k} + \cdots}\right)$$
$$= \frac{\delta_1}{k} + \frac{\delta_3}{k^3} + \cdots + 2\lambda\pi,$$

wo $\delta_1 = -\frac{\gamma_0}{\gamma_{-1}}$ u. s. w. ist, während λ eine ganze Zahl ist, welche wir positiv annehmen. Setzt man

$$k = \frac{2\pi}{\varpi(1+\varkappa)},$$

so erhält man zwischen $\varkappa$ und λ die Gleichung

$$0 = \varkappa - \varkappa^2 + \cdots + \frac{\delta_1\varpi(1+\varkappa)}{\lambda^2\pi^2} + \frac{\delta_3\varpi^3(1+\varkappa)^3}{\lambda^4\pi^4} + \cdots,$$

aus welcher man

$$\varkappa = \frac{\varkappa_2}{\lambda^2} + \frac{\varkappa_4}{\lambda^4} + \cdots$$

berechnet, wo

$$\varkappa_2 = -\frac{\delta_1\varpi}{\pi^2}$$

ist. Demnach ist

$$k = \frac{\lambda\pi}{\pi\left(1 + \frac{\varkappa_2}{\lambda^2} + \frac{\varkappa_4}{\lambda^4} + \cdots\right)}$$

oder

$$k = \frac{\lambda\pi}{\varpi} + \frac{\varepsilon_1}{\lambda} + \frac{\varepsilon_3}{\lambda^3} + \cdots.$$

Dabei ist

$$\varepsilon_1 = -\frac{\pi\varkappa_2}{\varpi} = \frac{\delta_1}{\pi} = -\frac{\gamma_0}{\pi\gamma_{-1}}.$$

Um die Bedeutung der durch formale Rechnung gefundenen Reihenentwickelung für k zu erkennen, beachten wir, dass

$$F(k^2) = \cos k\varpi\left(\gamma_0 + \frac{\gamma_2}{k^2} + \cdots + \frac{\gamma_{2n-2}}{k^{2n-2}} + \frac{\xi}{k^{2n-1}}\right)$$
$$= \sin k\varpi\left(\gamma_{-1}k + \frac{\gamma_1}{k} + \cdots + \frac{\gamma_{2n-1}}{k^{2n-1}} + \frac{\eta}{k^{2n-1}}\right)$$

ist, wo

$$\lim \xi = 0, \quad \lim \eta = 0$$

ist, wenn k als reelle positive Grösse ins Unendliche geht*). Nun schreibt sich die Gleichung $F(k^2) = 0$ in der Form

$$f(k) = -k\varpi + \operatorname{arctg}\left(-\frac{\gamma_0 + \cdots + \frac{\gamma_{2n-2}}{k^{2n-2}} + \frac{\tau}{k^{2n-1}}}{\gamma_{-1}k + \cdots + \frac{\gamma_{2n-1}}{k^{2n-1}} + \frac{\eta}{k^{2n-1}}}\right)$$
$$= -k\varpi + \lambda\pi + \frac{\delta_1}{k} + \cdots + \frac{\delta_{2n-1}}{k^{2n-1}} + \frac{\tau}{k^{2n-1}} = 0,$$

*) Vgl. den Schluss von § 4.

wo

$$\lim_{k=+\infty} \tau = 0$$

ist. Die Gleichung

$$f_n(k) = -k\varpi + \lambda\pi + \frac{\delta_1}{k} + \cdots + \frac{\delta_{2n-1}}{k^{2n-1}} = 0$$

kann auf dem vorhin eingeschlagenen Wege gelöst werden, da jetzt nur convergente Reihen auftreten. Ersetzt man in der oben ausgeführten formalen Rechnung $\delta_{2n+1}, \delta_{2n+3}, \cdots$ durch 0, so bleiben die Grössen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{2n-1}$ ungeändert, und man erhält die für hinreichend grosse Werthe von λ convergente Reihe

$$K_\lambda = \frac{\lambda\pi}{\varpi} + \frac{\varepsilon_1}{\lambda} + \cdots + \frac{\varepsilon_{2n-1}}{\lambda^{2n-1}} + \frac{\varepsilon'_{2n+1}}{\lambda^{2n+1}} + \cdots,$$

welche, jedem grossen ganzen positiven λ entsprechend, eine Wurzel der Gleichung $f_n(k) = 0$ darstellt. Wir bezeichnen mit δ eine beliebig kleine positive Zahl und zeigen, dass, wenn man λ hinreichend gross nimmt, zwischen $K_\lambda - \frac{\delta}{\lambda^{2n-1}}$ und $K_\lambda + \frac{\delta}{\lambda^{2n-1}}$ eine Wurzel k_λ der Gleichung $f(k) = 0$ liegt. Es ist nämlich

$$f\left(K_\lambda + \frac{\delta}{\lambda^{2n-1}}\right) = f(K_\lambda) + \frac{\delta}{\lambda^{2n-1}} f'\left(K_\lambda + \Theta \frac{\delta}{\lambda^{2n-1}}\right),$$

$$f\left(K_\lambda - \frac{\delta}{\lambda^{2n-1}}\right) = f(K_\lambda) - \frac{\delta}{\lambda^{2n-1}} f'\left(K_\lambda - \Theta_1 \frac{\delta}{\lambda^{2n-1}}\right),$$

wo Θ und Θ_1 zwischen 0 und 1 liegen; wir haben

$$f(K_\lambda) = \frac{\tau(K_\lambda)}{K_\lambda^{2n-1}}, \qquad \lim_{\lambda=\infty} \tau(K_\lambda) = 0,$$

während sich

$$f'\left(K_\lambda + \Theta \frac{\delta}{\lambda^{2n-1}}\right)$$

und

$$f'\left(K_\lambda - \Theta_1 \frac{\delta}{\lambda^{2n-1}}\right)$$

mit unendlich wachsendem λ dem Grenzwerth $-\varpi$ nähern. Daraus folgt, dass

$$f\left(K_\lambda + \frac{\delta}{\lambda^{2n-1}}\right), \quad f\left(K_\lambda - \frac{\delta}{\lambda^{2n-1}}\right)$$

für hinreichend grosse Werthe von λ verschiedene Vorzeichen besitzen. Die Gleichung $f(k) = 0$ hat also eine Wurzel k_λ, welche die Bedingung

$$K_\lambda - \frac{\delta}{\lambda^{2n-1}} < k_\lambda < K_\lambda + \frac{\delta}{\lambda^{2n-1}}$$

oder

$$|\lambda^{2n-1}(k_\lambda - K_\lambda)| < \delta$$

erfüllt. Setzt man

$$k_\lambda = \frac{\lambda\pi}{\varpi} + \frac{\varepsilon_1}{\lambda} + \cdots + \frac{\varepsilon_{2n-1}}{\lambda^{2n-1}} + \frac{\varrho_{2n-1}}{\lambda^{2n-1}},$$

so ist

$$\lim_{\lambda=\infty} \varrho_{2n-1} = 0,$$

womit die asymptotische Gleichung

$$k_\lambda \sim \frac{\lambda\pi}{\varpi} + \frac{\varepsilon_1}{\lambda} + \frac{\varepsilon_2}{\lambda^2} + \cdots$$

bewiesen ist*).

Das am Anfang des gegenwärtigen Paragraphen eingeführte Integral y stellt für $k = k_\lambda$ eine ausgezeichnete Lösung Y_λ unserer Differentialgleichung dar, für welche die asymptotische Darstellung gilt:

$$Y_\lambda \sim \cos k_\lambda \omega \left(\varphi_0 + \frac{\varphi_2}{k_\lambda^2} + \cdots\right) + \sin k_\lambda \omega \left(\frac{\varphi_1}{k_\lambda} + \frac{\varphi_3}{k_\lambda^3} + \cdots\right),$$

welche durch Einsetzen der asymptotischen Reihe für k_λ übergeht in

$$Y_\lambda \sim \cos \frac{\lambda\pi\omega}{\varpi}\left(\Phi_0 + \frac{\Phi_2}{\lambda^2} + \cdots\right) + \sin \frac{\lambda\pi\omega}{\varpi}\left(\frac{\Phi_1}{\lambda} + \frac{\Phi_3}{\lambda^3} + \cdots\right).$$

Dabei ist

$$\Phi_0 = \varphi_0, \quad \Phi_1 = \frac{\varpi\varphi_1}{\pi} - \varepsilon_1\omega\varphi_0.$$

Die Reihe, welche man erhält, wenn man $\Phi_{n+1}, \Phi_{n+2}, \ldots$ durch Null ersetzt, unterscheidet sich von Y_λ um

$$\frac{1}{\lambda^n}\left(\xi_n \cos\frac{\lambda\pi\omega}{\varpi} + \eta_n \sin\frac{\lambda\pi\omega}{\varpi}\right),$$

wo

$$\lim_{\lambda=\infty} \xi_n = 0, \quad \lim_{\lambda=\infty} \eta_n = 0$$

ist.

Die Aenderungen, welche die bisherigen Entwicklungen erfahren, wenn $h = \infty$, $H = \infty$ ist, wenn es sich also um ausgezeichnete Lösungen handelt, welche für $x = a$ und für $x = b$ verschwinden, sind leicht ersichtlich.

Aus der asymptotischen Darstellung der ganzen transcendenten Function $F(k^2)$ lässt sich deren Geschlecht in ähnlicher Weise ermitteln, wie ich im 49. Bd. der Math. Ann. (S. 485ff.) das Geschlecht der

*) Man weiss, dass sämmtliche Wurzeln k^2 der Gleichung $F(k^2) = 0$ reell sind und dass sich darunter negative entweder gar nicht oder nur in endlicher Anzahl befinden. Vgl. Sturm, Liouv. Journ. Bd. I.

ganzen transcendenten Functionen bestimmt habe, welche bei der Integration einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten auftreten. Zunächst sieht man aus der asymptotischen Darstellung von k_λ, dass die Reihe

$$\sum_\lambda \frac{1}{|k_\lambda^2|}$$

convergent ist. Daraus folgt die Convergenz des unendlichen Productes

$$P(k^2) = \prod_\lambda \left(1 - \frac{k^2}{k_\lambda^2}\right),$$

welches dieselben Nullstellen besitzt wie die Function $F(k^2)$. Demnach ist

$$F(k^2) = e^{g(k^2)} P(k^2),$$

wo $g(k^2)$ eine ganze rationale oder transcendente Function ist. Es ist

$$\frac{F(k^2)}{k} = \gamma_{-1} \sin k\varpi + \varrho e^{-ik\varpi},$$

wo sich ϱ gleichmässig der Grenze Null nähert, wenn k mit

$$0 \leqq \arg k \leqq \pi$$

ins Unendliche geht. Wenn unter ε eine beliebig kleine positive Grösse verstanden wird, ist auf Grund der letzten Formel

$$|F(k^2)| < e^{|k|^{1+\varepsilon}},$$

wenn $|k|$ hinreichend gross genommen wird, während $0 \leqq \arg k \leqq \pi$ ist; da es sich aber um eine eindeutige Function von k^2 handelt, so gilt diese Ungleichung für alle Werthe von $\arg k$. Um den Nullpunkt der k-Ebene lassen sich (Hadamard, Liouv. Journ. 1893, S. 204) Kreise mit beliebig grossen Radien beschreiben, auf welchen

$$|P(k^2)| > e^{-|k|^{1+\varepsilon}}$$

ist. Demnach ist auf diesen Kreisen

$$|e^{g(k^2)}| = \left|\frac{F(k^2)}{P(k^2)}\right| < e^{2|k|^{1+\varepsilon}},$$

weshalb (Hadamard, Liouv. Journ. 1893, S. 187) $g(k^2)$ von k unabhängig sein muss. Die Productentwicklung von $F(k^2)$ ist demnach

$$F(k^2) = F(0) \prod_\lambda \left(1 - \frac{k^2}{k_\lambda^2}\right),$$

so dass $F(k^2)$ als Function von k^2 vom Geschlecht 0 ist.

Charlottenburg, 12. August 1898.

Ueber die cubischen Raumcurven, welche die Tangentenfläche einer gegebenen cubischen Raumcurve in vier, fünf oder sechs Punkten berühren.

Von

Gustav Kohn in Wien.

In dem vorliegenden Aufsatz kommt der Gedanke zur Geltung, dass die Geometrie des Systems von zwei cubischen Raumcurven als identisch angesehen werden kann mit der Geometrie der (3, 3)-Correspondenz. Diesen Gedanken in seiner allgemeinen auf die (m, n)-Correspondenz bezüglichen Fassung habe ich schon 1896 in einem Vortrage „über eine geometrische Deutung der Invarianten doppelt binärer Formen" auf der Mathematikerversammlung in Frankfurt a. M. dargelegt. In seiner speciellen Fassung soll er hier dazu dienen, einen Einblick in die verschiedenen Systeme von cubischen Raumcurven zu eröffnen, welche die Tangentenfläche einer vorgelegten cubischen Raumcurve an vier oder mehr Stellen berühren.

Sowohl die vierfach berührenden cubischen Raumcurven als auch die fünffach berührenden zerfallen in zwei Systeme, während die sechsfach berührenden ein irreducibles System bilden. Es gelingt, jedes dieser Systeme durch einfache geometrische Eigenschaften zu charakterisiren. Ein besonderes Interesse dürfte dem zuletzt erwähnten Systeme zukommen.

Eine beliebige cubische Raumcurve C, welche die Tangentenfläche der cubischen Raumcurve Γ sechsfach berührt, tritt auf als Erzeugniss von drei projectiven Reihen von Schmiegungsebenen der Curve Γ. Damit tritt die Lagenbeziehung dieser beiden Curven, von denen die erste die Tangentenfläche der zweiten überall berührt, wo sie ihr begegnet, in Parallele zur Lagenbeziehung zweier Kegelschnitte in doppelter Berührung. Allein während diese Beziehung der Kegelschnitte vertauschungsfähig ist, gilt ein Gleiches im allgemeinen nicht für die Beziehung der beiden cubischen Raumcurven C und Γ. Vertauschungsfähig wird diese Beziehung sowohl für zwei cubische Raumcurven mit sechs gemeinsamen Tangenten, als auch für zwei cubische

Raumcurven, welche dasselbe Tetraeder in gleicher Weise zum Schmiegungstetraeder haben. Die genaue Untersuchung dieser beiden Specialfälle soll indessen wegen der Fülle von geometrischen Beziehungen, zu welchen sie führt, in diese Abhandlung nicht mit aufgenommen werden*).

§ 1.

Die (3, 3)-Correspondenz zwischen incidenten Elementen einer Punktreihe 3. O. und eines Ebenenbüschels 3. O.

1. Die folgenden Untersuchungen gründen sich auf die Betrachtung einer (3, 3)-Correspondenz, welche durch Annahme von zwei cubischen Raumcurven C und Γ zwischen den Punkten der ersten und den Schmiegungsebenen der zweiten bestimmt ist. Diese Correspondenz entsteht, wenn man jedem Punkte von C die drei durch ihn gehenden Schmiegungsebenen von Γ und jeder Schmiegungsebene von Γ die drei in ihr liegenden Punkte von C als entsprechend zuweist.

Denkt man sich auf der Curve C die Werthe des Parameters x, auf der Curve Γ die Werthe des Parameters y ausgebreitet, so wird die zwischen den Parametern x und y entsprechender Elemente bestehende Gleichung (die Gleichung der (3, 3)-Correspondenz) die Form haben:

$$(1) \qquad a_{33}x^3y^3 + a_{32}x^3y^2 + \cdots + a_{10}x + a_{01}y + a_{00} = 0.$$

Diese Gleichung ist, wie jetzt gezeigt werden soll, charakteristisch für die Lagenbeziehung der Curven C und Γ, indem der Satz gilt:

Ist ein cubisches Ebenenbüschel Γ nebst der Vertheilung der Parameterwerthe y auf ihm vorgelegt, so kann man eine beliebige cubische Raumcurve C nebst der Vertheilung des Parameters x auf ihr dadurch festlegen, dass man die Gleichung (1) *der* (3, 3)*-Correspondenz zwischen incidenten Elementen von C und Γ angiebt, wobei die Coefficienten dieser Gleichung nur der Beschränkung $|a_{ik}| \neq 0$ zu unterwerfen sind, wenn C eine eigentliche cubische Raumcurve sein soll.*

Wir legen zum Zwecke des Beweises ein solches Coordinatensystem zu Grunde, dass die Parameterdarstellung des cubischen Ebenenbüschels Γ durch die Gleichungen geliefert wird:

$$(2) \qquad \varrho u_i = y^i \qquad (i = 0, 1, 2, 3),$$

wo $u_0 u_1 u_2 u_3$ die vier homogenen Coordinaten einer Ebene bedeuten. Dann wird durch die Gleichungen

$$(3) \qquad \sigma x_i = a_{3i}x^3 + a_{2i}x^2 + a_{1i}x + a_{0i} \qquad (i = 0, 1, 2, 3),$$

in denen $x_0 x_1 x_2 x_3$ die homogenen Coordinaten eines Punktes bedeuten,

*) Ein grosser Theil der Ergebnisse dieser Arbeit ist ohne Beweise schon in den Ber. der Wiener Akademie v. Dec. 1896 publicirt.

unter der Voraussetzung, dass die Determinante $|a_{ik}|$ nicht verschwindet, eine eigentliche cubische Raumcurve C gegeben sein. Diese Curve ist der Ort der Punkte, in welchen sich je drei Schmiegungsebenen von Γ schneiden, deren y-Werthe vermöge der Gleichung (1) demselben x-Werthe zugehören. Die Bedingung der vereinigten Lage des Punktes $(x_0 x_1 x_2 x_3)$ von C und der Ebene $(u_0 u_1 u_2 u_3)$ von Γ

$$u_0 x_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

geht nämlich nach Substitution der Werthe für die x_i und u_i über in die Gleichung (1) zwischen den Parametern x und y. Damit ist der oben ausgesprochene Satz bewiesen.

2. An die Parameterdarstellungen der cubischen Raumcurven Γ und C, welche durch die Gleichungen (2) und (3) gegeben sind, können wir gleich hier die Beantwortung der Frage nach der geometrischen Beziehung zwischen diesen beiden Curven anknüpfen für den Fall, dass die Gleichung (1) unserer Correspondenz in x und y symmetrisch ist. Es ergiebt sich:

Wenn die Gleichung (1) *der Correspondenz in x und y symmetrisch ist, dann sind die cubischen Raumcurven Γ und C reciproke Polaren in Bezug auf eine Oberfläche zweiten Grades.*

In der That lassen die Gleichungen (2) und (3) unter der Annahme

$$a_{ik} = a_{ki} \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3)$$

erkennen, dass eine beliebige zum Parameter y gehörige Schmiegungsebene von Γ in Bezug auf die Fläche zweiter Classe

$$\Sigma\Sigma a_{ik} u_i u_k = 0 \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3)$$

den Punkt von C als Pol besitzt, welcher zum Parameterwerth $x = y$ gehört.

Ebenso beantwortet sich eine zweite Frage: Was folgt aus der Annahme

$$a_{ik} = -a_{ki} \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3)$$

für die Curven C und Γ? Die beiden Curven sind einander in einer Nullcorrelation als entsprechend zugewiesen.

§ 2.

Charakterisirung der zu untersuchenden Curvensysteme durch die zugehörigen Correspondenzgleichungen.

3. Eine Berührung der Curve C mit der Tangentenfläche von Γ hat eine leicht anzugebende Singularität unserer (3, 3)-Correspondenz im Gefolge.

Es sei P_0 ein Punkt, in welchem C die Tangentenfläche von Γ berührt und π_0 die Tangentialebene dieser Fläche im Punkte P_0, dann

ist π_0 eine Schmiegungsebene von Γ. Es fallen nun einerseits, weil der Punkt P_0 von C auf der Tangentenfläche von Γ liegt, zwei von den drei Schmiegungsebenen, die er an die Curve Γ schickt, mit der Ebene π_0 zusammen; anderseits liegen zwei von den drei Punkten, in denen die Schmiegungsebene π_0 von Γ die Curve C trifft, im Punkte P_0 vereinigt, weil π_0 die Tangentialebene der Tangentenfläche von Γ in dem Punkte P_0 ist, in dem diese Fläche von der Curve C berührt wird.

Anders ausgesprochen: Vermöge unserer (3, 3)-Correspondenz entspricht dem Punkte P_0 von C zweimal die Schmiegungsebene π_0 von Γ, der Schmiegungsebene π_0 von Γ zweimal der Punkt P_0 von C.

Umgekehrt bringt aber ein solches Entsprechen von P_0 und π_0 es mit sich, dass die Tangentenfläche von Γ von der Curve C im Punkte P_0 berührt wird und in ihm π_0 zur Tangentialebene hat. Der Punkt P_0 von C liegt dann auf der Tangentialfläche von Γ, weil dem ersten Theil unserer Voraussetzung gemäss zwei von den durch P_0 gehenden Schmiegungsebenen von Γ mit der Ebene π_0 zusammenfallen, welche deshalb die Tangentialebene der Tangentenfläche von Γ im Punkte P_0 ist. Da aber dem zweiten Theil unserer Voraussetzung nach zwei von den drei Schnittpunkten dieser Ebene mit der Curve C im Punkte P_0 vereinigt liegen, so folgt, dass die Curve C die Tangentenfläche von Γ im Punkte P_0 berührt.

Unser Ergebniss lautet:

Damit der Punkt P_0 von C, dem der Parameter x_0 zugehört, ein Berührungspunkt der Curve C mit der Tangentenfläche von Γ sei und diese in ihm von der Ebene π_0 berührt werde, der als Schmiegungsebene von Γ der Parameter y_0 zukommt, ist nothwendig und hinreichend, dass die Gleichung (1) *unserer Correspondenz für $x = x_0$ die Doppelwurzel $y = y_0$, für $y = y_0$ die Doppelwurzel $x = x_0$ hat; mit anderen Worten: es ist nothwendig und hinreichend, dass die Curve K_6, welche durch die Gleichung* (1) *dargestellt wird, wenn man x und y als Parallelcoordinaten eines Punktes der Ebene deutet, im Punkte $x = x_0$, $y = y_0$ einen Doppelpunkt aufweist.*

4. Die Curve K_6 ist, wie aus ihrer Gleichung (1) hervorgeht, von der sechsten Ordnung und besitzt in den unendlich fernen Punkten der beiden Coordinatenaxen dreifache Punkte. Das Geschlecht von K_6 ist also i. A. $= 4$ und diese Curve kann (neben ihren zwei dreifachen Punkten) nicht mehr als 4 Doppelpunkte erhalten, ohne zu zerfallen.

Es kann also die cubische Raumcurve C die Tangentenfläche der cubischen Raumcurve Γ in höchstens 4 Punkten berühren, ohne dass die Correspondenzgleichung (1) zerfällt. Wir werfen deshalb die Frage auf, in welcher Weise diese Gleichung überhaupt zerfallen kann.

Man sieht zunächst, dass die Gleichung (1) unter der von uns

gemachten Voraussetzung, dass C und Γ eigentliche cubische Raumcurven sind, keinen Factor besitzen kann, in dem x allein, keinen, in dem y allein vorkommt. Denn einem x-Werth, welcher einen solchen nur von x abhängigen Factor zu Null macht, würde ein beliebiger y-Werth entsprechen, der x-Werth würde also einem Punkt von C als Parameter zugehören, durch den jede beliebige Schmiegungsebene von Γ hindurchgeht; ähnlich würde ein y-Werth, der einen nur y enthaltenden Factor zu Null macht, eine Schmiegungsebene von Γ liefern, die jeden beliebigen Punkt von C enthält.

Es bleiben also folgende Fälle:

Die linke Seite von (1) zerfällt:

a) in drei Factoren, von denen jeder in x und y linear ist;

b) in zwei Factoren, von denen der eine in x quadratisch, in y linear, der zweite in x linear, in y quadratisch ist;

c) in zwei Factoren, von denen der eine in x und y linear, der zweite in x und y quadratisch ist.

Wir haben daher die folgenden drei Formen der Gleichung (1) zu discutiren:

$$\text{(1a)}\qquad \begin{aligned}&(a'_{11}xy + a'_{10}x + a'_{01}y + a'_{00})\,.\\ &(a''_{11}xy + a''_{10}x + a''_{01}y + a''_{00})\,.\\ &(a'''_{11}xy + a'''_{10}x + a'''_{01}y + a'''_{00}) = 0,\end{aligned}$$

$$\text{(1b)}\qquad \begin{aligned}&(b_{21}x^2y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{10}x + b_{01}y + b_{00})\,.\\ &(b'_{21}x^2y + b'_{20}x^2 + b'_{11}xy + b'_{10}x + b'_{01}y + b'_{00}) = 0,\end{aligned}$$

$$\text{(1c)}\qquad \begin{aligned}&(c_{11}xy + c_{10}x + c_{01}y + c_{00})\,.\\ &(c'_{22}x^2y^2 + c'_{21}x^2y + \cdots + c'_{00}) = 0.\end{aligned}$$

Wenn x, y wieder als Parallelcoordinaten eines Punktes der Ebene gedeutet werden, so stellt die Gleichung (1a) drei Kegelschnitte dar. Jeder von ihnen geht durch die beiden unendlich fernen Punkte der Coordinatenaxen, so dass sich je zwei von ihnen ausserdem nur noch in zwei Punkten treffen. Die Curve K_6, die sich im Fall a) aus diesen drei Kegelschnitten zusammensetzt, hat also in diesem Fall (neben den beiden dreifachen Punkten im Unendlichen) *sechs* Doppelpunkte.

Durch die Gleichung (1b) sind zwei Curven dritter Ordnung dargestellt, von denen die eine im unendlich fernen Punkte der y-Axe einen Doppelpunkt hat, durch den unendlich fernen Punkt der x-Axe einfach hindurchgeht, während die zweite sich in diesen beiden Punkten umgekehrt verhält. Daher schneiden sich die beiden Curven ausser in diesen beiden noch in fünf Punkten. Die Curve K_6, die sich aus den beiden Curven 3. O. zusammensetzt, hat also im Falle b) (neben ihren beiden dreifachen Punkten) *fünf* Doppelpunkte.

Die Gleichung (1c) stellt einen durch die unendlich fernen Punkte der beiden Coordinatenaxen gehenden Kegelschnitt dar im Verein mit einer Curve vierter Ordnung, welche in diesen beiden Punkten Doppelpunkte hat. Ausser in diesen Punkten schneidet der Kegelschnitt die Curve 4. O. noch in vier weiteren. Die Curve K_6 hat also hier i. A. *vier* Doppelpunkte. Sie kann aber einen *fünften* erhalten, wenn die Curve 4. O. ausser den beiden Doppelpunkten im Unendlichen noch einen weiteren bekommt. Mehr als einen weiteren kann die Curve 4. O. aber nicht haben, ohne zu zerfallen, und wenn dies eintritt, haben wir den Fall a) vor uns.

5. Da nach Nr. 1, wenn die Curve Γ und die Parametervertheilung auf ihr gegeben ist, durch Annahme der Gleichung (1) unserer Correspondenz die Curve C nebst der Parametervertheilung auf ihr bestimmt wird, haben wir die folgenden Resultate:

Die cubischen Raumcurven, welche die Tangentenfläche einer vorgelegten cubischen Raumcurve Γ in sechs Punkten berühren, bilden ein irreducibles von sechs Parametern abhängiges System.

Es sind dies die Curven, welche nebst der Parametervertheilung auf ihnen gegeben sind durch Gleichungen der Correspondenz von der Form (1a). Die Gleichung (1a) enthält 9 wesentliche Constanten; da eine Parametervertheilung 3 Constanten birgt, so giebt diese Gleichung ∞^6 verschiedene Curven.

Die cubischen Raumcurven, welche die Tangentenfläche der vorgelegten cubischen Raumcurve an fünf Stellen berühren, zerfallen in zwei vollständig getrennte von je sieben Parametern abhängende Systeme.

Das erste System von fünffach berührenden Curven wird geliefert durch Correspondenzgleichungen der Form (1b), wo wieder von den 10 wesentlichen Constanten dieser Gleichungsform 3 in Abzug zu bringen sind, die von der Parametervertheilung abhängen, weswegen ∞^7 Curven resultiren.

Das zweite System von fünffach berührenden Curven wird geliefert durch einen Specialfall der Gleichungsform (1c), wo der zweite Factor der einen Bedingung unterliegt, eine *rationale* Curve darzustellen. Auch hier giebt die Abzählung ∞^7 Curven.

Endlich folgt noch:

Die cubischen Raumcurven, welche die Tangentenfläche einer vorgelegten cubischen Raumcurve an vier Stellen berühren, zerfallen in zwei völlig getrennte von je 8 Parametern abhängige Systeme und ein drittes nur von 7 Parametern abhängiges.

Von den beiden ersten Systemen wird das eine durch Correspondenzgleichungen der Form (1c) geliefert, das zweite durch Correspondenzgleichungen, welche eine rationale Curve K_6 darstellen. Die

Abzählung der Parameter, von denen die Systeme abhängen, geschieht wie oben.

Zu diesen beiden Systemen tritt, als in keinem von ihnen enthalten, das erste von den beiden Systemen fünffach berührender Curven, das wir oben angegeben haben.

§ 3.

Die vierfache Berührung.

6. Die gefundenen charakteristischen Eigenschaften der Gleichung unserer (3,3)-Correspondenz in den Fällen, wo die cubische Raumcurve C mit der Tangentenfläche von Γ an vier oder mehr Stellen eine Berührung eingeht, lassen sich leicht in geometrische Beziehungen zwischen den Curven C und Γ umsetzen.

Eine beliebige Curve C des ersten Systems von cubischen Raumcurven, welche die Tangentenfläche von Γ in vier Punkten berühren, ist gegeben durch eine Correspondenzgleichung der Form:

$$(1\,c)\quad (c_{11}xy+c_{10}x+c_{01}y+c_{00})\,(c'_{22}x^2y^2+c'_{21}x^2y+\cdots+c'_{00})=0.$$

Durch den gleich Null gesetzten ersten Factor der linken Seite dieser Gleichung wird eine projective Beziehung zwischen den Punkten von C und den Ebenen von Γ festgesetzt. Wenn es eine projective Beziehung zwischen den Punkten von C und den Ebenen von Γ giebt, bei welcher jeder Punkt in der entsprechenden Ebene liegt, so heisst dies umgekehrt soviel, dass die Gleichung unserer (3, 3)-Correspondenz, die zwischen incidenten Ebenen von Γ und Punkten von C besteht, einen in x und y linearen Factor, also die Form (1 c) besitzt. Es folgt:

Das erste System von cubischen Raumcurven, welche die Tangentenfläche von Γ vierfach berühren, besteht aus den Raumcurven 3. O., deren Punkte sich auf die Schmiegungsebenen von Γ so projectiv beziehen lassen, dass jeder Punkt in die ihm entsprechende Ebene fällt.

Man kann die Vertheilung der Parameter x und y auf den Curven C und Γ so wählen, dass die projective Beziehung durch die Gleichung $x=y$ gegeben wird, d. h. man kann unbeschadet der Allgemeinheit die Gleichung der (3,3)-Correspondenz in der Form

$$(x-y)\,(d_{22}x^2y^2+d_{21}x^2y+\cdots+d_{00})=0$$

zu Grunde legen. In dem Punkte von C mit dem Parameter x schneiden sich dann die drei Ebenen von Γ, von denen die eine dem Parameter $y=x$ zugehört, während die den beiden andern zugehörigen y-Werthe durch die Gleichung

$$(4)\qquad d_{22}x^2y^2+d_{21}x^2y+\cdots+d_{00}=0$$

geliefert werden. D. h. man erhält einen beliebigen Punkt von C als Schnittpunkt der zum Parameter x gehörigen Schmiegungsebene von Γ

mit den beiden Ebenen von Γ, welche ihr vermöge der durch die Gleichung (4) zwischen den Ebenen von Γ festgelegten (2,2)-Correspondenz entsprechen.

Die cubischen Raumcurven des ersten Systems, welche die Tangentenfläche von Γ vierfach berühren, sind durch die (2,2)-Correspondenzen auf dieser Curve gegeben. Der Ort des Schnittpunktes einer beweglichen Schmiegungsebene von Γ mit den beiden ihr vermöge einer (2,2)-Correspondenz entsprechenden Schmiegungsebenen ist eine Curve des Systems.

7. Wir betrachten jetzt den Specialfall besonders, dass die Gleichung (4) in x und y symmetrisch ist. Die Schnittlinien von entsprechenden Ebenen der dann durch die Gleichung (4) gegebenen *symmetrischen* (2,2)-Correspondenz auf der Curve Γ werden nach Cayley*) eine Regelfläche 4. Grades bilden. Für diese Fläche werden die Ebenen von Γ Doppeltangentialebenen und die Punkte von C Doppelpunkte sein. Denn in einer beliebigen Ebene von Γ liegen *zwei* Erzeugende der Fläche, nämlich die Schnittlinien der Ebene mit den beiden entsprechenden Ebenen, und durch den Treffpunkt dieser drei Ebenen, der ein Punkt von C ist, gehen dieselben beiden Erzeugenden der Fläche. *Die Beziehung zwischen den Curven Γ und C besteht* also *darin, dass die Developpable der ersten einer Regelfläche 4. Grades doppelt umschrieben ist, der die zweite als Doppelcurve angehört.*

Unsere Regelfläche 4. Grades ist, wie bekannt, in einem linearen Complex (Strahlengewinde) enthalten. Es folgt dies daraus, dass ein beliebiger linearer Complex mit einer Regelfläche 4. Grades vier Strahlen gemein hat, sodass der lineare Complex, welcher durch fünf Strahlen der Fläche bestimmt ist, alle ihre Strahlen enthält. In dem Nullsystem dieses Complexes wird nun einer beliebigen Ebene von Γ, weil sie zwei Erzeugende der Regelfläche enthält, der Schnittpunkt dieser Erzeugenden als Nullpunkt zugehören. *Die Curven C und Γ sind* also *zwei cubische Raumcurven, die einander in einem Nullsystem entsprechen, und diese Eigenschaft charakterisirt ihre Beziehung vollständig.* Denn haben zwei cubische Raumcurven diese Eigenschaft, so sieht man sofort, dass von den Schmiegungsebenen, die durch einen Punkt der einen Curve an die andere gelegt werden können, die eine die Nullebene des Punktes ist und die beiden anderen ihr in einer symmetrischen (2,2)-Correspondenz zwischen den Schmiegungsebenen der zweiten Curve entsprechen.

Dem linearen Complex, in dessen Nullsystem einander die Curven C und Γ entsprechen, werden vier Tangenten der einen Curve angehören,

*) Siehe „A Second Memoir on Skew Surfaces, otherwise Scrolls", Philos. Transactions of the R. Soc., t. 154 (Mathemat. Papers, t. 5).

(weil ihre Tangentenfläche vom 4. Grade ist) und da jeder Complexstrahl sich im Nullsystem selbst entspricht, so werden dieselben vier Geraden auch Tangenten der anderen Curve sein. *Die Curven C und Γ haben also vier gemeinsame Tangenten.* Auch diese Eigenschaft charakterisirt ihre Lagenbeziehung vollständig, wofür wir den Nachweis jedoch unterdrücken wollen.

8. Kehren wir wieder zum allgemeinen Fall zurück. Die Curve C erscheint hier als Ort der Schnittpunkte einer beliebigen Ebene von Γ mit den beiden ihr in einer (2,2)-Correspondenz in diesem cubischen Ebenenbüschel entsprechenden Ebenen. Diese beiden Ebenen selbst entsprechen *einander*, aber, wie sofort zu sehen, in einer *symmetrischen* (2,2)-Correspondenz im Ebenenbüschel 3. O. Γ. Die Schnittlinien von je zwei solchen Ebenen werden deshalb der letzten Nr. zufolge eine Regelfläche 4. Grades bilden, für welche die Ebenen von Γ Doppeltangentialebenen sind, und auf dieser Fläche, wird die Curve C liegen.

Wir wollen nun zeigen, dass umgekehrt, wenn eine cubische Raumcurve C auf einer Regelfläche 4. Grades liegt, welche der Developpablen der cubischen Raumcurve Γ doppelt eingeschrieben ist, jene Curve C dem ersten System von die Tangentenfläche von Γ vierfach berührenden cubischen Raumcurven angehört. Beim Beweise setzen wir voraus, dass C eine einfache Curve der Regelfläche 4. Grades ist; wenn sie eine Doppelcurve ist, so enthält schon die letzte Nr. den Beweis. Es wird dann durch einen beliebigen Punkt P von C eine einzige Erzeugende der Fläche hindurchgehen. Diese ist die Schnittlinie von zwei Schmiegungsebenen von Γ und ausser ihnen geht von P aus nur noch eine einzige Schmiegungsebene π an Γ. Wählt man die Ebene π von Γ beliebig, so bestimmt sich wieder der zugehörige Punkt P von C eindeutig, denn in dieser Ebene von Γ liegen zwei Erzeugende der Fläche, von denen jede einen Punkt von C enthält und P ist der dritte Schnittpunkt von C mit dieser Ebene. Wir haben damit eine ein-eindeutige also projective Beziehung zwischen den Punkten P von C und den Ebenen π von Γ definirt, wo jeder Punkt in der entsprechenden Ebene liegt. Mit Rücksicht auf Nr. 6 ist jetzt der Satz bewiesen:

Das erste System von cubischen Raumcurven, welche die Tangentenfläche von Γ vierfach berühren, wird von den cubischen Raumcurven gebildet, welche auf Regelflächen 4. Grades liegen, die die Schmiegungsebenen von Γ zu Doppeltangentialebenen haben.

9. Ueber das zweite System von cubischen Raumcurven, welche die Tangentenfläche von Γ an vier (und nicht mehr) Stellen berühren, haben wir nur wenig zu sagen.

Vollständig charakterisirt ist eine beliebige Curve C dieses Systems nach Nr. 5 durch die Eigenschaft, dass die (3,3)-Correspondenz zwischen incidenten Ebenen von Γ und Punkten von C rational ist, d. h. dass die Paare entsprechender Elemente der Correspondenz eine rationale Mannigfaltigkeit bilden. Jede andere Mannigfaltigkeit, deren Elemente sich algebraisch ein-eindeutig auf die Paare entsprechender Elemente der Correspondenz beziehen lassen, ist dann auch rational, und umgekehrt wenn eine solche Mannigfaltigkeit rational ist, so ist es auch die Correspondenz.

Mit einem Paar entsprechender Elemente unserer Correspondenz, einer Schmiegungsebene π von Γ und einem in ihr liegenden Punkte P von C, ist nun z. B. die Verbindungslinie des Anschmiegungspunktes von π mit dem Punkte P ein-eindeutig verknüpft. Wenn wir mit Schubert einen Strahl als Schmiegungsstrahl einer Raumcurve bezeichnen, der in einer Schmiegungsebene liegt und durch ihren Anschmiegungspunkt hindurchgeht, so können wir sagen:

Die cubischen Raumcurven des zweiten Systems, welche die Tangentenfläche von Γ vierfach berühren, sind jene cubischen Raumcurven, für welche die sie treffenden Schmiegungsstrahlen von Γ eine rationale Regelfläche bilden.

§ 4.

Die fünffache Berührung.

10. Von den beiden Systemen cubischer Raumcurven, welche die Tangentenfläche von Γ fünffach berühren, war das erste gegeben durch Correspondenzgleichungen der Form:

$$(1\,b)\qquad \begin{aligned}&(b_{21}x^2y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{10}x + b_{01}y + b_{00})\\ &\cdot(b'_{21}x^2y + b'_{20}x^2 + b'_{11}xy + b'_{10}x + b'_{01}y + b'_{00}) = 0.\end{aligned}$$

Es ist leicht, die geometrische Beziehung einer beliebigen Curve C des Systems zur Curve Γ genau zu präcisiren.

Der erste Factor der Gleichung (1 b) gleich Null gesetzt

$$(b_{21}x^2 + b_{11}x + b_{01})y + b_{20}x^2 + b_{10}x + b_{00} = 0$$

liefert zu einer beliebigen durch den Parameter y gegebene Schmiegungsebene von Γ die x-Werthe für zwei von ihren Schnittpunkten mit der Curve C und dieses Punktepaar beschreibt ersichtlicher Weise, wenn die Schmiegungsebene von Γ sich bewegt, eine zu ihr projective Involution auf der Curve C. Die Verbindungslinien der Paare dieser Involution auf der cubischen Raumcurve C bilden eine Regelschaar und durch jede Erzeugende dieser Regelschaar geht eine Schmiegungsebene von Γ.

Wenn wir jetzt umgekehrt eine Fläche 2. O. betrachten und unter C eine cubische Raumcurve auf der Fläche, unter Γ einen der Fläche

umschriebenen cubischen Ebenenbüschel verstehen, so zwar, dass durch die Erzeugenden jenes Systems, welche je zwei Punkte von C tragen, nur je eine Schmiegungsebene von Γ geht, so wird die Gleichung der (3,3)-Correspondenz zwischen incidenten Elementen von C und Γ die Form (1 b) haben müssen. Denn die linke Seite der Gleichung dieser Correspondenz wird einen in y linearen, in x quadratischen Factor haben müssen, welcher gleich Null gesetzt eine projective Beziehung zwischen den Ebenen von Γ und den Punktepaaren einer Involution auf C darstellt, da zu den Erzeugenden des erwähnten Systems einerseits die einzeln hindurchgehenden Schmiegungsebenen von Γ, anderseits die Paare von Schnittpunkten projectiv sind, welche die Erzeugenden auf der Curve C bestimmen.

Wir finden:

Das erste System von cubischen Raumcurven, welche die Tangentenfläche von Γ fünffach berühren, wird erhalten, wenn man auf jeder der Developpablen von Γ eingeschriebenen Fläche 2. O. die cubischen Raumcurven des einen von den beiden auf der Fläche vorhandenen Systemen verzeichnet, nämlich des Systems von Curven, welche die Erzeugenden jener Schaar zu Doppelsecanten haben, durch die nur je eine Schmiegungsebene von Γ geht.

11. Die Schnittpunkte einer beliebigen Raumcurve 3. O. C mit der Tangentenfläche des cubischen Ebenenbüschels Γ, sind jene Punkte von C, für welche zwei von den drei hindurchgehenden Schmiegungsebenen von Γ identisch werden. Ihre Parameter sind also die x-Werthe, welche die nach y gebildete Discriminante der Gleichung

$$(1) \qquad a_{33}x^3y^3 + a_{32}x^3y^2 + \cdots + a_{10}x + a_{01}y + a_{00} = 0$$

der Correspondenz zu Null machen, die zwischen incidenten Elementen von C und Γ besteht. Diese Discriminante ist vom 12^{ten} Grade in x und es ergeben sich also im allgemeinen Fall 12 Schnittpunkte.

Wenn die linke Seite von (1) in zwei Factoren zerfällt, so ist diese Discriminante das Product der Discriminanten der Factoren und des Quadrats ihrer Resultante. In dem Falle, den wir jetzt zu betrachten haben, lautet die Gleichung der Correspondenz:

$$(x - y)(d_{22}x^2y^2 + d_{21}x^2y + \cdots + d_{00}) = 0$$

und die linke Seite der Gleichung 12^{ten} Grades, welche die Schnittpunkte von C mit der Tangentenfläche von Γ liefert, wird gegeben sein als Product aus der nach y gebildeten Discriminante der Gleichung

$$(4) \qquad d_{22}x^2y^2 + d_{21}x^2y + \cdots + d_{00} = 0$$

und dem Quadrate des Ausdrucks, der aus der linken Seite von (4) entsteht, wenn darin y durch x ersetzt wird. Wir sehen hieraus neuerdings (vergl. Nr. 3), dass durch die Correspondenzgleichung der

betrachteten Form cubische Raumcurven C gegeben sind, von deren Schnittpunkten mit der Tangentenfläche von Γ viermal zwei zusammenfallen. Wir sehen aber darüber hinaus, dass die Bedingung dafür, dass von den vier ausserdem noch vorhandenen Schnittpunkten zwei zusammenfallen, darin besteht, dass die nach y gebildete Discriminante von (4) eine Doppelwurzel hat. Ist diese Bedingung erfüllt, dann werden durch die in Rede stehenden zerfallenden Gleichungen der (3,3)-Correspondenz die cubischen Raumcurven des zweiten Systems gegeben sein, welche die Tangentenfläche von Γ fünffach berühren. Mit Rücksicht auf Nr. 6 können wir deshalb sagen:

Eine beliebige (2,2)-Correspondenz zwischen zwei Elementensystemen auf demselben rationalen Träger besitzt in dem einen System vier singuläre Elemente (Verzweigungselemente), für welche die beiden im zweiten System entsprechenden Elemente zusammenfallen. *Die (2,2)-Correspondenzen zwischen den Schmiegungsebenen von Γ von der besonderen Art, dass von den genannten vier singulären Elementen zwei vereinigt liegen, erzeugen die cubischen Raumcurven des zweiten Systems, welche mit Γ eine fünffache Berührung eingehen. Eine solche Curve ist der Ort der Punkte, welche eine zum ersten System gerechnete Schmiegungsebene von Γ mit den beiden ihr in der (2,2)-Correspondenz im zweiten System entsprechenden gemein hat.*

Mit Rücksicht auf Nr. 8 kann man aus diesem Satze ohne Schwierigkeit den folgenden ableiten.

Man erhält das zweite System von die Tangentenfläche von Γ fünffach berührenden cubischen Raumcurven, wenn man auf allen dem cubischen Ebenenbüschel Γ doppelt eingeschriebenen Regelflächen 4^{ten} Grades, von deren vier Torsallinien zwei vereinigt liegen, die cubischen Raumcurven verzeichnet.

§ 5.

Drei projective Beziehungen.

12. Ehe wir weitergehen, wird es sich empfehlen eine Reihe von Bemerkungen über die Geometrie der Projectivitäten vorzubringen.

Will man projective Beziehungen mit geometrischen Hilfsmitteln studiren, so erweist es sich von Vortheil, als die projectiv auf einander bezogenen Elementensysteme die beiden Systeme von Erzeugenden derselben Fläche 2. O. zu wählen. Die projectiven Beziehungen sind dann eindeutig auf die Ebenen des Raumes abgebildet, denn die Schnittpunkte entsprechender Erzeugender erfüllen einen ebenen Schnitt der Fläche*). Insbesondere sind die Tangentialebenen der Fläche 2. O. die

*) Diese oder, was auf dasselbe hinauskommt, die reciproke Abbildung hat wohl zuerst Herr Stephanos für die Geometrie der Projectivitäten verwerthet

Bilder der singulären Projectivitäten, in welchen eine in die Tangentialebene fallende Erzeugende des einen Systems allen Erzeugenden des anderen entspricht.

Durch zwei Projectivitäten ist ein ganzes Büschel gegeben, entsprechend dem Ebenenbüschel, das durch die Bildebenen der beiden Projectivitäten bestimmt wird. Die Axe dieses Ebenenbüschels giebt durch ihre beiden Schnittpunkte mit der Fläche die beiden Paare von Elementen, welche alle Projectivitäten des Büschels entsprechend gemein haben. Sind diese beiden Paare verschieden, so ist durch sie das Büschel von Projectivitäten bestimmt. Fallen sie zusammen (ist die Axe eine Flächentangente), so bezeichnen wir das Büschel als singulär.

Drei Projectivitäten, welche nicht demselben Büschel angehören, bestimmen ein Bündel entsprechend dem Ebenenbündel, das durch die drei Bildebenen bestimmt ist. Nur wenn der Scheitel dieses Bündels auf der Fläche liegt, lassen sich die Projectivitäten des Bündels als Gesammtheit der Projectivitäten charakterisiren, welche ein Paar von Elementen entsprechend gemein haben und in diesem Falle bezeichnen wir das Bündel als singulär.

Um wie das Büschel auch das Bündel von Projectivitäten unabhängig von der Abbildung zu definiren, führt man den Begriff harmonischer Projectivitäten ein. Zwei Projectivitäten heissen harmonisch, wenn ihre Bildebenen conjugirt sind in Bezug auf die Fläche 2. O. Die Beziehung von zwei solchen Projectivitäten lässt sich aber leicht unabhängig von der Fläche formuliren. Zwei projective Beziehungen zwischen denselben zwei Trägern sind harmonisch, wenn die Paare von Elementen in dem einen Träger eine Involution bilden, welche den einzelnen Elementen des andern vermöge der beiden Projectivitäten entsprechen. Da die Ebenen eines Bündels definirt werden können als die zur Polarebene des Bündels conjugirten Ebenen, so folgt: Die Projectivitäten eines Bündels sind die zu einer bestimmten Projectivität harmonischen projectiven Beziehungen.

13. Sind die Elemente eines rationalen Trägers durch die Werthe des Parameters x und die eines andern durch die Werthe des Parameters y gegeben, so werden drei projective Beziehungen zwischen den beiden Trägern vermittelt sein durch die Gleichungen:

$$(1\,a') \qquad \begin{cases} a'_{11}xy + a'_{10}x + a'_{01}y + a'_{00} = 0, \\ a''_{11}xy + a''_{10}x + a''_{01}y + a''_{00} = 0, \\ a'''_{11}xy + a'''_{10}x + a'''_{01}y + a'''_{00} = 0. \end{cases}$$

(diese Annalen Bd. 22). Vergl. für das Folgende auch noch die Abhandlung von Segre im 100. Bande des Journals f. Math.

Für uns ist nun die Frage von Bedeutung, ob man den Parameter y des zweiten Trägers so abändern kann, dass die Gleichungen der drei Projectivitäten in dem neuen Parameter y' und in x symmetrisch werden.

Diese Frage beantwortet sich sofort für den allgemeinen Fall bejahend. Denn setzt man

$$y = \frac{\alpha - \beta y'}{\gamma - \delta y'},$$

so erhält man als Bedingung der Symmetrie die Gleichungen

$$\begin{aligned} a'_{11}\alpha + a'_{01}\beta + a'_{10}\gamma + a'_{00}\delta &= 0, \\ a''_{11}\alpha + a''_{01}\beta + a''_{10}\gamma + a''_{00}\delta &= 0, \\ a'''_{11}\alpha + a'''_{01}\beta + a'''_{10}\gamma + a'''_{00}\delta &= 0, \end{aligned}$$

aus denen sich die Verhältnisse der Substitutionscoefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ i. A. eindeutig berechnen lassen. Um auch in die Ausnahmefälle einen anschaulichen Einblick zu gewinnen, behandeln wir dieselbe Frage nochmals vom geometrischen Standpunkt aus.

Sind die Gleichungen (1a') in x und y symmetrisch, d. h. ist $a'_{10} = a'_{01}$, $a''_{10} = a''_{01}$, $a'''_{10} = a'''_{01}$, dann ist durch die Gleichung $x = y$ eine vierte projective Beziehung gegeben, die harmonisch ist zu den drei durch die Gleichungen (1a') gegebenen. Deutet man nämlich sowohl x wie y als Parameter der Elemente *desselben* von unseren zwei Trägern, so werden durch die Gleichungen (1a') Involutionen dargestellt sein, welche in diesem Träger entstehen, wenn zwei Elemente einander zugeordnet werden, welche in einer der drei ersten Projectivitäten und in der vierten demselben Element des zweiten Trägers entsprechen. Da sich diese Betrachtung auch umkehren lässt, so folgt: Um eine symmetrische Form der Gleichungen von drei projectiven Beziehungen zu erzielen, ist es nothwendig und hinreichend, den Elementen der beiden Träger gleiche Parameter zuzutheilen, welche sich in einer projectiven Beziehung dieser Träger auf einander entsprechen, die zu den drei Projectivitäten harmonisch ist.

I. A. giebt es nach Nr. 12 eine einzige solche projective Beziehung; gegeben durch die Polarebene des Punktes, in welchem sich die Bildebenen der drei vorgelegten Projectivitäten schneiden. Nur wenn diese Bildebenen, also auch die drei Projectivitäten selbst, demselben Büschel angehören, giebt es ein ganzes Büschel von solchen projectiven Beziehungen, gegeben durch das Ebenenbüschel, dessen Axe die reciproke Polare der gemeinschaftlichen Geraden der drei Bildebenen ist. Es ist aber zu beachten, dass eine projective Beziehung zwischen zwei Trägern nicht singulär sein darf, wenn man von einer Parametervertheilung in dem einen Träger dadurch zu einer Para-

metervertheilung im anderen gelangen soll, dass man jedem Elemente den Parameter zuweist, den das entsprechende Element besitzt. *Der Fall, in welchem durch die Gleichungen* (1a') *drei Projectivitäten gegeben sind, welche ein singuläres Bündel bestimmen, d. i. der Fall in welchem diese Projectivitäten ein und nur ein Elementenpaar entsprechend gemein haben, ist sonach der einzige, in welchem sich durch Aenderung, der Parametervertheilung Symmetrie in den Gleichungen* (1a') *nicht wird erzielen lassen.*

Aus dem Satze, dass durch drei Projectivitäten zwischen zwei Trägern, welche kein Elementenpaar entsprechend gemein haben, immer eine gewisse nicht-singuläre zu den drei ersten harmonische vierte Projectivität bestimmt ist, folgt, wenn man in dem einen von den beiden Trägern die projectiven Reihen betrachtet, welche von den einem beweglichen Elemente des zweiten Trägers entsprechenden Elementen durchlaufen werden, der folgende Satz:

Zu drei projectiven Elementenreihen desselben Trägers, bei denen kein Element sich in den drei Reihen selbst entspricht, existirt immer eine bestimmte vierte projective Elementenreihe, die zu den drei ersten involutorisch liegt.

Daraus, dass es zu drei Projectivitäten desselben Büschels, d. h. zu zwei Projectivitäten mit zwei Paaren gemeinsamer entsprechender Elemente, ∞^1 harmonische Projectivitäten giebt, folgt ebenso:

Wenn drei projective Reihen auf demselben Träger zwei Elemente aufweisen, deren jedes sich in den drei Reihen selbst entspricht, so kann man auf ∞^1 *Arten eine vierte projective Reihe hinzufügen, welche zu den drei ersten Reihen involutorisch liegt.*

14. Wir benöthigen für das Folgende noch einige Kenntnisse über singuläre Paare von Elementenpaaren, welche bei zwei in dreifacher Weise projectiv auf einander bezogenen Trägern auftreten. Ein solches singuläres Paar von Elementenpaaren besteht aus zwei Elementen des einen und zwei Elementen des zweiten Trägers von der Eigenschaft, dass jedem der zwei Elemente des einen Trägers durch zwei von den drei vorgelegten projectiven Beziehungen die zwei Elemente des zweiten Trägers als entsprechend zugewiesen sind.

Gehen wir zu unserer Abbildung zurück, welche die beiden Systeme von Erzeugenden einer Fläche 2. O. als Träger voraussetzt, so ist ein derartiges singuläres Paar von Elementenpaaren gegeben durch die Gegenseitenpaare eines auf der Fläche verzeichneten windschiefen Vierecks, von dessen Eckpunkten sich jeder in einer der drei Ebenen π_1, π_2, π_3 befindet, die unseren drei Projectivitäten als Bildebenen zugehören.

Wenn, wie wir voraussetzen, keine von den drei Projectivitäten

ausgeartet ist, so wird keine der drei Ebenen π_1, π_2, π_3 eine Erzeugende der Fläche enthalten. Es sind dann zweierlei Vierecke mit Ecken in den drei Ebenen auf der Fläche denkbar: *Vierecke* 1. *Art*, welche zwei Gegenecken in einer der drei Ebenen haben, während von den zwei übrigen Eckpunkten jeder in eine andere von den zwei übrigen Ebenen fällt, und *Vierecke* 2. *Art* mit einem Gegeneckenpaar in einer, dem anderen in einer zweiten von den drei Ebenen.

Vierecke 1. Art giebt es, wie wir jetzt zeigen wollen, im Allgemeinen sechs, Vierecke 2. Art aber im allgemeinen Falle keine.

Wenn ein veränderliches aus Erzeugenden der Fläche 2. O. gebildetes Viereck sich so bewegt, dass drei aufeinanderfolgende Ecken der Reihe nach in den Ebenen π_1, π_2, π_3 bleiben, so bleibt auch die vierte Ecke in einer bestimmten vierten Ebene π. Denn von den Erzeugenden, welche die Seiten des Vierecks bilden, erscheint die erste auf die zweite, die zweite auf die dritte, die dritte auf die vierte und daher auch die vierte auf die erste projectiv bezogen. Jeder der beiden Schnittpunkte der Ebene π_2 mit dem Kegelschnitt, den die Ebene π mit der Fläche 2. O. gemein hat, ist dann ersichtlicher Weise Eckpunkt für ein Viereck auf der Fläche, von dem eine Ecke auf π_1, ihre Gegenecke auf π_3 liegt, während die beiden übrigen Ecken auf π_2 sich befinden. Da an die Stelle von π_2 jede der drei Ebenen π_1, π_2, π_3 treten kann, so giebt es, wie behauptet, im Allgemeinen sechs Vierecke 1. Art.

Diesem Resultat fügen wir noch die einfache Bemerkung hinzu, von der später Gebrauch gemacht werden soll, dass es bei einem Viereck 1. Art lediglich dann geschehen kann, dass zwei Gegenseiten und gleichzeitig die beiden anderen identisch werden, wenn die Ebenen π_1, π_2, π_3 sich in einem Punkt der Fläche 2. O. treffen, d. h. wenn das von den drei Projectivitäten bestimmte Bündel ein singuläres ist. Denn die Ecken des Vierecks fallen dann in demselben Punkt zusammen, so dass durch diesen Flächenpunkt alle drei Ebenen π_1, π_2, π_3 hindurchgehen müssen.

Vierecke 2. Art treten nur auf, wenn unter den drei Projectivitäten zwei harmonische sich befinden, also wenn zwei von den Ebenen π_1, π_2, π_3 conjugirt sind bezüglich der Fläche 2. O. Denn die beiden Diagonalen eines aus Erzeugenden der Fläche gebildeten Vierecks sind reciproke Polaren bezüglich dieser Fläche und daher sind zwei Ebenen conjugirt, wenn jede ein anderes Paar von Gegenecken des Vierecks, also jede eine andere von zwei reciproken Polaren enthält.

Sind umgekehrt die Ebenen π_1 und π_2 conjugirt bezüglich der Fläche 2. O., so giebt es auf der Fläche eine Schaar von ∞^1 Vierecken, welche das eine Gegeneckenpaar auf π_1, das andere auf π_2 haben. Denn es giebt ∞^1 Paare von reciproken Polaren, von denen

die eine in π_1, die andere in π_2 liegt, und je zwei reciproke Polaren sind Diagonalen eines aus Flächenerzeugenden gebildeten Vierecks. Die einzelnen Strahlen des Strahlenbüschels in der Ebene π_1, dessen Scheitel der in diese Ebene fallende Pol P_2 der Ebene π_2 ist, haben nämlich zu Polaren bezüglich der Fläche die einzelnen ihnen projectiv zugeordneten Strahlen des Strahlenbüschels in der Ebene π_2, dessen Scheitel der Pol P_1 der Ebene π_1 ist.

Unter den Vierecken der Schaar, wird es zwei geben, bei welchen je zwei Gegenseiten identisch sind. Je eine der beiden Flächentangenten des Strahlenbüschels mit dem Scheitel P_2 in der Ebene π_1 (und im Strahlenbüschel P_1 der Ebene π_2) ist Diagonale eines solchen ausgezeichneten Vierecks 2. Art. Hieraus folgt aber, *dass es höchstens sechs solche ausgezeichnete Vierecke 2. Art geben kann, und dass es sechs solche Vierecke dann und nur dann giebt, wenn je zwei von den drei Ebenen π_1, π_2, π_3 conjugirt sind in Bezug auf die Fläche 2. O. d. h. wenn je zwei der vorgelegten drei Projectivitäten harmonisch sind.*

§ 6.

Die sechsfache Berührung.

15. Die cubischen Raumcurven, welche die Tangentenfläche der Raumcurve 3. O. Γ an sechs Stellen berühren, sind nach Nr. 5 gegeben durch die Correspondenzgleichungen der Form:

$$\begin{aligned}&(a'_{11}xy + a'_{10}x + a'_{01}y + a'_{00})\cdot\\ &(a''_{11}xy + a''_{10}x + a''_{01}y + a''_{00})\cdot\\ &(a'''_{11}xy + a'''_{10}x + a'''_{01}y + a'''_{00}) = 0.\end{aligned} \tag{1a}$$

Jeder der drei Factoren dieser Gleichung stellt, gleich Null gesetzt, eine projective Beziehung dar, so dass unsere (3,3)-Correspondenz zwischen den Punkten einer sechsfach berührenden Curve C und den mit ihnen incidenten Schmiegungsebenen von Γ in drei Projectivitäten zerfällt. Es werden in diesen drei projectiven Beziehungen einer beliebigen Schmiegungsebene α von Γ ihre drei Schnittpunkte A_1, A_2, A_3 mit C, einem beliebigen Punkte A von C die drei von ihm aus an Γ gehenden Schmiegungsebenen α_1, α_2, α_3 entsprechen. Lässt man die Schmiegungsebene α von Γ variiren, so beschreiben die drei Punkte A_1, A_2, A_3 drei zur Reihe der Schmiegungsebenen α also auch unter einander projective Punktreihen, und ebenso beschreiben bei Variation des Punktes A die Schmiegungsebenen α_1, α_2, α_3 von Γ drei zu ihm also auch unter einander projective Reihen. Wir finden:

Wird die Tangentenfläche der cubischen Raumcurve Γ von der cubischen Raumcurve C sechsfach berührt, so schneidet jede Schmiegungsebene von Γ auf C drei homologe Punkte von drei projectiven Reihen aus und jeder Punkt von C schickt an Γ drei Schmiegungsebenen, die homolog sind in drei projectiven Reihen auf dieser Curve.

Ist die Curve Γ nebst der Vertheilung der y-Werthe auf ihr gegeben, so werden durch die drei Factoren der Gleichung (1a), welche willkürliche Coefficienten haben, drei beliebige zum Parameter x also auch unter einander projective Reihen von Schmiegungsebenen von Γ geliefert werden. Verstehen wir nun unter dem Erzeugniss von drei projectiven Reihen von Schmiegungsebenen einer Raumcurve 3. O. den Ort der Schnittpunkte von drei homologen Ebenen der drei Reihen, so können wir mit Rücksicht auf Nr. 1 sagen:

Die cubischen Raumcurven, welche die Tangentenfläche der Raumcurve 3. O. Γ in sechs Punkten berühren, d. i. überall berühren, wo sie ihr begegnen, lassen sich definiren als die Erzeugnisse von drei projectiven Reihen von Schmiegungsebenen der Curve Γ.

Ebenso bestimmen sich die cubischen Raumcurven, deren Tangentenfläche eine Raumcurve 3. O. an sechs Stellen berührt, als Erzeugnisse von drei projectiven Punktreihen auf der Curve C, ein Ergebniss, das übrigens auch als duales Gegenbild aus dem ausgesprochenen Satze hervorgeht.

Man erkennt jetzt, *dass durch drei beliebige Punkte des Raumes i. A. 36 verschiedene cubische Raumcurven hindurchgehen, welche die Tangentenfläche einer vorgelegten cubischen Raumcurve Γ an sechs Stellen berühren.* Jeder der drei Punkte schickt nämlich ein Tripel von Schmiegungsebenen an die Curve Γ und man hat drei projective Reihen von Schmiegungsebenen dieser Curve so zu bestimmen, das jedes Tripel drei entsprechende Ebenen der drei Reihen enthält, um als Erzeugniss eine der fraglichen cubischen Raumcurven zu erhalten.

16. Nach Nr. 13 dürfen die drei Factoren der Gleichung (1a) der in drei Projectivitäten zerfallenden (3,3)-Correspondenz zwischen incidenten Elementen von C und Γ, welche unseren Betrachtungen zu Grunde liegt, als symmetrisch in x und y vorausgesetzt werden. A. a. O. ist gezeigt, dass sich durch Abänderung der Parametervertheilung auf einer der beiden Curven diese Symmetrie stets und nur auf eine Weise erzielen lässt, wenn die durch drei Factoren gegebenen drei Projectivitäten nicht ein Paar von Elementen entsprechend gemein haben.

Sind der Punkt P von C und die Ebene π von Γ entsprechende Elemente für alle drei Projectivitäten, so heisst dies, dass die durch den Punkt P an Γ gehenden drei Schmiegungsebenen mit π und die

in der Ebene π liegenden drei Punkte von C mit P zusammenfallen, dass also C und Γ beide durch den Punkt P gehen und in ihm der Ebene π sich anschmiegen. In diesem Falle, dem einzigen in welchem wir die drei Factoren der Correspondenzgleichung (1a) nicht in symmetrischer Form voraussetzen dürfen, kann man also im *eigentlichen Sinn* von einer Berührung der Curve C mit der Tangentenfläche von Γ in *sechs* Punkten nicht mehr sprechen. Wir schliessen diesen Fall desswegen von der weiteren Betrachtung aus.

Natürlich kann man von einer Berührung in sechs Punkten auch nur im uneigentlichen Sinn reden, wenn die drei Projectivitäten *zwei* Elementenpaare entsprechend gemein haben, in welchem Falle sich jedoch nach Nr. 13 eine symmetrische Form der drei Factoren von (1a) durch Aenderung der Parametervertheilung auf einer der Curven C und Γ und zwar auf ∞^1 Arten herbeiführen lässt. Es zeigt sich leicht, dass die Beziehung zwischen den Curven C und Γ in diesem Falle darin besteht, dass sie dasselbe Tetraeder in gleicher Weise zum Schmiegungstetraeder haben. Diese Lagenbeziehung von zwei cubischen Raumcurven soll in einer späteren Publication genau untersucht werden.

17. In Nr. 2 war gezeigt, dass die Symmetrie der Gleichung der (3,3)-Correspondenz zwischen incidenten Elementen von C und Γ zur Folge hat, dass diese beiden cubischen Raumcurven reciproke Polaren in Bezug auf eine Fläche 2. Grades sind. Es folgt also:

Zwei cubische Raumcurven C und Γ, von denen die eine die Tangentenfläche der zweiten sechsmal berührt, sind reciproke Polaren in Bezug auf eine Fläche 2. O. F.

Damit sind aber die in Nr. 2 aus der symmetrischen Gestalt der Correspondenzgleichung gezogenen Folgerungen nicht erschöpft. Es ist dort noch darauf hingewiesen, dass ein Punkt von C mit dem Parameter x und eine Schmiegungsebene von Γ mit dem Parameter y Pol und Polarebene in Bezug auf die Fläche F sind, wenn $x = y$ ist. Die in x und y als symmetrisch vorausgesetzte Gleichung (1a) stellt, desshalb, wenn x als Parameter eines und y als Parameter eines zweiten Punktes von C angesehen wird, die Bedingung dafür dar, dass diese beiden Punkten conjugirt sind bezüglich der Fläche F, und ebenso stellt dieselbe Gleichung, wenn x als Parameter einer Ebene von Γ, y als Parameter einer zweiten gedeutet wird, die Bedingung für das Conjugirtsein der beiden Ebenen dar.

Wenn x und y als Parameter von Elementen desselben Trägers angesehen werden, so sind durch die drei in x und y symmetrischen bilinearen Factoren einer Gleichung von der Form (1a) drei beliebige Involutionen auf diesem Träger gegeben.

Da nach Nr. 1, wenn eine der beiden Curven C und Γ und die Parametervertheilung auf ihr gegeben ist, die zweite nebst der Parametervertheilung auf ihr durch Angabe der Correspondenzgleichung bestimmt ist, so ergeben sich die beiden folgenden Sätze, die übrigens duale Gegenbilder von einander sind:

Nimmt man zwischen den Punkten einer cubischen Raumcurve C drei quadratische Involutionen beliebig an, so giebt es eine Fläche 2. O., für welche die sämmtlichen Paare der drei Involutionen conjugirte Punktepaare darstellen. Als reciproke Polaren von C bezüglich der so definirten Flächen 2. O. erhält man die cubischen Raumcurven, deren Tangentenflächen die Curve C in sechs Punkten berühren.

Nimmt man zwischen den Ebenen einer cubischen Raumcurve Γ drei quadratische Involutionen beliebig an, so giebt es eine Fläche 2. O., für welche die sämmtlichen Paare der drei Involutionen conjugirte Ebenenpaare darstellen. Als reciproke Polaren von Γ bezüglich der so definirten Flächen 2. O. erhält man die cubischen Raumcurven, welche die Tangentenfläche von Γ in sechs Punkten berühren.

In diesen beiden Sätzen erscheinen die drei projectiven Elementenreihen auf der einen von den beiden Curven C und Γ, als deren Erzeugniss die andere auftritt, als drei Elementenreihen welche auf dieselbe vierte Elementenreihe durch drei quadratische Involutionen bezogen sind. Dass man drei projective Elementenreihen auf einem Träger stets und nur auf eine Weise so geben kann, wenn kein Element existirt, das sich in allen drei Reihen selbst entspricht, wurde schon in Nr. 13 bemerkt.

18. Die drei projectiven Punktreihen, welche die Schmiegungsebenen von Γ auf C ausschneiden, bestimmen zu je zweien ein Paar von Doppelpunkten, und diese drei Paare von Doppelpunkten sind als die einzigen Punkte, in denen C von Schmiegungsebenen von Γ berührt wird, offenbar die sechs Berührungspunkte der Curve C mit der Tangentenfläche von Γ. Die drei als in x und y symmetrisch vorausgesetzten Factoren der Gleichung (1a) geben drei Involutionen auf der Curve C, und die drei Punktepaare, welche diese Involutionen zu je zweien gemein haben, sind nichts anderes als die sechs Berührungspunkte, da man die drei Schnittpunkte einer Schmiegungsebene von Γ als die drei Punkte erhält, welche mit demselben Punkte von C zusammen je ein Paar einer der drei Involutionen bilden.

Die sechs Berührungspunkte der Curve C mit der Tangentenfläche von Γ zerfallen hiernach in drei Paare und wir wollen die Berührungspunkte eines Paars als einander „zugeordnet" bezeichnen. Es soll ferner die Verbindungslinie eines Paars zugeordneter Berührungs-

punkte von C als „Berührungssehne", die Schnittlinie der zugehörigen Schmiegungsebenen von Γ als „Berührungsaxe" bezeichnet werden.

Ist die Curve C vorgelegt, so wird die Curve Γ der letzten Nr. zufolge bestimmt sein, sobald man auf C drei Punktinvolutionen annimmt. Dies kann geschehen durch Annahme von drei Punktepaaren $D_1 D_1'$, $D_2 D_2'$, $D_3 D_3'$ auf C als Doppelpunktepaaren für die drei Involutionen. Die Berührungspunkte der Tangentenfläche von Γ mit der Curve C sind dann die Punktepaare $T_1 T_1'$, $T_2 T_2'$, $T_3 T_3'$, welche je zwei von den Punktepaaren $D_1 D_1'$, $D_2 D_2'$, $D_3 D_3'$ harmonisch trennen. Nun ist aber die Beziehung zwischen den drei ersten Punktepaaren und den drei zweiten Punktepaaren eine vertauschungsfähige, sie bestimmen einander wechselseitig. Es folgt daher:

Wenn auf einer Raumcurve 3. *O. C drei Punktepaare als Paare von zugeordneten Berührungspunkten beliebig gewählt werden, in welchen diese cubische Raumcurve von der Tangentenfläche einer zweiten berührt werden soll, so ist diese Curve dadurch eindeutig bestimmt.*

Man schliesst hieraus sofort, *dass es* 15 *cubische Raumcurven giebt, deren Tangentenfläche eine gegebene cubische Raumcurve C in sechs beliebigen Punkten von C berührt*, entsprechend den 15 Arten, auf welche man die sechs Punkte in drei Paare zerlegen kann.

19. Eine recht anschauliche Einsicht in die Verhältnisse, welche hier in Betracht kommen, verschafft man sich, wenn man als Träger der drei durch die Gleichung (1a) gegebenen Involutionen eine Curve 2. O. annimmt. Jede der drei Involutionen ist dann gegeben durch ihr Centrum, den Punkt, durch welchen die Verbindungslinien der Punktepaare der Involution hindurchgehen. Sind die Punkte $O_1 O_2 O_3$ diese Centra, so leitet man aus einem beliebigen Punkte P des Trägerkegelschnitts die ihm in den drei Involutionen entsprechenden Punkte $P_1 P_2 P_3$ durch Projection der Ecken des Dreiecks $O_1 O_2 O_3$ vom Punkte P aus auf den Kegelschnitt ab. Wenn der Punkt P sich auf dem Kegelschnitt bewegt, so beschreiben die Punkte $P_1 P_2 P_3$ drei zu ihm, also auch unter einander projective Reihen und *die Doppelpunkte, welche je zwei dieser Reihen bestimmen, werden von den Seiten des Dreiecks* $O_1 O_2 O_3$ *ausgeschnitten.*

Setzen wir voraus, dass die Gleichung (1a) reell ist, so sind noch zwei Fälle möglich: Entweder sind alle drei Factoren der Gleichung reell, oder es ist nur einer reell, die beiden anderen conjugirt imaginär.

Im ersten Falle sind die Ecken des Dreiecks $O_1 O_2 O_3$ sowohl wie seine Seiten reell, also auch die drei Punkte $P_1 P_2 P_3$, die man durch Projection der Punkte $O_1 O_2 O_3$ aus einem reellen Punkte P des als reell vorausgesetzten Trägerkegelschnitts auf diesen erhält.

Im zweiten Falle ist von den Ecken des Dreiecks eine reell, die beiden anderen conjugirt imaginär, es wird daher von seinen Seiten dasselbe gelten und die Punkte $O_1 O_2 O_3$ werden von einem reellen Punkte P projicirt drei Punkte $P_1 P_2 P_3$ geben, von denen einer reell, die beiden anderen conjugirt imaginär sind.

Diese Ueberlegungen auf die drei Involutionen angewandt, welche wir vermöge der Gleichung (1a) auf jeder der beiden Curven C und Γ haben, liefern das folgende Ergebniss:

Wenn von zwei reellen cubischen Raumcurven C und Γ die eine die Tangentenfläche der zweiten an sechs Stellen berührt, so können zwei Fälle eintreten. Im ersten Falle sind die drei Berührungssehnen und die drei Berührungsaxen reell, jede reelle Schmiegungsebene von Γ schneidet C in drei reellen Punkten und jeder reelle Punkt von C schickt drei reelle Schmiegungsebenen an Γ. Im zweiten Falle ist sowohl von den drei Berührungssehnen als auch von den drei Berührungsaxen eine reell, die beiden anderen conjugirt imaginär, in jeder reellen Schmiegungsebene von Γ liegt ein reeller nebst zwei conjugirt imaginären Punkten von C, und durch jeden reellen Punkt von C geht eine reelle nebst zwei conjugirt imaginären Schmiegungsebenen von Γ.

20. Eine besonders ausgezeichnete Art der Berührung einer cubischen Raumcurve mit der Tangentenfläche einer zweiten liegt vor, wenn diese beiden Curven eine Tangente gemein haben. Wir stellen uns die Aufgabe zu untersuchen, in welchen Fällen bei Berührung der cubischen Raumcurve C mit der Tangentenfläche der cubischen Raumcurve Γ in sechs Punkten für einen oder mehrere von diesen Punkten die Berührung durch das Vorhandensein einer gemeinsamen Tangente der beiden Curven herbeigeführt wird. Die Vorarbeiten für diese Untersuchung sind schon in Nr. 14 geleistet.

Dort ist für drei projective Beziehungen zweier Träger die Frage aufgeworfen nach den singulären Paaren von Elementenpaaren, welche aus zwei Elementen des einen Trägers und zwei des andern bestehen von der Eigenschaft, dass jedem der beiden Elemente des einen Trägers durch zwei von den drei Projectivitäten die beiden Elemente des zweiten Trägers zugewiesen sind, und es ist dem ausgezeichneten Specialfall besondere Aufmerksamkeit gewidmet, in welchem sowohl die zwei Elemente des ersten Trägers, als auch die zwei Elemente des zweiten Trägers zusammenfallen.

Für die drei projectiven Beziehungen, welche zwischen den Punkten von C und den durch sie hindurchgehenden Schmiegungsebenen von Γ bestehen, ist die Frage nach einem der singulären Paare von Elementenpaaren identisch mit der Frage nach einer Sehne von C, welche zugleich Axe von Γ ist; die beiden Schnittpunkte einer solchen

Geraden mit C und die beiden durch sie an Γ gehenden Schmiegungsebenen sind die beiden singulären Paare von Elementenpaaren. In dem ausgezeichneten Specialfall ist die Frage aber identisch mit der Frage nach einer gemeinsamen Tangente von C nnd Γ, als einer Geraden, welche C in zwei zusammenfallenden Punkten trifft und zwei zusammenfallende Schmiegungsebenen an Γ schickt.

Da für uns der Fall nicht in Betracht kommt, dass das von den drei Projectivitäten zwischen C und Γ bestimmte Bündel singulär ist (wir haben in Nr. 17 dargelegt, wesshalb wir diesen Fall ausschliessen dürfen), so werden ausgezeichnete singuläre Paare von Elementenpaaren, die aus zwei Paaren zusammenfallender Elemente von C und Γ sich zusammensetzen, also gemeinsame Tangenten dieser beiden Curven nach Nr. 14 nur auftreten, wenn es unter den drei Projectivitäten zwei harmonische giebt. Aus den dortigen Betrachtungen folgt, *dass C und Γ ein Paar gemeinsamer Tangenten haben, wenn zwei von den drei Projectivitäten harmonisch sind, zwei Paare von gemeinsamen Tangenten, wenn eine der drei Projectivitäten zu den beiden anderen harmonisch ist, und endlich drei Paare von gemeinsamen Tangenten, wenn je zwei von den drei Projectivitäten harmonisch sind, und dass diese Fälle die einzigen sind, in welchen C und Γ gemeinsame Tangenten besitzen.* Betrachtet man die drei projectiven Punktreihen, welche auf der Curve C von den Schmiegungsebenen der Curve Γ ausgeschnitten werden, deren Erzeugniss Γ ist, so wird die Bedingung für eine oder zwei oder drei gemeinsame Tangentenpaare darin bestehen, dass einmal oder zweimal oder dreimal zwei von den drei projectiven Reihen involutorisch liegen.

Für den Fall, dass C und Γ sechs Tangenten gemein haben, sind daher deren Berührungspunkte auf der Curve, die Doppelpunktepaare von drei Involutionen von der Eigenschaft, dass je zwei dieser Involutionen nach einander ausgeübt (als „Product") die dritte ergeben. Haben wir umgekehrt drei solche Involutionen auf der Curve C, so sind ihre Tangenten in den drei Paaren von Doppelpunkten der Involutionen auch Tangenten für die cubische Raumcurve Γ, welche das Erzeugniss der drei projectiven Punktreihen ist, die man auf C erhält, wenn man jedem Punkte die zwei ihm in zwei von den drei Involutionen entsprechenden Punkte zuordnet.

Da drei Involutionen auf demselben Träger bekanntlich mit der Identität zusammen dann und nur dann eine Gruppe von Verwandtschaften bilden, wenn von ihren drei Doppelpunktepaaren jedes die beiden übrigen harmonisch trennt, so folgt:

Die Berührungspunkte von sechs zwei cubischen Raumcurven gemeinsamen Tangenten bilden auf jeder der beiden Curven drei Paare, von denen jedes die beiden übrigen harmonisch trennt. Umgekehrt werden

die sechs Tangenten einer cubischen Raumcurve in drei solchen Punktepaaren stets noch von einer zweiten cubischen Raumcurve berührt.

Zwei cubische Raumcurven mit sechs gemeinsamen Tangenten bilden eine Figur mit so zahlreichen Eigenschaften, dass es mir geboten scheint, hier nicht weiter auf sie einzugehen, sondern dieser Figur eine selbständige Abhandlung zu widmen.

Wien, im November 1898.

Preisaufgabe der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft.

(Bekannt gemacht im Jahresbericht der Gesellschaft, Leipzig im März 1899.)

Für das Jahr 1902.

Dass die von C. Neumann seit 1870 angewandte Methode des arithmetischen Mittels einen sehr hohen Grad von Allgemeinheit besitze, dafür sprechen sowohl die mannigfaltigen Arbeiten Neumann's (Abh. der K. S. Ges. der Wiss. XIII, S. 707), wie auch die tiefgehenden Betrachtungen Poincaré's (Acta math. XX, p. 59). Gleichzeitig aber geht aus der Gesammtheit dieser Untersuchungen hervor, dass noch manche schwierige Punkte der weiteren Aufklärung bedürftig sind. Es erscheint daher wichtig, wenigstens die erforderlichen Vorarbeiten zu unternehmen, um von den eigentlichen Grundzügen dieses Gebietes eine völlig klare Vorstellung zu gewinnen, und namentlich die genannte Poincaré'sche Abhandlung in ihrer ganzen Tragweite zu verwerthen, vielleicht deren Resultate weiter zu verallgemeinern. Vor allem aber entsteht die Aufgabe, den Poincaré'schen Darlegungen eine grössere Einfachheit und Durchsichtigkeit, und womöglich auch einen höheren Grad von Strenge zu verleihen.

Ohne unter den hier angedeuteten Richtungen eine vor der andern besonders bevorzugen zu wollen, spricht die Gesellschaft den Wunsch aus,

> *dass die in der Abhandlung von Poincaré „La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet“* 1896, *enthaltenen Untersuchungen nach irgend welcher Seite hin wesentlich vervollkommnet werden möchten.*

Preis 1000 Mark.

Die anonym einzureichenden Bewerbungsschriften sind, wo nicht die Gesellschaft im besonderen Falle ausdrücklich den Gebrauch einer andern Sprache gestattet, in *deutscher, lateinischer* oder *französischer* Sprache zu verfassen, müssen einseitig geschrieben und *paginirt*, ferner mit einem *Motto* versehen und von einem *versiegelten Umschlage* begleitet sein, welcher auf der Aussenseite das Motto der Arbeit trägt,

inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Jede Bewerbungsschrift muss auf dem Titelblatte die Angabe einer Adresse enthalten, an welche die Arbeit für den Fall, dass sie nicht preiswürdig befunden wird, zurückzusenden ist. Die Zeit der Einsendung endet mit dem 30. *November des angegebenen Jahres*, und die Zusendung ist an den Secretär der Gesellschaft zu richten. Die Resultate der Prüfung der eingegangenen Schriften werden durch die Leipziger Zeitung im März oder April des folgenden Jahres bekannt gemacht. Die gekrönten Bewerbungsschriften werden Eigenthum der Gesellschaft.

Sujet du prix de mathématiques à décerner en 1901, proposé par l'Académie des Sciences de Toulouse.

Recherche et étude des familles de surfaces possédant cette propriété que toutes leurs trajectoires orthogonales soient des courbes planes, en se plaçant particulièrement à l'un des points de vue suivants:

1° *Pour que toutes les surfaces définies en coordonnées cartésiennes rectangulaires par l'équation:*

$$\varrho = f(x, y, z)$$

ou ϱ est un paramètre variant d'une surface de la famille à l'autre, admettent des trajectoires orthogonales planes, il faut que f vérifie une équation aux dérivées partielles du 3e ordre dont on propose l'étude.

2° *On pourra utiliser aussi la méthode périmorphique en s'inspirant du «Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes*)» de Ribaucour et en particulier du chapitre XIII, intitulé: «Recherches des trajectoires orthogonales planes des surfaces».*

Dispositions générales.

I. Les Mémoires concernant le prix, consistant en une médaille d'or de 500 francs, ne seront reçus que jusqu'au 1er janvier de l'année pour laquelle le concours est ouvert; ce terme est de rigueur.

II. Tous les envois seront adressés, *franco*, au Secrétariat de l'Académie, port Saint-Etienne, 26, ou à M. Roschach, secrétaire perpétuel, rue Peyras, 2.

III. Les Mémoires seront écrits en français ou en latin, et d'une *écriture bien lisible.*

IV. Les auteurs des Mémoires écriront sur la première page une sentence ou devise; la même sentence sera répétée sur un billet séparé et cacheté, renfermant leur nom, leurs qualités et leur demeure; ce billet ne sera ouvert que dans le cas où le Mémoire aura obtenu une distinction.

*) Journal de mathématiques pures et appliquées.

V. Les Mémoires dont les auteurs se seront fait connaître avant le jugement de l'Académie ne pourront être admis au concours.

VI. Les noms des lauréats seront proclamés en séance publique le premier dimanche après la Pentecôte.

VII. Si les lauréats ne se présentent pas eux-mêmes, ils pourront faire retirer leurs prix au Secrétariat de l'Académie, port Saint-Etienne, 26, par des personnes munies d'un reçu de leur part.

VIII. L'Académie, qui ne proscrit aucun système, déclare aussi qu'elle n'entend pas adopter les principes des ouvrages qu'elle couronnera.

Ueber eine einfache Gruppe von 504 Operationen.

Von

Robert Fricke in Braunschweig.

In Band 41 der Mathem. Annalen pag. 443ff. habe ich eine Untersuchung veröffentlicht, welche den arithmetischen Charakter der Dreiecksfunction $s\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{7}; J\right)$ zum Gegenstande hat. Die Substitutionscoefficienten der Gruppe dieser Dreiecksfunction liessen sich als ganze algebraische Zahlen eines gewissen Körpers sechsten Grades darstellen, der aus dem bei der Siebentheilung des Kreises auftretenden reellen cubischen Körper durch Adjunction einer gewissen Quadratwurzel hervorging.

Bei jeder Gruppe linearer Substitutionen, deren Bildungsgesetz man vermöge ganzer algebraischer Zahlen anzugeben vermag, liegt die Möglichkeit vor, das Untergruppenproblem auf Grund des Princips der Congruenzgruppen mit Nutzen in Untersuchung zu ziehen. Diese Untersuchungsrichtung zu verfolgen, ist bei den neueren Fortschritten der abstracten Gruppentheorie durch Cole, Hölder, Burnside u. a. von Interesse geworden.

Insbesondere soll in den nachfolgenden Zeilen eine concrete Bedeutung derjenigen einfachen Gruppe G_{504} von 504 Operationen entwickelt werden, die schon bei Mathieu*) auftritt, und die vor einigen Jahren von Cole in der Abhandlung „*Simple groups as far as order 660*“**) wieder gefunden wurde. Angaben über die Structur dieser Gruppe findet man auch in Burnside's Buche „*Theory of groups of finite order*“***) pag. 370ff.; auf die Erzeugung der G_{504} ist Burnside in den Mathem. Annalen Bd. 52, pag. 174 zurückgekommen.

*) Nämlich in den Entwicklungen des Cap. II der Abhandlung „*Mémoire sur l'étude des fonctions de plusieurs quantités, etc.*“, Journ. de Mathém. (2) tome 6 (1861); ich verdanke diese Bemerkung einer Mittheilung des Herrn Burkhardt.

**) American Journ. of Mathematics, Bd. 15 (1893) pag. 303ff. Siehe auch die Notiz von Cole „*List of the substitutiongroups of nine letters*“. Quarterly Journal Bd. 26 (1893), wo die G_{504} als Permutationsgruppe von 9 Dingen definirt ist.

***) Cambridge, 1897.

§ 1.

Recapitulation über die Gruppe der Function $s\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{7}; J\right)$.

Man verstehe unter ω die reelle ganze algebraische Zahl

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{7}} + e^{-\frac{2\pi i}{7}},$$

d. i. die grösste unter den drei Wurzeln der cubischen Gleichung:

$$\omega^3 + \omega^2 - 2\omega - 1 = 0. \tag{1}$$

Die Gruppe Γ der vorhin genannten Dreiecksfunction ist alsdann bei zweckmässigster Lage des Ausgangsdreiecks*) erzeugbar aus den beiden Substitutionen:

$$V_0 = \begin{pmatrix} \omega^2+\omega-1, & 1+\sqrt{\omega-1} \\ -1+\sqrt{\omega-1}, & \omega^2+\omega-1 \end{pmatrix}, \quad V_1 = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

für welche die drei Relationen gelten:

$$V_0^7 = 1, \quad V_1^2 = 1, \quad (V_0 V_1)^3 = 1. \tag{3}$$

Der Gruppe Γ liegt also derjenige Körper 6$^{\text{ten}}$ Grades zu Grunde, welcher aus dem cubischen Körper der Gleichung (1) durch Adjunction von $\sqrt{\omega - 1}$ hervorgeht.

Die Substitution V_0 ist quadrimodular (von der Determinante 4).

Die Gesammtgruppe Γ *besteht aus allen quadrimodularen Substitutionen*:

$$V = \begin{pmatrix} a + b\sqrt{\omega-1}, & c + d\sqrt{\omega-1} \\ -c + d\sqrt{\omega-1}, & a - b\sqrt{\omega-1} \end{pmatrix} \tag{4}$$

mit ganzen Zahlen a, b, c, d *des cubischen Körpers* (1), *die folgenden Congruenzen genügen:*

$$\left\{\begin{aligned} b(\omega^2+\omega+1) + c + d &\equiv 0 \\ a(\omega^2+\omega+1) + c + d(\omega+1) &\equiv 0 \\ a + b + d(\omega^2+\omega+1) &\equiv 0 \\ a + b(\omega+1) + c(\omega^2+\omega+1) &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \pmod 2. \tag{5}$$

Diese Congruenzen, welche sich übrigens auf nur zwei unabhängige reduciren, haben zur Folge, dass bei Construction zweier quadrimodularen Substitutionen (4) in den Coefficienten der entspringenden Substitution überall der Factor 2 auftritt, so dass nach Forthebung desselben wieder eine ganzzahlige quadrimodulare Substitution (4) zurückbleibt; dieselbe genügt dann insbesondere auch wieder den Congruenzen (5).

*) Vergl. hierüber ausser der schon gen. Arbeit in Bd. 41 der Mathem. Annalen die „*Vorlesungen über automorphe Functionen*“ von F. Klein und dem Verf. Bd. I pag. 606 ff. (Leipzig, 1897).

Sind a, b, c, d zugleich durch 2 theilbar, so sind die Congruenzen (5) selbstverständlich erfüllt. Man kann dies dahin aussprechen, dass die „*unimodularen*" Substitutionen (4) insgesammt in Γ enthalten sind. *Sie bilden eine weiterhin oft zu nennende nicht-ausgezeichnete Untergruppe* Γ_{63} *des Index* 63, *und zwar handelt es sich bei der* Γ_{63} *um die Gruppe des „regulären rechtwinkligen Kreisbogensiebenecks"*. In der That ist die eine der beiden symmetrischen Hälften des Discontinuitätsbereiches der Γ_{63} durch das aus 63 Dreiecken bestehende Kreisbogensiebeneck in Figur 1 dargestellt. Die Werthevertheilung von s ist hier diejenige, dass die Ecke e_1 bei $s = i$ liegt, die Seite $e_1 e_2$ den Einheitskreis und die Seite $e_1 e_7$ die imaginäre s-Axe trägt, wobei die Richtung von e_1 nach e_7 diejenige gegen $s = +i\infty$ ist. Ein canonisches Polygon für die Γ_{63} lässt sich in der Gestalt des regulären Siebenecks der Winkel $\frac{2\pi}{7}$ darstellen, wie es Fig. 2 (folg. Seite) liefert*). Man bemerke, dass die Randcurven dieses Polygons *nicht* aus Symmetrielinien des Dreiecknetzes gebildet werden. Die Zuordnung der Randcurven geschieht, wie die Figur andeutet, durch sieben Substitutionen $V_1, \ldots, V_7$ von der Periode zwei, welche die Relation befriedigen:

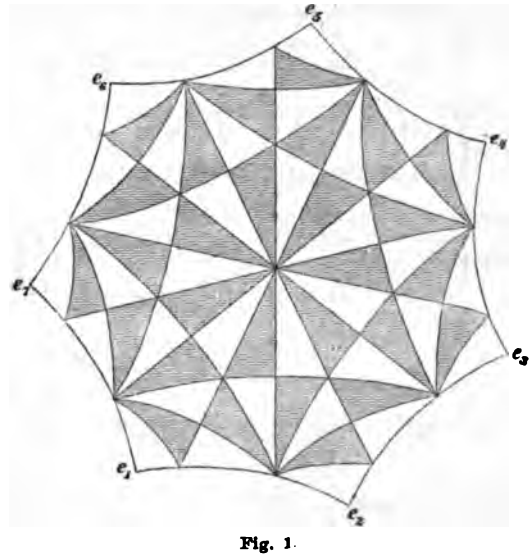


Fig. 1.

$$V_1 \cdot V_2 \cdot V_3 \cdots V_7 = 1. \tag{6}$$

Die explicite Gestalt dieser Substitutionen ist die folgende:

$$V_1 = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} -(\omega^2+2\omega)\sqrt{\omega-1}, & (\omega+1) \\ -(\omega+1), & (\omega^2+2\omega)\sqrt{\omega-1} \end{pmatrix},$$

$$V_3 = \begin{pmatrix} -(2\omega^2+4\omega+1)\sqrt{\omega-1}, & (\omega^2+2\omega+1)+(\omega^2+2\omega)\sqrt{\omega-1} \\ -(\omega^2+2\omega+1)+(\omega^2+2\omega)\sqrt{\omega-1}, & (2\omega^2+4\omega+1)\sqrt{\omega-1} \end{pmatrix},$$

*) Die Bedeutung der in Fig. 2, sowie in den weiter folgenden Figuren stark ausgezogenen Linien wird später erläutert werden.

$$V_4 = \begin{pmatrix} -(2\omega^2+5\omega+2)\sqrt{\omega-1},\ (\omega^2+3\omega+2)+(2\omega^2+4\omega+1)\sqrt{\omega-1} \\ -(\omega^2+3\omega+2)+(2\omega^2+4\omega+1)\sqrt{\omega-1},\ (2\omega^2+5\omega+2)\sqrt{\omega-1} \end{pmatrix},$$

$$V_5 = \begin{pmatrix} -(2\omega^2+4\omega+1)\sqrt{\omega-1},\ (\omega^2+3\omega+2)+(2\omega^2+5\omega+2)\sqrt{\omega-1} \\ -(\omega^2+3\omega+2)+(2\omega^2+5\omega+2)\sqrt{\omega-1},\ (2\omega^2+4\omega+1)\sqrt{\omega-1} \end{pmatrix},$$

$$V_6 = \begin{pmatrix} -(\omega^2+2\omega)\sqrt{\omega-1},\ (\omega^2+2\omega+1)+(2\omega^2+4\omega+1)\sqrt{\omega-1} \\ -(\omega^2+2\omega+1)+(2\omega^2+4\omega+1)\sqrt{\omega-1},\ (\omega^2+2\omega)\sqrt{\omega-1} \end{pmatrix},$$

$$V_7 = \begin{pmatrix} 0, & (\omega+1)+(\omega^2+2\omega)\sqrt{\omega-1} \\ -(\omega+1)+(\omega^2+2\omega)\sqrt{\omega-1}, & 0 \end{pmatrix}.$$

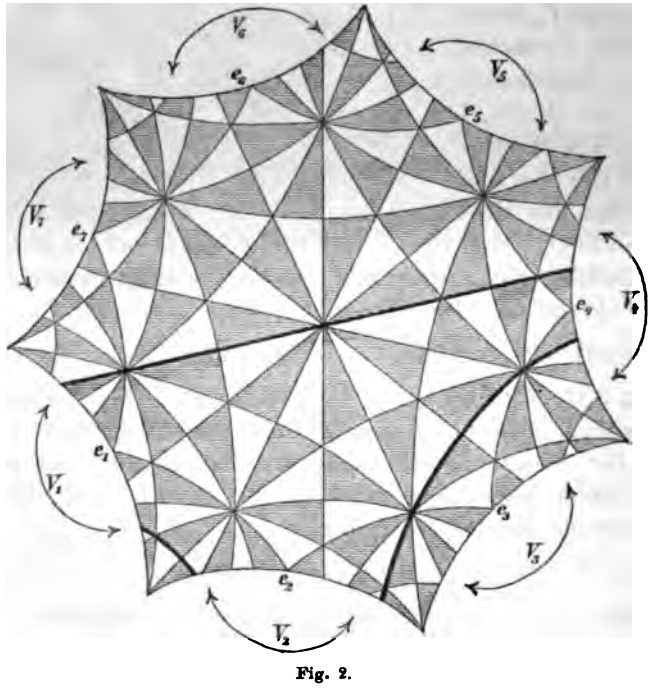


Fig. 2.

Die elliptische Substitution V_8, welche Drehung des in Fig. 2 gegebenen Discontinuitätsbereiches der Γ_{63} um das Centrum durch den Winkel $\frac{2\pi}{7}$ vollzieht, hat die Gestalt:

$$(7)\quad V_8 = \begin{pmatrix} (\omega^2+\omega-1)-(\omega+1)\sqrt{\omega-1},\ (\omega^2+\omega-1)+(\omega+1)\sqrt{\omega-1} \\ -(\omega^2+\omega-1)+(\omega+1)\sqrt{\omega-1},\ (\omega^2+\omega-1)+(\omega+1)\sqrt{\omega-1} \end{pmatrix}.$$

Dieselbe ist quadrimodular und genügt den Congruenzen:

$$(8) \qquad a \equiv c, \quad b \equiv d \pmod 2;$$

man zeigt leicht, dass bei allen den Bedingungen (8) genügenden quadrimodularen Substitutionen auch die Congruenzen (5) stets erfüllt sind.

Alle die Bedingungen (8) *befriedigenden quadrimodularen Substitutionen bilden eine Gruppe, welche als Untergruppe* Γ_9 *des Index* 9 *in* Γ *enthalten ist.* Die Γ_9 entspringt aus der Γ_{63} durch Zusatz von V_8, und sie ist die umfassendste in Γ enthaltene Untergruppe, innerhalb deren Γ_{63} ausgezeichnet enthalten ist. Aus Figur 2 geht leicht hervor, *dass die* Γ_9 *die Gruppe „erster" Art des Kreisbogendreiecks der Winkel* $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{7}$ *ist.* Man bemerke, dass die durch Spiegelungen erweiterte Gruppe dieses Kreisbogensiebenecks *nicht* mehr in der gleichfalls erweiterten Gesammtgruppe $\bar{\Gamma}$ enthalten ist.

§ 2.

Arithmetische Definition einer ausgezeichneten Untergruppe Γ_{504}.

Gegenstand der nächsten Untersuchung ist nunmehr *die umfassendste in der* Γ_{63} *enthaltene Untergruppe* Γ_μ, welche die Eigenschaft besitzt, *in der Gesammtgruppe* Γ *ausgezeichnet zu sein.* Die in Γ_μ enthaltenen Substitutionen von der Gestalt (4) § 1 müssen der Forderung genügen, dass mit der einzelnen unter ihnen V stets auch $V_0 V V_0^{-1}$ in Γ_μ und also auch in Γ_{63} enthalten ist. Schreiben wir aber:

$$(1) \qquad V_0 V V_0^{-1} = \begin{pmatrix} a' + b'\sqrt{\omega-1}, & c' + d'\sqrt{\omega-1} \\ -c' + d'\sqrt{\omega-1}, & a' - b'\sqrt{\omega-1} \end{pmatrix}$$

„unimodular", so berechnet man leicht:

$$(2) \qquad \begin{cases} a' = a, \quad b' = \frac{1}{2}\left(b\omega + (c-d)(\omega^2+\omega-1)\right), \\ c' = \frac{1}{2}\left(-b(\omega^2-2) + c(\omega+1) - d(\omega-1)\right), \\ d' = \frac{1}{2}\left(b(\omega^2+\omega-1) + c + d\right). \end{cases}$$

Damit die drei Zahlen b', c', d' ganz werden, ist hiernach hinreichend und nothwendig, dass die Congruenz erfüllt ist:

$$(3) \qquad b(\omega^2+\omega+1) + c + d \equiv 0, \pmod 2.$$

Man wird hier und bei weiter folgenden Rechnungen einige Sätze über den Zahlmodul 2 im cubischen Körper der Gleichung (1) § 1 benutzen müssen. Merken wir insbesondere Folgendes an: Die Zahl 2 ist im genannten Körper eine Primzahl der Norm 8. Die 8 modulo 2 incongruenten Reste:

$$0,\ 1,\ \omega,\ \omega^2,\ \omega+1,\ \omega^2+1,\ \omega^2+\omega,\ \omega^2+\omega+1$$

sind sämmtlich mit Quadraten congruent; insbesondere ist:

$$(\omega^2)^2 \equiv \omega^2+\omega+1,\quad (\omega+1)^2 \equiv \omega^2+1,\quad (\omega^2+1)^2 = \omega^2+\omega,$$
$$(\omega^2+\omega)^2 \equiv \omega+1,\quad (\omega^2+\omega+1)^2 \equiv \omega.$$

Auch die folgenden Congruenzen wird man zu benutzen haben:

$$\omega(\omega^2+\omega) \equiv 1,\quad \omega^2(\omega+1) \equiv 1,\quad (\omega^2+1)(\omega^2+\omega+1) \equiv 1. -$$

Um nun die Bedeutung der Congruenz (3) näher zu erfassen, combiniren wir irgend zwei Substitutionen V, V' der Γ_{63}; man gewinne $V.V' = V''$ oder explicite:

$$(4)\qquad \begin{cases} a'' = aa' + bb'(\omega-1) - cc' + dd'(\omega-1), \\ b'' = ab' + ba' + cd' - dc', \\ c'' = ac' + bd'(\omega-1) + ca' - db'(\omega-1), \\ d'' = ad' + bc' - cb' + da'. \end{cases}$$

Genügen V und V' der Congruenz (3), so findet man mod. 2:

$$b''(\omega^2+\omega+1) + c'' + d'' \equiv b[a'(\omega^2+\omega+1) + d'(\omega+1) + c'] + c[d'(\omega^2+\omega+1) + a' + b'] + d[c'(\omega^2+\omega+1) + b'(\omega+1) + a'].$$

Ersetzt man im ersten Gliede rechter Hand b auf Grund von

$$b \equiv b(\omega^2+\omega+1)(\omega^2+1) \equiv (c+d)(\omega^2+1),$$

so ergiebt sich, wenn man rechts die Glieder mit c und d zusammenfasst:

$$b''(\omega^2+\omega+1) + c'' + d'' \equiv c[b' + c'(\omega^2+1) + d'(\omega^2+1)] + d[b'(\omega+1) + c'\omega + d'\omega],$$

und also folgt, da auch V' die Congruenz (3) befriedigt:

$$b''(\omega^2+\omega+1) + c'' + d'' \equiv 0,$$

d. h. auch für $V'' = V.V'$ besteht diese Congruenz. Hiermit ist bewiesen: *Alle Substitutionen der unimodularen Gruppe Γ_{63} für welche die Congruenz:*

$$(3)\qquad b(\omega^2+\omega+1) + c + d \equiv 0 \pmod 2$$

erfüllt ist, bilden eine in der Γ_{63} enthaltene Untergruppe Γ_ν.

Die so gewonnene Γ_ν enthält die oben postulirte innerhalb Γ ausgezeichnete Γ_μ; denn die Congruenz (3) war eine für Γ_μ nothwendige Bedingung. Es lässt sich nun aber zeigen, dass die Γ_μ geradezu mit der Γ_ν identisch ist, d. i. dass bereits die Gruppe Γ_ν innerhalb der Gesammtgruppe Γ ausgezeichnet ist. Da Γ aus V_0 und V_1 erzeugt werden kann, so wird diese Behauptung bewiesen sein, wenn sich zeigen lässt, dass mit V stets sowohl $V_0 V V_0^{-1}$ als auch $V_1 V V_1^{-1}$ in Γ_ν enthalten ist. Für die letztere Substitution geht dies unmittelbar

aus der Thatsache hervor, dass die Transformation von V durch V_1 nur einen Zeichenwechsel von b und d bei unveränderten a und c bewirkt. Die Substitution $V_0 V V_0^{-1}$ ist in (1) und (2) explicit angegeben. Sie ist ganzzahlig und unimodular; und wir finden:

$$\begin{aligned}2[b'(\omega^2+\omega+1)+c'+d'] = {} & b(\omega^3+\omega^2+\omega)+(c-d)(\omega^4+2\omega^3+\omega^2-1)\\ & -b(\omega^2-2)+c(\omega+1)-d(\omega-1)\\ & +b(\omega^2+\omega-1)+c+d.\end{aligned}$$

Diese Gleichung liefert bei Reduction modulo 4:

$$2[b'(\omega^2+\omega+1)+c'+d'] \equiv 2[b+(c+d)(\omega^2+1)], \quad (\text{mod. } 4);$$

und da hier wegen (3) die rechte Seite durch 4 theilbar ist, so gilt diese Congruenz (3) auch für $V_0 V V_0^{-1}$, d. h. diese Substitution ist in der Γ_ν enthalten.

Hiermit ist bewiesen: *Die durch* (3) *definirte unimodulare Congruenzgruppe* 2^{ter} *Stufe ist die gesuchte umfassendste in der* Γ_{63} *enthaltene und in der Gesammtgruppe* Γ *ausgezeichnete Untergruppe* Γ_μ. —

Es soll jetzt der Index der Γ_μ innerhalb der Γ_{63} bestimmt werden. Man verstehe zu diesem Zwecke unter S und T die folgenden aus den Zahlen a, b, c, d der einzelnen unimodularen Substitution V gebildeten Verbindungen:

(5) $S = b(\omega^2+\omega+1)+c+d, \quad T = a+b(\omega+1)+c(\omega^2+\omega+1).$

Da a, b, c, d mod. 2 die Congruenz befriedigen:

$$a^2+c^2+(b^2+d^2)(\omega+1) \equiv 1,$$

so ergiebt sich gleichfalls modulo 2:

$$T^2 = a^2+b^2(\omega^2+1)+c^2\omega \equiv 1+b^2(\omega^2+\omega)+c^2(\omega+1)+d^2(\omega+1),$$

$$T^2 \equiv 1+(\omega+1)S^2, \quad (\text{mod. } 2).$$

Da nun aus $T'^2 \equiv T^2$ immer auch $T' \equiv T$ (mod. 2) folgt, so ergiebt sich der Satz: Haben zwei Substitutionen der Γ_{63} congruente Zahlen S modulo 2, so haben sie auch congruente T.

Sind jetzt V, V' irgend zwei Operationen aus Γ_{63}, so setze man $V'' = V.V'$ und wird ohne Mühe aus dem Schema (4) berechnen:

$$(6) \qquad S'' \equiv ST' + S'T, \quad (\text{mod. } 2).$$

Es ergiebt sich hieraus, dass, wenn V und V' congruente S haben, V'' der Γ_μ angehört.

Nun trifft es sich, dass die Zahlen S der in § 1 angegebenen sieben Substitutionen $V_1, V_2, \ldots, V_7$ gerade den sieben mod. 2 incongruenten und gegen 2 primen Resten congruent sind. Setzen wir also die Identität 1 mit $S \equiv 0$ noch hinzu, *so gewinnen wir in* $1, V_1, V_2, \ldots, V_7$ *ein Repräsentantensystem der* Γ_μ *als Untergruppe der* Γ_{63}; *die* Γ_μ *hat hiernach innerhalb der* Γ_{63} *den Index* 8, *innerhalb der Gesammtgruppe den Index* $\mu = 8.63 = 504$.

§ 3.

Discontinuitätsbereich der Γ_{504} und Structur der complementären Gruppe G_{504}.

Sehen wir die Substitutionen der ausgezeichneten Γ_{504} als mit der identischen Substitution 1 äquivalent und nicht wesentlich von ihr verschieden an, so reducirt sich die Gesammtgruppe auf eine endliche Gruppe G_{504} der Ordnung 504, welche als die zur Γ_{504} gehörige *„complementäre Gruppe"* bezeichnet wird. Die Γ_{63} reducirt sich hierbei auf eine G_8, als deren Operationen $1, V_1, V_2, \ldots, V_7$ angesehen werden können. Da zufolge (6) § 2 die beiden Substitutionen $V_i V_k$ und $V_k V_i$ modulo 2 congruente S haben und also äquivalent bezüglich Γ_{504} sind, was durch

$$V_i V_k \sim V_k V_i$$

ausgedrückt werden mag, *so ist die eben genannte G_8 eine Abel'sche Gruppe, die übrigens ausser der Identität lauter Operationen der Periode 2 enthält.*

Sind i, k irgend zwei verschiedene unter den Zahlen $1, 2, \ldots, 7$, so wird $V_i \cdot V_k \sim V_l$ sein, wo l eine bestimmte dritte dieser Zahlen ist. Für die Aufstellung des Discontinuitätsbereiches der Γ_{504} ist es wichtig, die explicite Gestalt dieser Formeln $V_i \cdot V_k \sim V_l$ kennen zu lernen. Da die $V_1, V_2, \ldots, V_7$ durch Transformation vermöge V_8 (cf. (7) § 1) cyklisch permutirt werden, so folgt aus $V_i V_k \sim V_l$ stets

$$V_{i+\nu} \cdot V_{k+\nu} \sim V_{l+\nu}$$

mit $\nu = 1, 2, \ldots, 6$, wo man nur die Indices nöthigenfalls mod. 7 zu reduciren hat. Es ist also ausreichend, wenn wir die sechs Formeln $V_1 \cdot V_k \sim V_l$ aufstellen.

Es ist nun zunächst unmöglich, dass $V_1 \cdot V_2 \sim V_3$ ist; denn es würde $V_1 V_2 V_3 \sim 1$, und also auch $V_4 V_5 V_6 \sim 1$, d. i. vermöge (6) § 1 $V_7 \sim 1$ werden. Durch die gleiche Ueberlegung folgt, dass nur entweder $V_1 \cdot V_2 \sim V_4$ oder $V_1 \cdot V_2 \sim V_6$ sein kann. Formel (6) § 2 lehrt, dass $V_1 \cdot V_2 \sim V_4$ ist; auf die Bedeutung von $V_1 \cdot V_2 \sim V_6$ kommen wir unten zurück. Aus $V_1 \cdot V_2 \sim V_4$ findet man durch wiederholte Transformation vermöge V_8, dass insgesammt gilt:

$$(1) \qquad \begin{cases} V_1 \cdot V_2 \sim V_4, & V_1 \cdot V_3 \sim V_7, & V_1 \cdot V_4 \sim V_2, \\ V_1 \cdot V_5 \sim V_6, & V_1 \cdot V_6 \sim V_5, & V_1 \cdot V_7 \sim V_3. \end{cases}$$

Um nun einen *Discontinuitätsbereich der* Γ_{504} zu gewinnen, haben wir das in Fig. 2 gegebene Siebeneck der Winkel $\frac{2\pi}{7}$ durch Ausübung der Substitutionen $V_1, V_2, \ldots, V_7$ rings mit sieben weiteren Sieben-

ecken zu umgeben. Es entsteht so der in Fig. 3 abgebildete Bereich; jedes der acht Siebenecke besteht hier aus einem inneren (schraffirten) rechtwinkligen Siebenecke und sieben sich anlagernden Dreiecken,

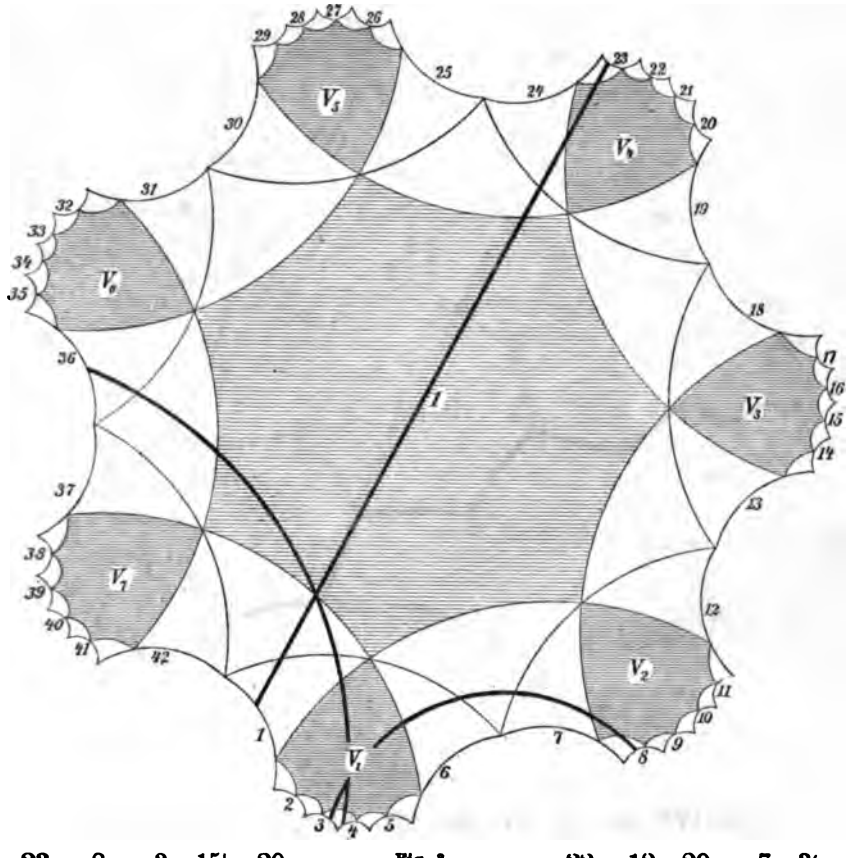
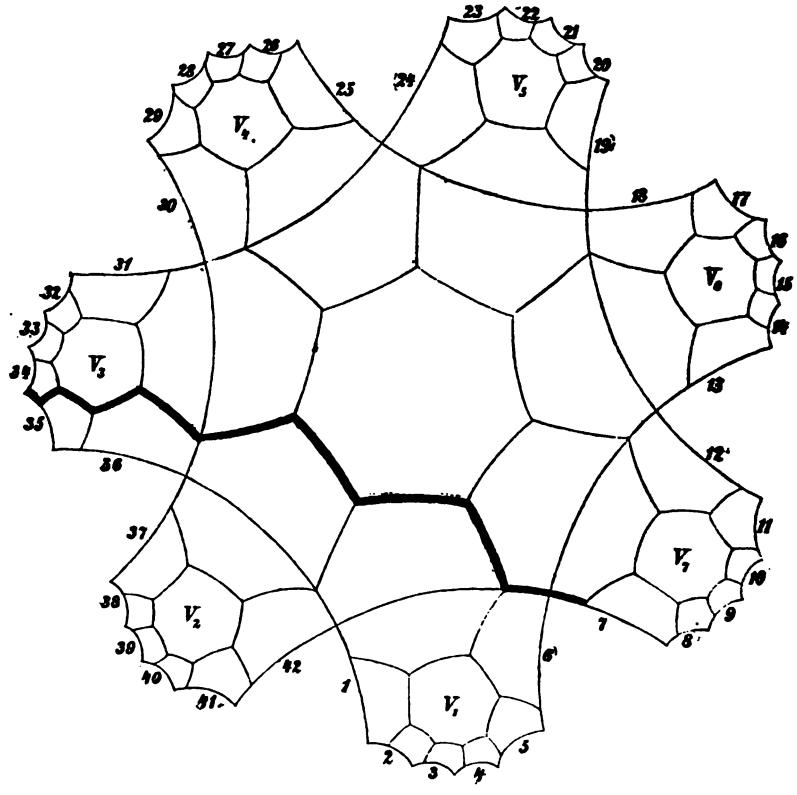


Fig. 3.

—23	8— 3	15—20	22—12	29— 7	36— 4
—39	9—14	16— 6	23— 1	30—40	37—17
— 8	10—42	17—37	24—34	31—11	38—33
—36	11—31	18—28	25— 5	32—27	39— 2
—25	12—22	19—41	26—21	33—38	40—30
—16	13—35	20—15	27—32	34—24	41—19
—29	14— 9	21—26	28—18	35—13	42—10

welche mit einem zu jenem symmetrischen rechtwinkligen Siebenecke äquivalent sind. Im Inneren des schraffirten Theiles ist die zugehörige Substitution angemerkt. Zum definitiven Discontinuitätsbereich der Γ_{504} würde man jetzt dadurch gelangen, dass man in jedes schraffirte rechtwinklige Siebeneck 63 Dreiecke der Winkel $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{7}$, in jedes (nicht-

schraffirte) Dreieck 9 solche einträgt, welche letztere übrigens zum Theil von den Randcurven unseres Bereiches durchschnitten sein würden. In das rechtwinklige Siebeneck 1 hat man hierbei das Netz der Fig. 1 einzulagern und von hieraus nach dem Symmetriegesetz



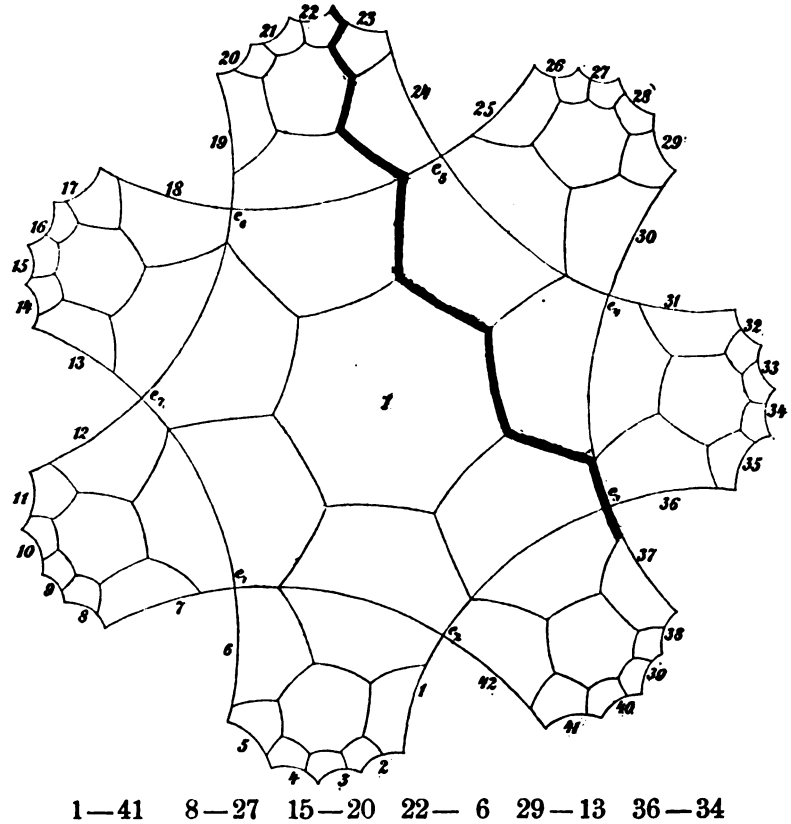
1—17	8— 3	15—38	22—24	29—31	36—10
2—39	9—32	16—18	23—25	30— 4	37—11
3—26	10—12	17—19	24—40	31— 5	38—33
4— 6	11—13	18—34	25—41	32—27	39—20
5— 7	12—28	19—35	26—21	33—14	40—42
6—22	13—29	20—15	27— 8	34—36	41— 1
7—23	14— 9	21— 2	28—30	35—37	42—16

Fig. 4.

fortzufahren. Würde man das zu Fig. 1 symmetrische Netz eintragen, so würde man, um ein regulär symmetrisches Netz von 504 Doppeldreiecken zu gewinnen, die gleich anzustellende Betrachtung nicht an $V_1 \cdot V_2 \sim V_4$, sondern an die andere oben genannte Relation $V_1 \cdot V_2 \sim V_6$ anknüpfen müssen.

Die Zuordnung der mit den Nummern 1 bis 42 versehenen Rand-

curven unseres Bereiches ist gegenüber der Drehung V_8 um das Centrum der Figur invariant und übrigens eine derartige, dass auf der aus dem Bereich herzustellenden geschlossenen Fläche jedes der acht Siebenecke rings von den übrigen sieben umschlossen erscheint. Die in Figur 3



1—41	8—27	15—20	22— 6	29—13	36—34
2—21	9—14	16—42	23— 7	30—28	37—35
3— 8	10—36	17— 1	24—22	31—29	38—15
4—30	11—37	18—16	25—23	32— 9	39— 2
5—31	12—10	19—17	26— 3	33—38	40—24
6— 4	13—11	20—39	27—32	34—18	41—25
7— 5	14—33	21—26	28—12	35—19	42—40

Fig. 4.

tabellarisch angegebene Zuordnung ist nun eine einfache Folge der Relationen (1). So wird z. B. die Randcurve 1 durch $V_4 \cdot V_2 \cdot V_1$ in die Curve 23 transformirt, die Curve 2 durch $V_7 \cdot V_3 \cdot V_1$ in die Curve 39 u. s. w.

In Fig. 4 ist der Discontinuitätsbereich der Γ_{504} in Gestalt von zwei Systemen von je 8 rechtwinkligen Siebenecken gegeben, welche

eine weitere Eintheilung in kleinere Siebenecke tragen, von der noch die Rede sein wird. Das in Fig. 4 rechts gezeichnete Netz besteht aus dem in Fig. 3 mit 1 bezeichneten schraffirten Siebeneck und 7 sich herumlagernden symmetrischen Siebenecken. Die schraffirten Siebenecken $V_1, V_2, \ldots, V_7$ der Fig. 3 tragen auf der linken Seite der Fig. 4 eben diese Benennung. Das Centrum des letzteren Netzes rührt von dem durch (2, 3), (8, 9), (14, 15), (20, 21), (26, 27), (32, 33), (38, 39) zu bezeichnenden Eckencyklus der Fig. 3 her. Jede Randcurve des einen Netzes in Fig. 4 ist einer bestimmten des anderen Netzes zugeordnet, worüber das Nähere aus den den beiden Netzen angehängten Tabellen zu entnehmen ist. In Fig. 4 sind übrigens nun weiter noch diejenigen Seiten des ursprünglichen Dreiecksnetzes eingetragen, welche die Scheitelpunkte der Winkel $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$ verbinden. Wir kommen auf das dadurch entspringende Netz von 72 Siebenecken der Winkel $\frac{2\pi}{3}$ gleich nochmals zurück. —

Der Discontinuitätsbereich der Γ_{504} setzt uns jetzt vermöge seiner Transformationen in sich in den Stand, weitere Angaben über die *Structur der* G_{504} zu machen. Die Eckpunkte des Netzes der 2.504 Dreiecke bezeichnen wir allgemein als Punkte P_2, P_3, P_7, je nachdem sie von 4, 6 oder 14 Dreiecken umringt sind; *man hat* 252 *Punkte* P_2, 168 *Punkte* P_3 *und* 72 *Punkte* P_7.

Bei der Drehung V_8 der rechts liegenden Hälfte der Fig. 4 um ihr Centrum dreht sich die linke Hälfte in derselben Art. Die Anschauung der Figur lehrt, dass hierbei nur die beiden Centren P_7 fest bleiben. *Die* G_{504} *hat hiernach* 36 *gleichberechtigte cyklische Untergruppen* G_7, *deren einzelne zwei Fixpunkte* P_7 *besitzen.*

In Fig. 4 sind rechts und links zwei Zickzacklinien stark ausgezogen, welche sich auf der geschlossenen Fläche zu einem regulären geschlossenen Zuge von 2.9 Bogenstücken zusammensetzen. Man erkennt die Existenz einer cyklischen G_9, deren Erzeugende das einzelne der 18 Bogenstücke in das übernächste transformirt. Da das einzelne Bogenstück an zwei solchen geschlossenen Zickzacklinien theilhat, so zählt man leicht ab, dass es deren insgesammt 28 giebt. Gegenüber der eben genannten G_9 permutiren sich die Punkte P_3 im allgemeinen zu neun. Doch giebt es zwei Systeme zu je drei Punkten P_3, welche sich gegenüber der G_9 nur zu 3 cyklisch permutiren, und die demnach einzeln Fixpunkte der in G_9 enthaltenen G_3 sind; die Existenz dieser sechs Fixpunkte kann man mit Fig. 4 direct feststellen. Da insgesammt 168 Punkte P_3 vorkommen, so giebt es 28 G_3. Man hat das Resultat: *Es giebt in der* G_{504} 28 *den oben genannten Zickzacklinien ein-eindeutig zugeordnete cyklische* G_9 *und in ihnen* 28 *cyklische* G_3, *deren einzelne sechs Punkte* P_3 *zu Fixpunkten hat.*

Die einzige Substitution erster Art, welche ein einzelnes rechtwinkliges Kreisbogensiebeneck in sich transformirt, ist eine Drehung von der Periode 7 um das Centrum. Die einzelne der Substitutionen $V_1, V_2, \ldots, V_7$ wird demnach die 2.8 rechtwinkligen Siebenecke zu Paaren permutiren und aus diesem Grunde keinen Fixpunkt P_2 im „Innern" eines der Siebenecke haben. Die Eckpunkte des gedachten Siebenecknetzes sind 28 Punkte P_2, so dass auf die einzelne der 7 Substitutionen $V_1, V_2, \ldots, V_7$ 4 Fixpunkte entfallen. Da wir insgesammt 252 Punkte P_2 haben, so folgt: *Es giebt in der* G_{504} *insgesammt* 63 *gleichberechtigte cyklische* G_2, *deren einzelne vier Fixpunkte* P_2 *hat.*

Hiermit sind die gesammten

$$36 \cdot 6 + 28 \cdot 8 + 63 + 1 = 504$$

Operationen der G_{504} aufgezählt.

An nicht-cyklischen Untergruppen nennen wir zunächst *drei Classen von Diedergruppen, nämlich* 28 *gleichberechtigte* G_{18}, 36 *gleichberechtigte* G_{14} *und* 84 *gleichberechtigte* G_6, *die in ersteren* G_{18} *enthalten sind.* Die einzelne G_9 als eine unter 28 gleichberechtigten Gruppen wird nämlich durch $504 : 28 = 18$ Substitutionen in sich transformirt, die eine G_{18} bilden. Dieselbe enthält neben der G_9 noch 9 Substitutionen der Periode 2, welche die einzelne Substitution der G_9 in ihre inverse transformiren. Die G_{18} ist hiernach eine Diedergruppe. Ebenso behandelt man die G_{14}, während sich die G_6 als Untergruppen der G_{18} ergeben.

Die einzelne G_2 als eine unter 63 gleichberechtigten Gruppen ist ausgezeichnet in einer G_8 enthalten, in welcher wir bereits eine Abel'sche Gruppe mit 7 Substitutionen der Periode 2 erkannten. Da die einzelne G_2 nur in einer G_8 enthalten ist, *so giebt es in der* G_{504} 9 *gleichberechtigte Abel'sche Gruppen* G_8 *mit je* 7 *Substitutionen der Periode* 2 *ausser der Identität.* Die einzelne G_8 als eine unter 9 ist ausgezeichnet in einer G_{56} enthalten, *welche neben der* G_8 *noch* 8 *innerhalb der* G_{56} *einander gleichberechtigte* G_7 *enthält; insgesammt giebt es* 9 *gleichberechtigte* G_{56} *dieser Art.*

In der einzelnen G_8 zählt man 7 Vierergruppen G_4 ab, die innerhalb der zugehörigen G_{56} gleichberechtigt sind. So enthält z. B. die obige G_8 der Substitutionen $1, V_1, \ldots, V_7$ folgende 7 Vierergruppen:

$$(V_1, V_2, V_4, 1),\ (V_2, V_3, V_5, 1),\ (V_3, V_4, V_6, 1),\ (V_4, V_5, V_7, 1),$$
$$(V_5, V_6, V_1, 1),\ (V_6, V_7, V_2, 1),\ (V_7, V_1, V_3, 1).$$

Alle 9 G_8 liefern demnach 63 G_4: *Es giebt in der* G_{504} *insgesammt* 63 *Vierergruppen* G_4, *die mit einander gleichberechtigt sind**).

*) Vergl. hierzu die Angaben über die Structur der G_{504} bei Burnside a. a. O. pag. 372.

Es gilt nun der Satz, *dass ausser den bisher genannten Untergruppen weitere in der G_{504} nicht enthalten sind.* Man beweist dies vermöge eines von C. Jordan*) angegebenen und bereits von J. Gierster**) bei der Gruppe der Modulargleichung verwendeten Verfahrens, welches auf der Lösung einer gewissen diophantischen Gleichung sammt nachheriger Discussion der Lösungen beruht***).

Aus der Vollständigkeit der Aufzählung der Untergruppen entnehmen wir das Resultat: *Die G_{504} ist eine einfache Gruppe.* —

Wir betrachten endlich die *Symmetrielinien* des Netzes der 2.504 Dreiecke und constatiren etwa zuvörderst, dass dieselben nur eine einzige Classe bilden werden. Die Seite $\overline{e_1 e_2}$ des rechtwinkligen Siebenecks (Fig. 1) besteht aus 3 Dreiecksseiten. Die Substitution $V_1 V_2$ ist die Erzeugende derjenigen cyklischen hyperbolischen Gruppe, welche die durch e_1 und e_2 hindurchziehende Symmetrielinie des Dreiecksnetzes der Function $s\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{7}; J\right)$ in sich verschiebt. Die zwischen den Punkten e_2 und $V_1 V_2(e_2)$ gelegene Strecke der Symmetrielinie ist mit zwei Siebeneckseiten äquivalent und besteht dieserhalb aus 6 Dreiecksseiten. Da $(V_1 V_2)^2 \sim 1$ ist, so besteht die einzelne Symmetrielinie unseres geschlossen gedachten Netzes der 2.504 Dreiecke aus 12 Dreiecksseiten. Man zählt daraufhin leicht ab: *Das reguläre Netz der* 2.504 *Dreiecke besitzt* 126 *gleichberechtigte Symmetrielinien, die zweiein-deutig den* 63 *Gruppen G_2 zugeordnet sind.* Man kann die bei dieser Zuordnung entspringenden Symmetrielinienpaare zu den Abel'schen G_8 in einen interessanten Zusammenhang setzen, was indes hier nicht ausgeführt wird. —

Ein wichtiger Satz entspringt vermöge der Symmetrielinien aus Fig. 3. Die daselbst vermerkte Zuordnung der Randcurven ist eine solche, dass sich für je zwei auf einander bezogene Randcurven eine bestimmte sie verbindende und im geschlossenen Dreiecksnetz selbst geschlossene Symmetrielinie finden lässt. Für die Randcurvenpaare (1, 23), (3, 8), (4, 36) sind diese Symmetrielinien in Fig. 3 stark ausgezogen; man übersieht leicht, dass ihre Existenz damit in jedem Falle bewiesen ist.

Da in Fig. 3 die Kreisbogendreiecke selbst nicht gezeichnet sind, so ist die Rolle der drei stark markirten Curven als Symmetrielinien nicht unmittelbar anschaulich. Man übertrage demnach den Verlauf der einzelnen Linie auf das Siebeneck der Fig. 2, wo sie sich auf drei solche Bogenstücke auseinanderlegt, wie sie in Fig. 2 stark ausgezogen

*) In Crelle's Journal Bd. 84, pag. 89 ff. (1877).

**) In den Mathem. Annalen Bd. 18, pag. 359 (1881).

***) Siehe auch Klein-Fricke, *Vorles. über Modulfunctionen*, Bd. I (Leipzig 1890) pag. 483.

sind. Auch durch Abzählung der Dreiecksseiten überzeugt man sich hierbei sofort, dass die fragliche Symmetrielinie auf der geschlossenen Fläche selbst geschlossen ist.

In der s-Halbebene ist insbesondere die imaginäre Axe eine Symmetrielinie. Zu ihr gehört als hyperbolische Erzeugende:

$$V_7 V_1 = \begin{pmatrix} \omega + 1 + (\omega^2 + 2\omega)\sqrt{\omega - 1}, & 0 \\ 0, & \omega + 1 - (\omega^2 + 2\omega)\sqrt{\omega - 1} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

die sich, wie ein Blick auf das Dreiecknetz lehrt, in den Erzeugenden V_0, V_1 der Gesammtgruppe Γ so darstellt:

$$V_7 V_1 = V_0^3 V_1 V_0^{-2} V_1 V_0^3 V_1. \tag{3}$$

Das Resultat der voraufgesandten Ueberlegung kann man also dahin aussprechen, *dass die sämmtlichen vom Polygon der Fig.* 3 *gelieferten Erzeugenden der* Γ_{504} *mit:*

$$(V_0^3 V_1 V_0^{-2} V_1 V_0^3 V_1)^2 \tag{4}$$

innerhalb der Gesammtgruppe gleichberechtigt sind.

Dieses Ergebniss lässt sich in eine bemerkenswerthe abstracte Gestalt kleiden. Weiss man von zwei irgendwie definirten Operationen U_0, U_1, dass man aus ihnen eine Gruppe erzeugen kann, und gelten für U_0, U_1 nur die drei Relationen:

$$U_0^7 = 1, \quad U_1^2 = 1, \quad (U_0 U_1)^3 = 1, \tag{5}$$

so ist die entspringende Gruppe isomorph mit Γ. Ist auch noch:

$$(U_0^3 U_1 U_0^{-2} U_1 U_0^3 U_1)^2 = 1, \tag{6}$$

so sind die sämmtlichen mit der hier links stehenden Operation gleichberechtigten Operationen, die alle in der „ausgezeichneten" Γ_{504} enthalten sind, mit 1 gleich; und andererseits werden die Erzeugenden der Γ_{504} und damit alle und nur die Operationen der Γ_{504} gleich 1. Da sich hiernach die Γ auf die G_{504} reducirt, so folgt: *Erfüllen* U_0, U_1 *die vier Relationen* (5), (6) *und keine andere, so entspringt aus* U_0, U_1 *eine endliche mit der* G_{504} *isomorphe Gruppe**).

---

*) Dieses Theorem ist der Gegenstand der schon genannten Abhandlung von Burnside in den Mathem. Annalen Bd. 52 pag. 174.

§ 4.

Von den automorphen Functionen der Gruppe Γ_{504}.

Die umfassendsten Untergruppen der G_{504} sind die neun gleichberechtigten G_{56}. Ihnen entsprechen in der Gruppe Γ der s-Function $s\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{7}; J\right)$ *neun gleichberechtigte Untergruppen* Γ_9 *des Index* 9. Einen Discontinuitätsbereich einer einzelnen Γ_9 gewinnt man, indem man aus dem Siebeneck der Fig. 2 einen Ausschnitt des Centriwinkels $\frac{2\pi}{7}$ etwa dadurch herausschneidet, dass man vom Centrum nach zwei consecutiven Ecken geradlinige Schnitte legt. Diese beiden Schnitte sind dann durch die Substitution V_8 auf einander bezogen; wir werden also etwa V_8 und V_1 mit den Relationen:

$$(1) \qquad V_8^7 = 1, \quad V_1^2 = 1, \quad (V_8 V_1)^7 = 1$$

als Erzeugende der Γ_9 wählen dürfen.

Die Γ_9 ist nun *vom Geschlechte* $p = 0$, und es sei $u(s)$ eine zugehörige Hauptfunction, die wir gleich noch näher fixiren. Die Hauptfunction $J(s)$ der Gesammtgruppe Γ ist so gewählt, dass sie in den Eckpunkten P_2, P_3, P_7 bez. die Werthe 1, 0 und ∞ annimmt. Ueber der J-Ebene lagert die Ebene der complexen Variabelen u in Gestalt einer 9-blättrigen Riemann'schen Fläche, deren Verzweigung im bezeichneten Discontinuitätsbereich der Γ_9 direct anschaulich ist. Es entspringt der wichtige Satz: *Zwischen J und u besteht eine algebraische Gleichung für J vom ersten, für u vom neunten Grade. Diese Gleichung neunten Grades besitzt keine Resolvente von geringerem als neunten Grade; ihre Monodromiegruppe ist mit unserer G_{504} isomorph.*

Die Gleichung neunten Grades, zu der wir hier geführt werden, ist nun bereits vor längerer Zeit durch E. Goursat*) aufgestellt. Man bemerke, dass der Discontinuitätsbereich der Γ_9 aus zwei einander symmetrischen Kreisbogendreiecken der Winkel $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{7}$ aufgebaut werden kann. Man drückt dies Sachverhältniss dahin aus, dass die Gruppen der Kreisbogendreiecke der Winkel $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{7}$ und $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{7}$ bei geeigneter Lagerung der Ausgangsdreiecke *commensurabel***) werden; die Lagerung ist insbesondere eine solche, dass die Symmetrie-

*) Siehe dessen „*Recherches sur l'équation de Kummer*" in den Acta soc. scient. Fennicae Bd. 15 (Helsingfors, 1888), insbes. pag. 90 ff.

**) Commensurabel heissen zwei Gruppen, wenn sie eine Untergruppe gemeinsam haben, die in jeder von ihnen einen endlichen Index besitzt; im vorliegenden Falle ist die eine der beiden Gruppen direct in der anderen enthalten.

linien der beiderseitigen in Deckung befindlichen Dreiecksnetze durchaus getrennt von einander verlaufen.

Ueber Commensurabilität von Dreiecksgruppen hat nun Goursat a. a. O. allgemein Untersuchungen angestellt, und er findet insbesondere für den hier in Rede stehenden Fall die algebraische Relation:

$$(2) \qquad \begin{aligned} J : J - 1 : 1 = {} & 16(3u^3 + 10u^2 + 8u + 4)^3 \\ & : (63u^4 + 140u^3 + 168u^2 + 96u + 32)^2 \\ & : 9u^7(48u^2 + 39u + 24). \end{aligned}$$

Man hat also hier die oben postulirte Gleichung 9^{ten} Grades direct vor sich und erkennt andrerseits, *dass die Commensurabilität der zu den Kreisbogendreiecken* $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{7}\right)$ *und* $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{7}\right)$ *gehörenden Gruppen durch eine* 1-9-*deutige algebraische Beziehung zum Ausdruck kommt, deren Monodromiegruppe mit unserer einfachen* G_{504} *isomorph ist.*

Wir können jetzt aber leicht nachträglich die Werthevertheilung von $u(s)$ im Discontinuitätsbereich der Γ_9 angeben. Bezeichnen wir das Centrum der Fig. 2, d. i. den Fixpunkt von V_8, durch e_8, so können wir in Fig. 2 auch vermittelst der Geraden $\overline{e_1 e_8}$ und $\overline{e_2 e_8}$ einen Discontinuitätsbereich der Γ_9 ausschneiden. Die Symmetrielinie $\widehat{e_1 e_2}$ desselben ist das Bild der reellen u-Axe, und zwar derart, dass im Punkte P_7 dieser Linie $u = 0$, bei e_1 und e_2 $u = \infty$ und im Punkte P_3 ein negativer Werth u vorliegt. Wir schliessen von hieraus weiter durch Auflösung von $48u^2 + 39u + 24 = 0$, dass in den beiden anderen Ecken unseres Bereiches die Werthe $u = \frac{-13 \pm i7\sqrt{7}}{32}$ zutreffen, wobei das obere Zeichen für den Punkt e_3 gilt.

Um ein Functionssystem für die Γ_{504}, *die dem Geschlechte* $p = 7$ *angehört*, zu gewinnen, könnte man die neun mit $u(s)$ gleichberechtigten Functionen neben einander stellen, die alsdann gegenüber den Operationen der Gesammtgruppe eine Permutationsgruppe G_{504} bilden werden. Um der oben erkannten Structur der G_{504} Rechnung zu tragen, werden wir indessen hier einen anderen Weg gehen.

Zum Geschlechte $p = 0$ gehören auch noch die neun gleichberechtigten Γ_{63}, welche den Abel'schen G_8 correspondiren. Den Discontinuitätsbereich einer einzelnen Γ_{63} hatten wir in Fig. 2 gezeichnet. Wir erkennen: *Eine Hauptfunction* $\tau(s)$ *dieser* Γ_{63} *gewinnen wir von* $u(s)$ *aus durch Ausziehen einer siebenten Wurzel:*

$$(3) \qquad \tau(s) = \sqrt[7]{\frac{32u + 13 - i7\sqrt{7}}{32u + 13 + i7\sqrt{7}}}.$$

Der Nullpunkt von $\tau(s)$ liegt im Centrum e_8 des Bereiches, der Punkt $\tau = \infty$ in den sieben Ecken desselben, die einen Cyclus bilden, der

Kranz der sieben Kreisbogen $\widehat{e_1 e_2}, \widehat{e_2 e_3}, \ldots$ liefert in der τ-Ebene den Einheitskreis. Wir wählen die siebente Wurzel in (3) so, dass in der Ecke $e_\varkappa$ der Werth $\tau = \varepsilon_\varkappa = e^{\frac{2\varkappa\pi i}{7}}$ zutrifft.

Wir gehen nun zu den sieben in jener G_{56} enthaltenen gleichberechtigten *Vierergruppen* G_4 vor. Ihnen entsprechen Gruppen Γ_{126} des Index 126 und des Geschlechtes $p = 1$. Eine unter jenen Vierergruppen hatte die Operationen $1, V_1, V_2, V_4$. Die zugehörige Γ_{126} besitzt einen Discontinuitätsbereich, der schematisch in Fig. 5 dargestellt ist. Wir erkennen sofort: *Zu einem vollen Functionssystem der hier vorliegenden Γ_{126} gelangt man von $\tau(s)$ aus durch Ausziehen einer Quadratwurzel; in der That hat man neben $\tau(s)$ die Function zu stellen:*

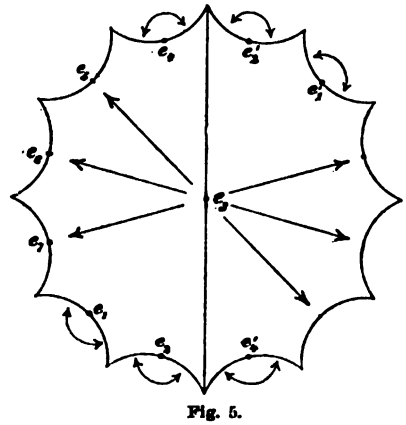


Fig. 5.

$$(4) \qquad \sigma(s) = \sqrt{(\tau-1)(\tau-\varepsilon^3)(\tau-\varepsilon^5)(\tau-\varepsilon^6)}$$
$$= \sqrt{\tau^4 - \frac{1-i\sqrt{7}}{2}\tau^3 - \tau^2 - \frac{1+i\sqrt{7}}{2}\tau + 1}.$$

Es handelt sich hier um ein elliptisches Gebilde mit der rationalen Invariante $J = \frac{28}{27}$.

Mit $\sigma(s)$ sind innerhalb der Γ_{63} noch die Functionen $\sigma_1(s), \sigma_2(s), \ldots, \sigma_6(s)$ gleichberechtigt, wobei allgemein sein soll:

$$(5) \qquad \sigma_\varkappa(s) = \sqrt{\varepsilon^{4\varkappa}\tau^4 - \frac{1-i\sqrt{7}}{2}\varepsilon^{3\varkappa}\tau^3 - \varepsilon^{2\varkappa}\tau^2 + \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}\varepsilon^{\varkappa}\tau + 1}.$$

Innerhalb der G_4 sind nun *drei* G_2 enthalten, denen drei Γ_{252} des Geschlechtes $p = 3$ correspondiren. *Zu einem Functionssystem einer dieser Γ_{252} gelangen wir einfach, indem wir zu $\tau(s)$, $\sigma(s)$ eine der Quadratwurzeln* (5) *hinzufügen;* so treffen wir z. B. die aus $1, V_1$ bestehende G_2 mit dem System $\tau(s), \sigma(s), \sigma_1(s)$ da letztere Function zur Vierergruppe $(V_1, V_3, V_7, 1)$ gehört.

Endlich führt der Zusatz einer dritten, jedoch von $\sigma_3(s)$ verschiedenen Quadratwurzel (5) *von τ, σ, σ_1 aus zu einem vollen Functionssysteme der Gruppe Γ_{504} selbst hin.* Es ist in der That nur noch die zu $\sigma_3(s)$ gehörende Vierergruppe $(V_1, V_5, V_6, 1)$, welche die Substitution V_1 enthält.

Es ist unzweifelhaft eine interessante Aufgabe, die verschiedenen hier auftretenden algebraischen Gebilde, die theils einander übergeordnet theils gleichberechtigt sind, sowohl einzeln als in ihren gegenseitigen Beziehungen noch näher zu untersuchen. Doch wird dies hier einstweilen nicht unternommen.

Uebrigens soll noch bemerkt werden, dass eine algebraische Behandlung der G_{504} mit invariantentheoretischen Hülfsmitteln, wie sie bei der G_{168} und G_{360} in so eleganter Weise zum Ziele führte, bei der G_{504} wenig aussichtsreich erscheint. Nach einem von A. Wiman*) bewiesenen Satze giebt es nämlich keine Collineationsgruppe in 6 oder gar noch weniger homogenen Variabelen, welche mit der G_{504} isomorph wäre.

Braunschweig, October 1898.

*) Göttinger Nachrichten vom Jahre 1897 pag. 55.

Ueber lineare Differentialgleichungen mit einem veränderlichen Parameter.

Von

J. Horn in Charlottenburg.

In einem Aufsatz, welcher im gegenwärtigen 52. Band der Math. Ann. unter dem Titel „Ueber eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einem willkürlichen Parameter“ erschienen ist, habe ich das Verhalten der Integrale einer in der mathematischen Physik vorkommenden linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung für grosse Werthe eines darin enthaltenen Parameters vermittelst einer asymptotischen Darstellung untersucht.

In der vorliegenden Arbeit werden zunächst die früheren Untersuchungen auf eine allgemeinere Classe von linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung ausgedehnt. Es handelt sich dabei darum, das Verhalten von Integralen, welche ganze transcendente Functionen eines Parameters k sind oder sich in der Umgebung der Stelle $k = \infty$ nach positiven und negativen Potenzen von k entwickeln lassen, bei der Annäherung an die wesentlich singuläre Stelle (Unbestimmtheitsstelle) $k = \infty$ vermittelst asymptotischer Darstellungen zu untersuchen, in welchen Producte aus Exponentialausdrücken und Potenzreihen von $\frac{1}{k}$ auftreten*).

Daran knüpfe ich einige Beispiele (die Bessel'sche Function $J_n(x)$ als Function von n, die Gauss'sche Reihe als Function eines der drei ersten Elemente α, β, γ), wo derartige asymptotische Darstellungen in Verbindung stehen mit convergenten Entwicklungen bestehend aus Producten von Exponentialausdrücken und Reihen, welche nach rationalen Functionen des Parameters fortschreiten**).

*) Vgl. meinen Aufsatz im 49. Band der Math. Ann.

**) Vgl. die Facultätenreihen für $\int_x^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{x}$ und $\log \Gamma(x)$ (Schlömilch's Compendium der Analysis Bd. 2).

§ 1.

Die Coefficienten der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + F\frac{dy}{dx} + Gy = 0 \tag{1}$$

seien rationale Functionen eines Parameters k:

$$F = \frac{B_0k^\beta + B_1k^{\beta-1} + \cdots}{A_0k^\alpha + A_1k^{\alpha-1} + \cdots},$$

$$G = \frac{C_0k^\beta + C_1k^{\beta-1} + \cdots}{A_0k^\alpha + A_1k^{\alpha-1} + \cdots},$$

die reelle Veränderliche x wird im Folgenden stets auf das Intervall $a \leqq x \leqq b$ beschränkt, welches wir mit $\mathfrak{J}$ bezeichnen;

$$A_0, A_1, \ldots, B_0, B_1, \ldots, C_0, C_1, \ldots$$

seien im Intervalle $\mathfrak{J}$ stetige Functionen von x, und zwar sei A_0 in diesem Intervall von Null verschieden, so dass $A_0 = 1$ angenommen werden kann. Ein Integral y der Differentialgleichung (1) nehme für $x = a$ ebenso wie seine Ableitung $\frac{dy}{dx}$ einen von k unabhängigen Werth an. Wir betrachten dieses Integral als Function der complexen Veränderlichen k und untersuchen sein Verhalten für grosse Werthe von k.

Durch die Substitution

$$y = e^{-\frac{1}{2}\int_a^x F dx} \cdot z$$

geht die Differentialgleichung (1) über in

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \left(G - \frac{1}{4}F^2 - \frac{1}{2}\frac{dF}{dx}\right)z = 0.$$

Die Functionen y und z nehmen für $x = a$ denselben Werth an, während die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = e^{-\frac{1}{2}\int_a^x F dx}\left(\frac{dz}{dx} - \frac{1}{2}Fz\right)$$

den Zusammenhang zwischen den Anfangswerthen von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ liefert.

Wir können daher die weitere Untersuchung an die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + Hy = 0 \tag{2}$$

anknüpfen, wo H eine rationale Function von k bezeichnet, deren Coefficienten im Intervall $\mathfrak{J}$ stetige Functionen von x sind:

$$H = \frac{B_0 k^\beta + B_1 k^{\beta-1} + \cdots}{A_0 k^\alpha + A_1 k^{\alpha-1} + \cdots},$$

A_0 ist im Intervall $\mathfrak{J}$ von Null verschieden und kann gleich 1 angenommen werden. Ist $\beta - \alpha = \mu$, so haben wir die Reihenentwicklung

$$H = k^\mu \left(H_0 + \frac{H_1}{k} + \frac{H_2}{k^2} + \cdots\right),$$

welche für $|h| > R$ convergent ist. Es sind positive Grössen

$$h_\nu \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

so vorhanden, dass im Intervall $\mathfrak{J}$

$$|H_\nu| < h_\nu$$

ist und dass die Reihe

$$h_0 + \frac{h_1}{k} + \frac{h_2}{k^2} + \cdots$$

für $|k| > R$ convergirt. Wir betrachten das Integral y von (2), welches dadurch fixirt ist, dass für $x = a$

$$y = k^\lambda \left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{k} + \cdots\right),$$

$$\frac{dy}{dx} = k^\lambda \left(\beta_0 + \frac{\beta_1}{k} + \cdots\right)$$

sein soll, wo λ eine ganze Zahl ist und die Reihen für $|k| > R$ convergiren.

Wir integriren die Differentialgleichung (2) vermittelst fortschreitender Annäherung, indem wir setzen:

$$\frac{d^2 u_0}{dx^2} = 0,$$

$$\frac{d^2 u_m}{dx^2} + H u_{m-1} = 0 \quad (m = 1, 2, .., .);$$

für $x = a$ sei

$$u_0 = k^\lambda \left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{k} + \cdots\right), \quad \frac{du_0}{dx} = k^\lambda \left(\beta_0 + \frac{\beta_1}{k} + \cdots\right),$$

$$u_m = 0, \quad \frac{du_m}{dx} = 0 \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Dann ist

$$u_0 = k^\lambda \left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{k} + \cdots\right) + k^\lambda \left(\beta_0 + \frac{\beta_1}{k} + \cdots\right)(x - a),$$

$$u_m = -\int_a^x (x - z)\, H(z)\, u_{m-1}(z)\, dz \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Es seien $R' > R$ und $R'' > R'$ beliebige positive Grössen; für $a \leqq x \leqq b$ und für $R' < |k| < R''$ sei

$$|u_0| < N, \quad |H| < M.$$

Ist dann

$$|u_{m-1}| \leqq (b-a)^{m-1} M^{m-1} N \frac{(x-a)^{m-1}}{(m-1)!},$$

so folgt aus der Formel für u_m

$$|u_m| \leqq (b-a)^m M^m N \frac{(x-a)^m}{m!} \leq M^m N \frac{(b-a)^{2m}}{m!}.$$

Demnach ist die Reihe

$$y = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

für $a \leqq x \leqq b$ und für $|R'| < |k| < R''$ unbedingt und gleichmässig convergent. Dasselbe gilt für die Reihen

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{du_m}{dx}, \qquad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d^2 u_m}{dx^2},$$

welche demnach die Functionen $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ darstellen. Aus

$$\frac{d^2u_0}{dx^2} + \frac{d^2u_1}{dx^2} + \cdots + \frac{d^2u_n}{dx^2} + H(u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}) = 0$$

folgt für $n = \infty$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + Hy = 0,$$

d. h. die berechnete Reihe genügt der Differentialgleichung (1).

Die Formeln zur successiven Berechnung von u_0, u_1, u_2, ... ergeben

$$u_m = k^{\lambda+m\mu} \mathfrak{P}_m\left(\frac{1}{k}\right) \quad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

wo $\mathfrak{P}_m\left(\frac{1}{k}\right)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von $\frac{1}{k}$ bezeichnet, welche für $|k| > R$ convergirt und deren Coefficienten im Intervall $\mathfrak{J}$ stetige Functionen von x sind. Nach dem Weierstrass'schen Doppelreihensatz lässt sich y in eine nach positiven und negativen Potenzen von k fortschreitende Reihe entwickeln, welche für $R' < |k| < R''$ convergent ist:

$$y = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} F_\nu k^\nu.$$

Da R' und R'' beliebige positive Grössen sind, welche die Bedingung $R'' > R' > R$ erfüllen, so convergirt die Reihe für jeden endlichen Werth von k, dessen absoluter Betrag grösser als R ist.

Wir können demnach den Satz aussprechen:

Ein Integral y der Differentialgleichung (1), *welches nebst seiner Ableitung $\frac{dy}{dx}$ für $x = a$ einen vom Parameter k unabhängigen Werth annimmt, lässt sich, wenn x auf das Intervall $a \leqq x \leqq b$ beschränkt*

wird, in eine nach positiven und negativen Potenzen von k fortschreitende Reihe entwickeln, welche für jeden endlichen Werth von k, dessen absoluter Betrag eine gewisse Grenze überschreitet, convergent ist.

Es ist bekannt, dass ein solches Integral y eine ganze transcendente Function von k ist, wenn F und G ganze rationale Functionen von k sind.

§ 2.

Man kann der Differentialgleichung (1) die Form geben:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^n P \frac{dy}{dx} + k^{2n} Q y = 0, \tag{3}$$

wo n eine ganze positive Zahl ist und P, Q rationale Functionen von k, welche die für $|k| > R$ convergenten Reihenentwicklungen zulassen:

$$P = P_0 + \frac{P_1}{k} + \frac{P_2}{k^2} + \cdots,$$

$$Q = Q_0 + \frac{Q_1}{k} + \frac{Q_2}{k^2} + \cdots.$$

Vom Fall $n = 0$ können wir absehen, da alsdann ein Integral y, welches nebst $\frac{dy}{dx}$ für $x = a$ einen von k unabhängigen Werth annimmt, in eine Potenzreihe von $\frac{1}{k}$ entwickelbar ist.

Durch die Substitution

$$\frac{d \log y}{dx} = z$$

geht die Differentialgleichung (3) über in

$$\frac{dz}{dx} + z^2 + k^n P z + k^{2n} Q = 0,$$

welche formell befriedigt wird durch die Reihe

$$z = k^n \left(z_0 + \frac{z_1}{k} + \frac{z_2}{k^2} + \cdots\right);$$

die Coefficienten $z_0, z_1, \ldots$ sind Functionen von x, welche man aus den Gleichungen berechnet:

$$z_0^2 + P_0 z_0 + Q_0 = 0,$$
$$(2z_0 + P_0) z_1 + (P_1 z_0 + Q_1) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(2z_0 + P_0) z_\nu + F_\nu(z_0, z_1, \ldots z_{\nu-1}) + \frac{dz_{\nu-n}}{dx} = 0;$$

für $\nu < n$ fällt das Glied $\frac{dz_{\nu-n}}{dx}$ fort.

Es ist

$$2z_0 + P_0 = \pm \sqrt{P_0^2 - 4Q_0};$$

wenn $P_0^2 - 4Q_0$ im Intervall $\mathfrak{J}$ stets dasselbe Vorzeichen besitzt, ist z_ν in diesem Intervall stetig. Da z_0 aus einer quadratischen Gleichung berechnet wird, so sind zwei Reihen von der angegebenen Form vorhanden. Die Differentialgleichung wird formell befriedigt durch zwei Reihen von der Form

$$y = e^{k^n \int^x \left(z_0 + \frac{z_1}{k} + \cdots\right) dx},$$

d. i. von der Form

$$y = e^{\omega_0 k^n + \omega_1 k^{n-1} + \cdots + \omega_{n-1} k} \left(\varphi_0 + \frac{\varphi_1}{k} + \frac{\varphi_2}{k^2} + \cdots\right),$$

wo $\omega_0, \omega_1, \ldots, \varphi_0, \varphi_1, \ldots$ Functionen von x sind, welche freilich nicht vollständig bestimmt sind, da die untere Grenze des Integrals im Exponenten von e willkürlich gewählt werden kann.

Im Folgenden soll die Bedeutung dieser Reihen nur im Fall $n = 1$ untersucht werden. Ein Specialfall wurde in der früheren Arbeit*) behandelt, nämlich die der mathematischen Physik entnommene Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left(A \frac{dy}{dx}\right) + (k^2 B + C) y = 0,$$

welche aus (3) hervorgeht, wenn man $n = 1$ und

$$P_0 = 0, \; P_2 = P_3 = \cdots = 0; \quad Q_1 = 0, \; Q_3 = Q_4 = \cdots = 0$$

annimmt.

§ 3.

In der Differentialgleichung (3) mit $n = 1$ sei durch die in § 1 benutzte Substitution das Glied mit $\frac{dy}{dx}$ beseitigt. Wir können somit der weiteren Betrachtung die Gleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 Q y = 0 \tag{4}$$

zu Grund legen, wo

$$Q = Q_0 + \frac{Q_1}{k} + \frac{Q_2}{k^2} + \cdots$$

für $|k| > R$ convergent ist, wenn x im Intervall $\mathfrak{J}$ liegt; *in diesem Intervall sei Q_0 positiv.* Im Falle $Q_0 < 0$ würde man k durch ki ersetzen; denn dass die Functionen $Q_1, Q_2, \ldots$ reell sind, ist für das Folgende nicht nöthig. Wir betrachten das Integral y von (4), welches dadurch fixirt ist, dass für $x = a$

*) Die im Bd. 52, S. 271 erschienene Arbeit wird im Folgenden kurz mit A. bezeichnet.

$$y = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{k} + \cdots,$$
$$\frac{dy}{dx} = k\left(\beta_0 + \frac{\beta_1}{k} + \cdots\right)$$

sein soll; die gegebenen Potenzreihen seien für $|k| > R$ convergent.

Die Gleichung (4) wird formell befriedigt durch eine Reihe von der Form

$$y = e^{ik\omega}\left(\varphi_0 + \frac{\varphi_1}{k} + \frac{\varphi_2}{k^2} + \cdots\right).$$

Setzt man diese Reihe in (4) ein, so erhält man nach Division mit $e^{ik\omega}$ durch Vergleichung der Coefficienten von $k^2, k, k^{-(\nu-1)}$:

$$\omega'^2 = Q_0,$$
$$2\omega'\varphi_0' + (\omega'' - iQ_1)\varphi_0 = 0,$$
$$2\omega'\varphi_\nu' + (\omega'' - iQ_1)\varphi_\nu = \cdots,$$

wo die rechte Seite von den Functionen $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_{\nu-1}$ und ihren Ableitungen abhängt. Wir nehmen

$$\omega' = \sqrt{Q_0}$$

im Intervall $\mathfrak{J}$ positiv und setzen

$$\omega = \int_a^x \sqrt{Q_0}\, dx.$$

Aendert man in den obigen Formeln das Vorzeichen von i, so erhält man eine zweite der Gleichung (4) genügende Reihe

$$y = e^{-ik\omega}\left(\psi_0 + \frac{\psi_1}{k} + \frac{\psi_2}{k^2} + \cdots\right).$$

Wir integriren die zur Bestimmung der Functionen φ_ν, ψ_ν dienenden Differentialgleichungen so, dass die Reihe

$$y = e^{ik\omega}\left(\varphi_0 + \frac{\varphi_1}{k} + \cdots\right) + e^{-ik\omega}\left(\psi_0 + \frac{\psi_1}{k} + \cdots\right)$$

die Anfangsbedingungen des oben definirten Integrals y formell erfüllt. Unter Anwendung der Bezeichnung $\overline{\varphi} = \varphi(\alpha)$ haben wir die Bedingungen

$$\overline{\varphi}_0 + \overline{\psi}_0 = \overline{\alpha}_0, \quad i\sqrt{\overline{Q}_0}(\overline{\varphi}_0 - \overline{\psi}_0) = \beta_0,$$
$$\overline{\varphi}_\nu + \overline{\psi}_\nu = \overline{\alpha}_\nu, \quad i\sqrt{\overline{Q}_0}(\overline{\varphi}_\nu - \overline{\psi}_\nu) + \overline{\varphi}'_{\nu-1} + \overline{\psi}'_{\nu-1} = \beta_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Die Functionen φ_ν, ψ_ν werden mit diesen Anfangswerthen durch die obigen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung im Intervall $\mathfrak{J}$ als eindeutige und stetige Functionen definirt und können durch Quadraturen dargestellt werden.

Wir integriren nun die Gleichung (4) vermittelst successiver Annäherung. Setzt man

$$v_1 = e^{ik\omega}\varphi_0, \qquad v_2 = e^{-ik\omega}\psi_0$$

und

$$D(u) = \frac{\begin{vmatrix} u & u' & u'' \\ v_1 & v_1' & v_2'' \\ v_2 & v_2' & v_2'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} v_1 & v_1' \\ v_2 & v_2' \end{vmatrix}},$$

so besitzt die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung $D(u) = 0$ die Integrale v_1 und v_2. Der Ausdruck

$$D(u) = \frac{d^2u}{dx^2} + k\left(p_0 + \frac{p_1}{k} + \cdots\right)\frac{du}{dx} + k^2\left(q_0 + \frac{q_1}{k} + \cdots\right)u$$

ist unabhängig von den in φ_0, ψ_0 enthaltenen Integrationsconstanten, da er nur von

$$\frac{\varphi_0'}{\varphi_0} = -\frac{\omega'' - iQ_1}{2\omega'}, \quad \frac{\psi_0'}{\psi_0} = -\frac{\omega'' + iQ_1}{2\omega'}$$

abhängt. Aus $D(v_1) = 0$ erhält man durch Division mit $e^{ik\omega}$ und Vergleichung der Coefficienten von k^2 und k

$$-\omega'^2 + ip_0\omega' + q_0 = 0,$$
$$2\omega'\varphi_0' + (\omega'' + p_1\omega' - iq_1)\varphi_0 = 0;$$

entsprechend erhält man aus $D(v_2) = 0$

$$-\omega'^2 - ip_0\omega' + q_0 = 0,$$
$$2\omega'\psi_0' + (\omega'' + p_1\omega' + iq_1)\psi_0 = 0.$$

Daraus folgt

$$p_0 = 0, \; p_1 = 0; \quad q_0 = Q_0, \; q_1 = Q_1,$$

so dass, wenn man

$$\frac{d^2u}{dx^2} + k^2Qu = D(u) + E(u)$$

setzt,

$$E(u) = \frac{S}{k}\frac{du}{dx} + Tu$$

wird, wo S und T Functionen von x und k sind, welche sich in convergente Potenzreihen von $\frac{1}{k}$ entwickeln lassen.

Wir integriren die Gleichungen

$$D(u_0) = 0,$$
$$D(u_m) + E(u_{m-1}) = 0 \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\bar{u}_0 = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{k} + \cdots, \quad \bar{u}_0' = k\left(\beta_0 + \frac{\beta_1}{k} + \cdots\right),$$
$$\bar{u}_m = 0, \quad \bar{u}_m' = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Zunächst haben wir

$$u_0 = c_1 e^{ik\omega} \varphi_0 + c_2 e^{-ik\omega} \psi_0,$$

wo

$$c_1 = 1 + \frac{\gamma_1'}{k} + \frac{\gamma_1''}{k^2} + \cdots,$$
$$c_2 = 1 + \frac{\gamma_2'}{k} + \frac{\gamma_2''}{k^2} + \cdots$$

aus den Gleichungen

$$c_1 \bar{\varphi}_0 + c_2 \bar{\psi}_0 = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{k} + \cdots$$
$$c_1 (ik\bar{\omega}' \bar{\varphi}_0 + \bar{\varphi}_0') + c_2 (-ik\bar{\omega}' \bar{\psi}_0 + \bar{\psi}_0') = k\left(\beta_0 + \frac{\beta_1}{k} + \cdots\right)$$

berechnet werden. Ferner ist für $m = 1, 2, \ldots$

$$u_m = -\frac{e^{ik\omega}\varphi_0}{2ik} \int_a^x \frac{e^{-ik\omega}\psi_0 E(u_{m-1})\,dx}{\omega'\varphi_0\psi_0 - \frac{\varphi_0\psi_0' - \psi_0\varphi_0'}{2ik}}$$
$$+ \frac{e^{-ik\omega}\psi_0}{2ik} \int_a^x \frac{e^{ik\omega}\varphi_0 E(u_{m-1})\,dx}{\omega'\varphi_0\psi_0 - \frac{\varphi_0\psi_0' - \psi_0\varphi_0'}{2ik}}.$$

Aus diesem Ausdruck für u_m geht $E(u_m)$ dadurch hervor, dass m vor den Integralzeichen φ_0, ψ_0 bezw. durch

$$\Phi_0 = S\left(i\omega'\varphi_0 + \frac{\varphi_0'}{k}\right) + T\varphi_0,$$
$$\Psi_0 = S\left(-i\omega'\psi_0 + \frac{\psi_0'}{k}\right) + T\psi_0$$

ersetzt.

Wir setzen

$$k = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$

und beschränken uns vorläufig auf das Gebiet

$$r > R, \quad 0 \leqq \vartheta \leqq \pi,$$

wo R hinreichend gross anzunehmen ist. In diesem Gebiet seien wenn x auf das Intervall $\mathfrak{J}$ beschränkt wird, die absoluten Beträg der Grössen

$$\varphi_0, \psi_0, c_1\varphi_0, c_2\psi_0, \Phi_0, \Psi_0, c_1\Phi_0, c_2\Psi_0,$$

sowie

$$\frac{\psi_0}{\omega'\varphi_0\psi_0 - \frac{\varphi_0\psi_0' - \psi_0\varphi_0'}{2ik}}, \qquad \frac{\varphi_0}{\omega'\varphi_0\psi_0 - \frac{\varphi_0\psi_0' - \psi_0\varphi_0'}{2ik}}$$

kleiner als M. Dann sind die absoluten Beträge von u_0 und $E(u_0)$ höchstens gleich

$$M(e^{-r\omega\sin\vartheta} + e^{r\omega\sin\vartheta}).$$

Angenommen, es sei $|u_{m-1}|$ sowohl wie $|E(u_{m-1})|$ höchstens gleich

$$\frac{M^{2m-1}}{(2r)^{m-1}} \frac{(x-a)^{m-1}}{(m-1)!} (e^{-r\omega\sin\vartheta} + 3^{m-1} e^{r\omega\sin\vartheta}).$$

Dann sind $|u_m|$ und $|E(u_m)|$ höchstens gleich

$$\frac{e^{-r\omega\sin\vartheta} M}{2r} \int_a^x M e^{r\omega\sin\vartheta} \frac{M^{2m-1}}{(2r)^{m-1}} (e^{-r\omega\sin\vartheta} + 3^{m-1} e^{r\omega\sin\vartheta}) \frac{(x-a)^{m-1}}{(m-1)!} dx$$

$$+ \frac{e^{r\omega\sin\vartheta} M}{2r} \int_a^x M e^{-r\omega\sin\vartheta} \frac{M^{2m-1}}{(2r)^{m-1}} (e^{-r\omega\sin\vartheta} + 3^{m-1} e^{r\omega\sin\vartheta}) \frac{(x-a)^{m-1}}{(m-1)!} dx$$

$$\leqq \frac{M^{2m+1}}{(2r)^m} e^{-r\omega\sin\vartheta} \left[\int_a^x \frac{(x-a)^{m-1}}{(m-1)!} dx + 3^{m-1} e^{r\omega\sin\vartheta} \int_a^x \frac{(x-a)^{m-1}}{(m-1)!} dx \right]$$

$$+ \frac{M^{2m+1}}{(2r)^m} e^{r\omega\sin\vartheta} (1 + 3^{m-1}) \int_a^x \frac{(x-a)^{m-1}}{(m-1)!} dx$$

$$\leqq \frac{M^{2m+1}}{(2r)^m} \frac{(x-a)^m}{m!} (e^{-r\omega\sin\vartheta} + 3^m e^{r\omega\sin\vartheta}),$$

da $1 + 2 \cdot 3^{m-1} \leqq 3^m$ ist. Demnach ist

$$|e^{ik\omega} u_m| \leqq \frac{M^{2m+1}}{(2r)^m} \frac{(x-a)^m}{m!} (1 + 3^m),$$

d. h. die Reihe

$$e^{ik\omega} \sum_{m=0}^{\infty} u_m$$

ist für

$$|k| > R, \quad 0 \leqq \arg k \leqq \pi, \quad a \leqq x \leqq b$$

unbedingt und gleichmässig convergent; dasselbe gilt für die Reihe

$$e^{ik\omega} k^n \sum_{m=n}^{\infty} u_m \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Der Fall

$$\pi \leqq \arg k \leqq 2\pi$$

kann durch die Substitution $k = -k'$ auf den soeben behandelten zurückgeführt werden. Man erkennt, das die Reihe

$$e^{-ik\omega}\sum_{m=0}^{\infty}u_m$$

für

$$|k|>R,\quad \pi\leqq\arg k\leqq 2\pi,\quad a\leqq x\leqq b$$

unbedingt und gleichmässig convergent ist, ebenso die Reihe

$$e^{-ik\omega}k^n\sum_{m=n}^{\infty}u_m\quad(n=1,2,\ldots).$$

Die Reihe

$$y=u_0+u_1+u_2+\cdots$$

ist demnach im ganzen Gebiet $|k|>R$ convergent, wenn auch nicht gleichmässig. Dass diese Reihe der Differentialgleichung (4) genügt, wird wie in A. § 2 gezeigt; sie stellt also das durch die Anfangsbedingungen

$$\bar{y}=\alpha_0+\frac{\alpha_1}{k}+\cdots,\qquad \bar{y}'=k\left(\beta_0+\frac{\beta_1}{k}+\cdots\right)$$

definirte Integral von (4) dar.

Nun wird der in A. § 3 aufgestellte Hilfssatz ebenso wie früher benutzt. Indem man die Schlussweise in A. § 4 und § 5 mit den erforderlichen Abänderungen anwendet, findet man folgenden Satz:

Wenn man

$$y=e^{ik\omega}\left(\varphi_0+\frac{\varphi_1}{k}+\cdots+\frac{\varphi_n}{k^n}\right)$$
$$+e^{-ik\omega}\left(\psi_0+\frac{\psi_1}{k}+\cdots+\frac{\psi_n}{k^n}\right)+\frac{R_n}{k^n}$$

setzt, so nähert sich $e^{ik\omega}R_n$ gleichmässig der Grenze Null, wenn k mit $0\leqq\arg k\leqq\pi$ ins Unendliche geht, während sich $e^{-ik\omega}R_n$ gleichmässig der Grenze Null nähert, wenn k mit $\pi\leqq\arg k\leqq 2\pi$ unendlich wird.

Im Gebiet $\delta<\arg k<\pi-\delta$, wo δ eine beliebig kleine positive Grösse bezeichnet, wird die Functiom y durch die Reihe

$$e^{-ik\omega}\left(\psi_0+\frac{\psi_1}{k}+\cdots\right),$$

im Gebiet $\pi+\delta<\arg k<2\pi-\delta$ durch die Reihe

$$e^{ik\omega}\left(\varphi_0+\frac{\varphi_1}{k}+\cdots\right)$$

gleichmässig asymptotisch dargestellt, wenn $x>a$, also $\omega>0$ ist.

§ 4.

Der Hilfssatz A. § 3 kann in folgender Form dargestellt werden. Die Function

$$y = e^{ik\omega} \int_a^x e^{-ik\omega} f(x)\, dx$$

genügt der linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dy}{dx} + ik\omega' y = f. \tag{5}$$

Setzt man

$$f_0 = f, \quad f_1 = \frac{d}{dx}\frac{f}{\omega'}, \quad f_2 = \frac{d}{dx}\frac{f_1}{\omega'}, \cdots,$$

so ist

$$y = -\frac{1}{ik\omega'}\left[f_0 + \frac{f_1}{ik} + \cdots + \frac{f_{n-1}}{(ik)^{n-1}}\right] + \frac{e^{ik\omega}}{ik\omega'(a)}\left[f_0(a) + \frac{f_1(a)}{ik} + \cdots + \frac{f_{n-1}(a)}{(ik)^{n-1}}\right] + \frac{\varrho_n}{(ik)^n};$$

ϱ_n nähert sich gleichmässig der Grenze Null, wenn k mit

$$0 \leqq \arg k \leqq \pi$$

ins Unendliche geht, während sich $e^{-ik\omega}\varrho_n$ gleichmässig der Null nähert, wenn k mit $\pi \leqq \arg k \leqq 2\pi$ unendlich gross wird.

Der erste Theil der Behauptung erhellt daraus, dass die Function y, wenn man darin k durch $2k$ ersetzt, gleich $e^{ik\omega}J_2$ ist (Bezeichnung von A. § 3); multiplicirt man J_1 mit $e^{-ik\omega}$ und ersetzt man $2k$ durch $-k$, so ergiebt sich der zweite Theil des Satzes.

Das Integral der Differentialgleichung (5), welches für $x = a$ den constanten Werth C annimmt, ist

$$\bar{y} = y + Ce^{2ik\omega};$$

nimmt man $x > a$ an und setzt man

$$\bar{y} = -\frac{1}{ik\omega'}\left[f_0 + \frac{f_1}{ik} + \cdots + \frac{f_{n-1}}{(ik)^{n-1}}\right] + \frac{\sigma_n}{(ik)^n},$$

so nähert sich σ_n gleichmässig der Grenze Null, wenn k mit

$$\delta < \arg k < \pi - \delta$$

ins Unendliche geht, wobei δ eine beliebig kleine positive Grösse bezeichnet. Die von a unabhängige Reihe

$$-\frac{1}{ik\omega'}\left(f_0 + \frac{f_1}{ik} + \frac{f_2}{(ik)^2} + \cdots\right),$$

welche der Gleichung (5) formell genügt, aber im allgemeinen

divergent*) ist, stellt also unendlich viele Integrale $\bar{y}$ von (5) asymptotisch dar, wenn k in der oberen Halbebene mit Ausschluss der reellen Axe ins Unendliche geht.

Wir betrachten noch die nicht homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = f, \tag{6}$$

wo f eine im Intervall $0 \leqq x \leqq l$ nebst ihren Ableitungen stetige Function von x darstellt. Wir verstehen unter y dasjenige Integral von (6), welches nebst seiner Ableitung $\frac{dy}{dx}$ für $x = 0$ verschwindet:

$$y = \frac{e^{ikx}}{2ik}\int_0^x e^{-ikx} f\,dx - \frac{e^{-ikx}}{2ik}\int_0^x e^{ikx} f\,dx.$$

Nach A. § 3 ist**)

$$e^{ikx}\int_0^x e^{-ikx} f\,dx = -\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{f^{(\nu-1)}(x)}{(ik)^\nu} + e^{ikx}\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{f^{(\nu-1)}(0)}{(ik)^\nu} + \frac{e^{ikx}}{(ik)^{n-1}}\int_0^x e^{-ikx} f^{(n-1)}\,dx,$$

$$e^{-ikx}\int_0^x e^{ikx} f\,dx = \sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{(-1)^{\nu-1} f^{(\nu-1)}(x)}{(ik)^\nu} - e^{-ikx}\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{(-1)^{\nu-1} f^{(\nu-1)}(0)}{(ik)^\nu} + \frac{(-1)^{n-1} e^{-ikx}}{(ik)^{n-1}}\int_0^x e^{ikx} f^{(n-1)}\,dx,$$

also

$$y = \frac{f(x)}{k^2} - \frac{f''(x)}{k^4} + - \cdots - \cos kx\left(\frac{f(0)}{k^2} - \frac{f''(0)}{k^4} + \cdots\right) - \sin kx\left(\frac{f'(0)}{k} - \frac{f'''(0)}{k^3} + - \cdots\right) + \frac{R_n}{k^n},$$

dabei brechen die Reihen mit k^{-n} oder $k^{-(n-1)}$ ab, und es ist

---

*) Im Falle $\omega' = 1$, $f = \frac{1}{x}$ hat man die für jeden Werth von k divergente Reihe

$$-\frac{1}{ikx} + \frac{1!}{(ikx)^2} - \frac{2!}{(ikx)^3} + \cdots.$$

**) Dabei ist $f^{(m)}(x) = \frac{d^m f}{dx^m}$ gesetzt.

$$R_n = \frac{e^{ikx}}{2i^n}\int_0^x e^{-ikx} f^{(n-1)} dx$$

$$+ \frac{e^{-ikx}}{2(-i)^n}\int_0^x e^{ikx} f^{(n-1)} dx.$$

Hieraus schliesst man, dass sich $e^{ikx} R_n$ gleichmässig der Grenze Null nähert, wenn k mit $0 \leqq \arg k \leqq \pi$ unendlich gross wird. Wir können uns auf die obere Halbebene beschränken, da y eine eindeutige Function von k^2 ist.

Das Integral von (6), welches für $x = 0$ und für $x = l$ verschwindet, ist

$$Y = y - \frac{\sin kx}{\sin kl}\, y(l).$$

Man findet

$$Y = \frac{f(x)}{k^2} - \frac{f''(x)}{k^4} + - \cdots$$

$$- \frac{\sin kx}{\sin kl}\left(\frac{f(l)}{k^2} - \frac{f''(l)}{k^4} + - \cdots\right)$$

$$- \frac{\sin k(l-x)}{\sin kl}\left(\frac{f(0)}{k^2} - \frac{f''(0)}{k^4} + - \cdots\right) + \frac{\mathfrak{R}_n}{k^n};$$

die Reihen brechen wieder mit k^{-n} oder mit $k^{-(n-1)}$ ab; es ist

$$\mathfrak{R}_n = R_n - \frac{\sin kx}{\sin kl} R_n(l).$$

Bei Beschränkung auf das Gebiet $\delta < \arg k < \pi - \delta$ können wir das erste Glied von R_n neben dem zweiten vernachlässigen und $\sin kx$, $\sin kl$ durch $\frac{e^{-ikx}}{-2i}$, $\frac{e^{-ikl}}{-2i}$, also $\frac{\sin kx}{\sin kl}$ durch $e^{ik(l-x)}$ ersetzen. Demnach ist $\mathfrak{R}_n$ bis auf Glieder, welche für $\lim k = \infty$ verschwinden, gleich

$$\frac{(-1)^n e^{-ikx}}{2i^n}\int_0^x e^{ikx} f^{(n-1)} dx - \frac{(-1)^n e^{-ikx}}{2i^n}\int_0^l e^{ikx} f^{(n-1)} dx$$

$$= \frac{(-1)^n e^{-ikx}}{2i^n}\int_x^l e^{ikx} f^{(n-1)} dx$$

oder, wenn $x = l - \xi$ gesetzt wird, gleich

$$\frac{(-1)^n e^{ik\xi}}{2i^n}\int_0^\xi e^{-ik\xi} f^{(n-1)} d\xi.$$

Da der Grenzwerth dieses Ausdrucks ebenfalls gleich Null ist, so hat man

$$\lim \mathfrak{R}_n = 0.$$

Ersetzt man $\frac{\sin kx}{\sin kl}$ durch $e^{ik(l-x)}$ und $\frac{\sin k(l-x)}{\sin kl}$ durch e^{ikx}, so sieht man, dass man schreiben kann:

$$Y = \frac{f(x)}{k^2} - \frac{f''(x)}{k^4} + - \cdots + \frac{\varrho_n}{k^n};$$

die Reihe bricht mit k^{-n} oder $k^{-(n-1)}$ ab, und ϱ_n nähert sich gleichmässig der Grenze Null, wenn k mit $\delta < \arg k < \pi - \delta$ ins Unendliche geht. Demnach ist insbesondere

$$\lim k^2 Y = f^*).$$

§ 5.

Die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (k^2 - k_1 \cos 2x)y = 0^{**}), \tag{7}$$

welche in der Störungstheorie und als Differentialgleichung der Functionen des elliptischen Cylinders in der mathematischen Physik vorkommt, gehört in die in A. behandelte Classe. Wir bezeichnen mit $F(x)$ das Integral von (7) mit den Anfangsbedingungen

$$F(0) = 1, \; F'(0) = 0.$$

Für grosse k besteht die asymptotische Gleichung

$$F(x) \sim \cos kx \left(\varphi_0 + \frac{\varphi_2}{k^2} + \cdots\right) + \sin kx \left(\frac{\varphi_1}{k} + \frac{\varphi_3}{k^3} + \cdots\right),$$

---

*) Man vergleiche damit den von Herrn Poincaré (Sur les équations de la Physique mathématique, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo 1894) als wahrscheinlich hingestellten, aber nur theilweise bewiesenen Satz: Ist u das Integral der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = f,$$

welches auf der Begrenzung eines Gebietes verschwindet, so hat man

$$\lim \xi u = f,$$

wenn die complexe Veränderliche ξ in irgend einer Richtung mit Ausschluss der positiven reellen Axe ins Unendliche geht. Vgl. Zaremba, Comptes rendus, Juli 1898.

**) Vgl. Poincaré, Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste, Bd. II, S. 228 ff.

und zwar ist nach A. § 1

$$\varphi_0 = 1,$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{4} k_1 \sin 2x,$$

$$\varphi_{2\nu} = \frac{1}{2}\int_0^x (\varphi''_{2\nu-1} - k_1 \cos 2x \,.\, \varphi_{2\nu-1})\, dx \qquad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

$$\varphi_{2\nu+1} = -\frac{1}{2}\int_0^x (\varphi''_{2\nu} - k_1 \cos 2x \,.\, \varphi_{2\nu})\, dx - \varphi'_{2\nu}(0) \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Um die Differentialgleichung (7) vermittelst successiver Annäherung zu integriren, setzt man

$$\frac{d^2 u_0}{dx^2} + k^2 u_0 = 0$$

$$\frac{d^2 u_m}{dx^2} + k^2 u_m = k_1 \cos 2x \,.\, u_{m-1} \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

und nimmt für $x = 0$

$$u_0 = 1, \; u_0' = 0; \quad u_m = 0, \; u_m' = 0 \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

an. Man findet hieraus

$$u_m = k_1^m F_m(x),$$

wo $F_m(x)$ von k_1 unabhängig ist. Bei Poincaré (a. a. O.) ist

$$F(x) = F_0 + k_1 F_1 + k_1^2 F_2 + \ldots$$

gesetzt; man hat dann

$$\frac{d^2 F_0}{dx^2} + k^2 F_0 = 0,$$

$$\frac{d^2 F_m}{dx^2} + k^2 F_m = F_{m-1} \cos 2x \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$F_0(0) = 1, \quad F_0'(0) = 0,$$
$$F_m(0) = 0, \quad F_m'(0) = 0, \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Hieraus berechnet man

$$F_0(x) = \cos kx,$$

$$F_1(x) = -\frac{\cos(k+2)x - \cos kx}{8(k+1)} + \frac{\cos(k-2)x - \cos kx}{8(k-1)},$$

$$F_2(x) = -\frac{\cos(k+4)x - \cos kx}{128(k+1)(k+2)} + \frac{\cos(k-4)x - \cos kx}{128(k-1)(k-2)}$$
$$-\frac{\cos(k+2)x - \cos kx}{64(k+1)^2} + \frac{\cos(k+2)x - \cos kx}{64(k-1)^2}$$
$$+\frac{\cos(k+2)x - \cos kx}{64(k+1)(k-1)} + \frac{\cos(k-2)x - \cos kx}{64(k+1)(k-1)}$$
$$-\frac{x\sin kx}{16k(k+1)} + \frac{x\sin kx}{16k(k-1)}.$$

Allgemein erhält man

$$F_m(x) = A_m \cos kx + B_m \sin kx;$$

A_m und B_m sind rationale Functionen von k mit den singulären Stellen $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Wenn man A_m, B_m in Potenzreihen von $\frac{1}{k}$ entwickelt und

$$\sum_{m=0}^{\infty} k_1^m A_m, \qquad \sum_{m=0}^{\infty} k_1^m B_m$$

nach Potenzen von $\frac{1}{k}$ ordnet, erhält man wieder die oben A. § 1 angeschriebene Entwicklung. Denn auch in A. § 4 wurde $u_m = k_1^m F_m(x)$ als Summe von mit $\cos kx$ und $\sin kx$ multiplicirten Potenzreihen von $\frac{1}{k}$ dargestellt und $\sum_{m=0}^{\infty} u_m$ durch formale Addition gebildet. Jetzt sind allerdings die Potenzreihen für A_m, B_m convergent, wenn $|k|$ eine gewisse Grenze überschreitet, aber diese Grenze wächst ins Unendliche, wenn m unendlich gross wird. Es braucht nur gezeigt zu werden, dass, wenn eine Function u die für hinreichend grosse Werthe von $|k|$ convergente Entwicklung

$$u = e^{ikx}\left(a_0 + \frac{a_1}{k} + \cdots\right) + e^{-ikx}\left(b_0 + \frac{b_1}{k} + \cdots\right)$$

zulässt und wenn gleichzeitig im Sinn von § 3 die asymptotische Gleichung

$$u = e^{ikx}\left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{k} + \cdots\right) + e^{-ikx}\left(\beta_0 + \frac{\beta_1}{k} + \cdots\right)$$

besteht,

$$a_\nu = \alpha_\nu, \quad b_\nu = \beta_\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

sein muss. Angenommen, es sei $a_\nu = \alpha_\nu$, $b_\nu = \beta_\nu$ für $\nu = 0, 1, \ldots n-1$, so ist

$$e^{ikx}(a_n - \alpha_n) + e^{-ikx}(b_n - \beta_n)$$
$$+ e^{ikx}\left(\frac{a_{n+1}}{k} + \cdots\right) + e^{-ikx}\left(\frac{b_{n+1}}{k} + \cdots\right) = R_n,$$

wo $\lim e^{ikx} R_n$ oder $\lim e^{-ikx} R_n$ gleich Null ist, je nachdem k mit $0 \leqq \arg k \leqq \pi$ oder mit $\pi \leqq \arg k \leqq 2\pi$ ins Unendliche geht. Wenn

man k in der einen oder in der anderen Art unendlich werden lässt, erhält man $b_n = \beta_n$ und $a_n = \alpha_n$.

Von Interesse ist das Vorhandensein dreier Entwicklungen der Function $F(x)$. Man hat eine beständig convergente Potenzreihe von k^2, die asymptotische Reihe

$$\cos kx\left(\varphi_0 + \frac{\varphi_2}{k^2} + \cdots\right) + \sin kx\left(\frac{\varphi_1}{k} + \frac{\varphi_3}{k^3} + \cdots\right)$$

und die Reihe

$$\sum_{m=0}^{\infty} k_1^m (A_m \cos kx + B_m \sin kx),$$

deren Coefficienten A_m, B_m rationale Functionen von k sind und welche für jeden endlichen Werth von k convergirt.

§ 6.

Die Bessel'sche Function $J_n(x)$ sei definirt durch die Reihe

$$J_n(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{\Gamma(n+1)}\left[1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1.(n+1)} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{1.2.(n+1)(n+2)} + - \cdots\right],$$

welche für jeden Werth von x und für jeden Werth von n convergirt (mit Ausschluss der negativen ganzen Zahlen, wenn der Factor $\frac{1}{\Gamma(n+1)}$ weggelassen wird). Wir setzen für x einen festen Werth und betrachten $J_n(x)$ als Function der complexen Veränderlichen n.

Die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu,$$

wo

$$u_\nu = \frac{\left(-\frac{x}{2}\right)^{2\nu}}{1.2\ldots\nu.(n+1)\ldots(n+\nu)}$$

gesetzt ist, ist, wenn δ eine beliebig kleine positive Grösse bedeutet, für

$$-\pi + \delta < \arg n < \pi - \delta$$

unbedingt und gleichmässig convergent. Denn ist μ eine ganze positive Zahl, so ist $|n + \mu|$, die Entfernung des Punktes n vom Punkte $-\mu$, kleiner als die von $-\mu$ auf die Gerade $\arg n = \delta$ gefällte Senkrechte $\mu \sin \delta$, wo auch n in dem bezeichneten Gebiet liegen mag. Demnach ist

$$|u_\nu| < \frac{\left(\frac{|x^2|}{4 \sin \delta}\right)^\nu}{\nu!},$$

woraus das Behauptete folgt. In demselben Gebiet ist die Reihe

$$n^{\mu} \sum_{\nu=\mu}^{\infty} u_{\nu} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots)$$

gleichmässig convergent.

Die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} u_{\nu}$ ist in der Umgebung einer jeden Stelle n, mit Ausschluss der negativen ganzen Zahlen, die Reihe $(n+\mu)\sum_{\nu=0}^{\infty} u_{\nu}$, wo μ eine positive ganze Zahl ist, auch in der Umgebung von $n = -\mu$ gleichmässig convergent. $\sum_{\nu=0}^{\infty} u_{\nu}$ ist eine analytische Function von n, welche keine anderen singulären Stellen besitzt als $n = -1, -2, -3, \ldots$. Nun ist

$$\frac{1}{\Gamma(n+1)} = e^{Cn} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{n}{\nu}\right) e^{-\frac{n}{\nu}}$$

eine ganze transcendente Function von n mit den Nullstellen $n = -1, -2, \ldots$. Setzt man

$$J_n = \left(\frac{x}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{(n+\mu)\,\Gamma(n+1)} \cdot (n+\mu) \sum_{\nu=0}^{\infty} u_{\nu},$$

so sieht man, dass sich die Function J_n auch bei $n = -\mu$ regulär verhält. Demnach ist J_n *eine ganze transcendente Function von* n.

Um deren Verhalten bei der Annäherung an die wesentlich singuläre Stelle $n = \infty$ zu untersuchen, kann man eine asymptotische Darstellung benutzen. Man hat

$$u_{\nu} = \frac{1}{n^{\nu}}\, \mathfrak{P}_{\nu}\left(\frac{1}{n}\right),$$

wo $\mathfrak{P}_{\nu}\left(\frac{1}{n}\right)$ eine für $|n| > \nu$ convergente Potenzreihe bezeichnet; wir schreiben

$$u_{\nu} = \frac{c_{\nu\nu}}{n^{\nu}} + \frac{c_{\nu,\nu+1}}{n^{\nu+1}} + \cdots + \frac{c_{\nu\mu}}{n^{\mu}} + \frac{\varepsilon_{\nu}}{n^{\mu}},$$

wenn $\nu \leqq \mu$ ist; für $\nu > \mu$ setzen wir

$$u_{\nu} = \frac{\varepsilon_{\nu}}{n^{\mu}}.$$

Wegen der gleichmässigen Convergenz der Reihe

$$\varepsilon_{\mu} + \varepsilon_{\mu+1} + \varepsilon_{\mu+2} + \cdots$$

im Gebiet $-\pi + \delta < \arg n < \pi - \delta$ kann man ϱ so gross annehmen, dass in diesem Gebiet, wenn ε eine beliebig kleine positive Zahl darstellt,

$$|\varepsilon_{\varrho+1} + \varepsilon_{\varrho+2} + \cdots| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist; ferner lässt sich R so gross wählen, dass für

$$|n| > R, \quad -\pi + \delta < \arg n < \pi - \delta$$

$$|\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_\varrho| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Setzt man

$$\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots = \gamma_\mu,$$

so wird

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu = 1 + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \cdots + \frac{c_\mu}{n^\mu} + \frac{\gamma_\mu}{n^\mu},$$

und zwar ist

$$|\gamma_\mu| < \varepsilon$$

für

$$|n| > R, \quad -\pi + \delta < \arg n < \pi - \delta.$$

Die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu$ wird also durch die Reihe

$$1 + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \cdots$$

gleichmässig asymptotisch dargestellt, wenn n mit

$$-\pi + \delta < \arg n < \pi - \delta$$

ins Unendliche geht. In demselben Sinn*) gilt die asymptotische Gleichung

$$\log \frac{1}{\Gamma(n+1)} = -\log n - \log \Gamma(n)$$

$$\sim -\left(n + \tfrac{1}{2}\right) \log n + n - \log \sqrt{2\pi} - \frac{B_1}{1.2.n} + \frac{B_2}{3.4.n^3} - \cdots$$

oder

$$\frac{1}{\Gamma(n+1)} \sim e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n + n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{B_1}{1\cdot 2\cdot n} + \frac{B_2}{3\cdot 4\cdot n^3} - \cdots}.$$

Demnach besteht eine asymptotische Gleichung von der Form

$$J_n \sim e^{n\left(1+\log\frac{x}{2}\right) - \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n}\left(C_0 + \frac{C_1}{n} + \frac{C_2}{n^2} + \cdots\right),$$

worin

$$C_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

ist; d. h. setzt man, unter μ eine ganze positive Zahl verstehend,

---

*) Vgl. Stieltjes, Liouv. Journ. 1889.

$$J_n = e^{n\left(1+\log\frac{x}{2}\right)-\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n}\left(C_0+\frac{C_1}{n}+\cdots+\frac{C_\mu}{n^\mu}+\frac{\Gamma_\mu}{n^\mu}\right),$$

so nähert sich Γ_μ gleichmässig der Grenze Null, wenn n mit einem Argument zwischen $-\pi+\delta$ und $\pi-\delta$ ins Unendliche geht.

§ 7.

Wir betrachten die Gauss'sche Reihe

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\cdot\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2 + \cdots$$

als Function eines der drei ersten Elemente α, β, γ, während wir den beiden anderen und x feste Werthe beilegen.

Zunächst fassen wir $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ als Function von γ auf ($|x|<1$). Diese Function wird unendlich von erster Ordnung für $\gamma = 0, -1, -2, \ldots$, während sie sich im Endlichen sonst überall regulär verhält. Da die Function $\frac{1}{\Gamma(\gamma)}$ die Nullstellen erster Ordnung $\gamma = 0, -1, -2, \ldots$ besitzt, so ist

$$\frac{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}{\Gamma(\gamma)}$$

eine ganze transcendente Function von γ, also $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ der Quotient zweier ganzen transcendenten Functionen von γ. Durch Entwicklung der einzelnen Reihenglieder nach Potenzen von $\frac{1}{\gamma}$ erhält man (wie in § 6) *eine asymptotische Gleichung von der Form*

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) \sim 1 + \frac{c_1}{\gamma} + \frac{c_2}{\gamma^2} + \cdots,$$

welche gilt, wenn γ im Gebiet $-\pi < \arg\gamma < \pi$ ins Unendliche geht.

Wir betrachten weiter $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ als Function von α. Um das Verhalten dieser ganzen transcendenten Function bei der Annäherung an die wesentlich singuläre Stelle $\alpha = \infty$ zu untersuchen, benutzen wir die Formel*)

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x)$$
$$= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}x^{-\beta}F\left(\beta, \beta-\gamma+1, \alpha+\beta+1-\gamma, \frac{x-1}{x}\right)$$
$$+ \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\beta-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F\left(1-\beta, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, \frac{x-1}{x}\right),$$

und zwar nehmen wir, damit alle Reihen zugleich convergent sind, den reellen Theil von x grösser als $\frac{1}{2}$ und den absoluten Betrag von x kleiner als 1 an.

---

*) Schlesinger, lin. Diffgl. Bd. I.

Man hat

$$\log \Gamma(\alpha) \sim \left(\alpha - \tfrac{1}{2}\right) \log \alpha - \alpha + \log \sqrt{2\pi} + \frac{B_1}{1.2.\alpha} - \cdots$$

für

$$\lim \alpha = \infty, \quad -\pi < \arg \alpha < \pi$$

und

$$\log \Gamma(\alpha+\beta-\gamma) \sim \left(\alpha+\beta-\gamma-\tfrac{1}{2}\right) \log (\alpha+\beta-\gamma) - \alpha - \beta + \gamma + \log \sqrt{2\pi} + \frac{B_1}{1.2.(\alpha+\beta-\gamma)} - \cdots$$

für

$$\lim (\alpha+\beta-\gamma) = \infty, \quad -\pi < \arg (\alpha+\beta-\gamma) < \pi$$

oder

$$\log \Gamma(\alpha+\beta-\gamma) \sim \left(\alpha+\beta-\gamma-\tfrac{1}{2}\right) \log \alpha - \alpha + \cdots,$$

wo an Stelle der Punkte eine Potenzreihe von $\frac{1}{\alpha}$ steht, für

$$\lim \alpha = \infty, \quad -\pi < \arg \alpha < \pi.$$

Es ist demnach

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)} \sim e^{(\beta-\gamma)\log\alpha}\, \mathfrak{P}\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

für

$$-\pi < \arg \alpha < \pi.$$

Man hat ferner

$$\log \Gamma(\gamma-\alpha) \sim \left(\gamma-\alpha-\tfrac{1}{2}\right) \log (\gamma-\alpha) - \gamma + \alpha + \log \sqrt{2\pi} + \frac{B_1}{1.2(\gamma-\alpha)} - \cdots$$

für

$$\lim (\gamma-\alpha) = \infty, \quad -\pi < \arg (\gamma-\alpha) < \pi$$

und

$$\log \Gamma(\gamma-\alpha-\beta) \sim \left(\gamma-\alpha-\beta-\tfrac{1}{2}\right) \log (\gamma-\alpha-\beta) - \gamma + \alpha + \beta + \log \sqrt{2\pi} + \frac{B_1}{1.2(\gamma-\alpha-\beta)} - \cdots$$

für

$$\lim (\gamma-\alpha-\beta) = \infty, \quad -\pi < \arg (\gamma-\alpha-\beta) < \pi.$$

Die beiden asymptotischen Gleichungen gelten bei festen Werthen von β und γ für $\lim \alpha = \infty$, $-\pi < \arg(-\alpha) < \pi$. Nimmt man $\arg(-1) = -\pi$, so hat man die asymptotische Gleichung

$$\frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} \sim e^{-\beta\log\alpha}\, \mathfrak{P}\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

für

$$0 < \arg \alpha < 2\pi$$

oder, was dasselbe ist

$$\frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} \sim e^{-\beta\log\alpha} e^{-2\pi i\beta}\,\overline{\mathfrak{P}}\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

für

$$-2\pi < \arg\alpha < 0.$$

Auf diese Weise erhält man *eine asymptotische Gleichung von der Form*

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) \sim e^{(\beta-\gamma)\log\alpha-\alpha\log(1-x)}\,\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{\alpha}\right) + e^{-\beta\log\alpha}\,\mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

für den Fall, dass α mit einem Argument zwischen 0 und π ins Unendliche geht, während

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) \sim e^{(\beta-\gamma)\log\alpha-\alpha\log(1-x)}\,\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{\alpha}\right) + e^{-\beta\log\alpha} e^{-2\pi i\beta}\,\mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

*ist, wenn α mit $-\pi < \arg\alpha < 0$ unendlich gross wird**).

Darmstadt, 30. Dezember 1898.

---

*) Vgl. die Untersuchung der Legendre'schen Polynome X_n sowie der Polynome $F(\alpha+n,-n,\gamma,x)$ für grosse n (Darboux, Mémoire sur l'approximation des fonctions de grands nombres, Liouv. Journ. 1878).

Beweis des Satzes, dass diejenigen endlichen linearen Substitutionsgruppen, in welchen einige durchgehends verschwindende Coefficienten auftreten, intransitiv sind.

Von

Heinrich Maschke in Chicago.

In meiner Arbeit*) „Ueber den arithmetischen Charakter der Coefficienten der Substitutionen endlicher linearer Substitutionsgruppen" habe ich folgenden, dort als Hülfstheorem (Satz VII, l. c. pag. 497) benutzten, Satz bewiesen:

„Ist eine endliche Gruppe linearer Substitutionen von n Variabelen gegeben, welche mindestens eine Substitution S enthält, deren charakteristische Gleichung lauter verschiedene Wurzeln besitzt, und weiss man, dass die Gruppe, nachdem man sie so transformirt hat, dass S in der kanonischen Form erscheint, so beschaffen ist, dass in ihren sämmtlichen Substitutionen mindestens ein (nicht in der Hauptdiagonale stehender) Coefficient durchgehend Null ist, so zerfällt die Gruppe in zwei Systeme von je r und n — r Variabelen, in deren jedem sich die r, resp. n — r Variabelen nur unter sich linear substituiren".

Im Folgenden soll bewiesen werden, dass die in diesem Satze enthaltene Einschränkung beseitigt werden kann. Kommen wir überein, lineare Substitutionsgruppen, die sich so transformiren lassen, dass die Variabelen der transformirten Gruppe sich in eine Anzahl von Systemen derartig zerlegen lassen, dass sich die Variabelen eines und desselben Systems nur unter sich substituiren, *intransitiv* zu nennen, so soll also in voller Allgemeinheit bewiesen werden:

Jede endliche lineare Substitutionsgruppe, in deren sämmtlichen Substitutionen ein (nicht in der Hauptdiagonale stehender) Coefficient durchgehend Null ist, ist intransitiv.

Was die Bezeichnung anbetrifft, so sollen für die jeweiligen n^2 Coefficienten der Substitutionen A, A', ... B, etc. der vorliegenden

*) Diese Annalen, Bd. 50, pag. 492.

Gruppe G die entsprechenden kleinen Buchstaben gewählt werden, sodass also die Substitution A z. B. so lautet:

$$(1) \qquad z_i' = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} z_k \quad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Von dem Coefficienten (i, k) sage ich, er sei durchgehend Null, wenn in *jeder* Substitution der Coefficient von z_k in dem linearen Ausdruck für z_i' Null ist, und bezeichne dies durch $(i, k) \equiv 0$, während $(i, k) \not\equiv 0$ bedeuten soll, dass der Coefficient (i, k) nicht durchgehend Null ist, somit natürlich nicht ausgeschlossen ist, dass dieser Coefficient in einzelnen Substitutionen der Gruppe verschwindet. Ein für alle Mal kommen hierbei nur solche Coefficienten in Betracht, für welche $i \neq k$.

§ 1.

Ich beweise zunächst folgendes Lemma:

Ist eine lineare Substitutionsgruppe (von endlicher oder unendlicher Ordnung) so beschaffen, dass es möglich ist, aus einer Zeile, etwa der i^{ten}, eine Anzahl, etwa m, Coefficienten

$$(ik_1),\ (ik_2),\ \ldots\ (ik_m)\quad (k_1, k_2, \ldots k_m \neq i)$$

so herauszugreifen, dass jede der Determinanten

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} a'_{ik_1}, & a'_{ik_2}, & \ldots & a'_{ik_m} \\ a''_{ik_1}, & a''_{ik_2}, & \ldots & a''_{ik_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a^{(m)}_{ik_1}, & a^{(m)}_{ik_2}, & \ldots & a^{(m)}_{ik_m} \end{vmatrix},$$

gebildet aus den entsprechenden Coefficienten jeder möglichen Combination von je m Substitutionen $A', A'', \ldots A^{(m)}$ der Gruppe, verschwindet, so lässt sich die Gruppe so transformiren, dass mindestens einer der Coefficienten $(ik_1), (ik_2), \ldots (ik_m)$ in der transformirten Gruppe durchgehend Null ist.

Zum Beweise greife man eine derjenigen Determinanten heraus, welche den höchsten Rang, etwa ϱ, $(\varrho < m)$, besitzen. Sei dieses die Determinante (2), wo wir uns jetzt also die Substitutionen $A', A'', \ldots A^{(m)}$ fixirt denken. Dann sind ϱ der Grössen

$$(3) \qquad a^{(\lambda)}_{ik_1} z_{k_1} + a^{(\lambda)}_{ik_2} z_{k_2} + \cdots + a^{(\lambda)}_{ik_m} z_{k_m}$$

(für ϱ Werthe von λ) linear unabhängig. Seien dies die ϱ ersten, also die Ausdrücke (3) für $\lambda = 1, 2, \ldots \varrho$, die wir entsprechend mit $y_{k_1}, \ldots y_{k_\varrho}$ bezeichnen. Halten wir jetzt die zugehörigen Substitutionen $A', A'', \ldots A^{(\varrho)}$ fest, und lassen den Rest $A^{(\varrho+1)}, \ldots A^{(m)}$ über die ganze Gruppe variiren, dann sind die zugehörigen Ausdrücke (3)

sämmtlich linear durch die ϱ Grössen y ausdrückbar, da jede der entsprechenden Determinanten (2) vom Range ϱ ist. Der Ausdruck (3) constituirt aber in der Substitution $A^{(\lambda)}$ gerade einen Theil der linearen Function z_i'. In jeder Substitution wird also dieser Theil, welcher ursprünglich die m Variabelen $z_{k_1}, \ldots z_{k_m}$ enthielt, durch die $\varrho (\varrho < m)$ Variabelen $y_{k_1}, \ldots y_{k_\varrho}$ ersetzt. Führt man daher diese ϱ Grössen y an Stelle von ϱ der Variabelen $z_{k_1}, \ldots z_{k_m}$ (welche letzteren man nur so zu wählen hat, dass die ϱ Grössen y mit den übrig bleibenden $m - \varrho$ Grössen z linear unabhängig sind, was wegen der linearen Unabhängigkeit der y stets möglich ist), so enthält die so transformirte Gruppe in der i^{ten} Zeile $m - \varrho$ durchgehende Nullen, also mindestens eine, qu. e. d.

Als Corollar zu obigem Lemma sei noch erwähnt, *dass sich durchgehende Nullen stets einführen lassen, wenn die Ordnung der Gruppe mindestens um zwei kleiner ist, als die Anzahl der Substitutionsvariabelen.* Die zugehörige Transformation bestimmt man in ähnlicher Weise wie soeben.

§ 2.

Sei also jetzt eine Gruppe G vorgelegt, welche durchgehende Nullen enthält. Wir greifen alsdann diejenige Zeile heraus, in welcher die Maximalanzahl durchgehender Nullen vorkommt, und bewirken durch eine geeignete Vertauschung der Indices der z, dass jene Zeile die erste wird, und dass die durchgehenden Nullen sämmtlich an das Ende der ersten Zeile zu stehen kommen. Wir setzen also voraus, dass

$$(4) \qquad (1, k) \equiv 0 \quad \text{für} \quad k = r+1, \ldots n,$$

$$(5) \qquad (1, k) \not\equiv 0 \quad \text{für} \quad k = 2, 3, \quad \ldots r.$$

Nunmehr bilden wir in der Substitution AB, wo A und B irgend zwei Substitutionen von G bedeuten, die Coefficienten $(1, k)$ für $k = r+1, \ldots n$. Dann folgt aus (4) in Anbetracht von

$$a_{1k} = b_{1k} = 0 \quad (k = r+1, \ldots n)$$

folgendes Gleichungssystem:

$$(6) \qquad \sum_{\lambda=2}^{r} a_{1\lambda} b_{\lambda k} = 0 \quad (k = r+1, \ldots n).$$

Diese Gleichungen gelten für *jede zwei* Substitutionen A und B aus G.

Wir greifen jetzt solche $r-1$ Substitutionen $A', A'', \ldots A^{(r-1)}$ aus G heraus, für welche die aus den zugehörigen Coefficienten der ersten Zeile gebildete Determinante

$$(7) \qquad R = \begin{vmatrix} a'_{12}, & a'_{13}, & \dots & a'_{1r} \\ a''_{12}, & a''_{13}, & \dots & a''_{1r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a^{(r-1)}_{12}, & a^{(r-1)}_{13}, & \dots & a^{(r-1)}_{1r} \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet.

Falls dies nicht möglich sein sollte, können wir nach dem in § 1 bewiesenen Lemma, resp. Corollar, die Gruppe so transformiren, dass zu den bereits in der ersten Zeile befindlichen $n - r$ durchgehenden Nullen noch weitere hinzutreten. Diese Transformation denken wir uns bereits durchgeführt, so dass nunmehr also eine der Determinanten R von Null verschieden sein muss, es sei denn, dass überhaupt sämmtliche Coefficienten der ersten Zeile mit Ausnahme von (1, 1) durchgehend Null sind, für welchen Fall jedoch der in diesem Paragraphen zu beweisende Satz unmittelbar gültig ist.

Setzen wir jetzt:

$$(8) \qquad \sum_{i=2}^{r} a^{(\lambda)}_{1i} x_i = y_{\lambda+1} \quad (\lambda = 1, 2, \dots r-1),$$

so sind die so definirten $r-1$ Grössen y in Folge von $R \neq 0$ linear unabhängig. Diese Grössen y unterwerfen wir nun der, als allgemein angenommenen, Substitution B der Gruppe G. Man erhält:

$$y'_{\lambda+1} = \sum_{i=2}^{r} a^{(\lambda)}_{1i} x'_i = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=2}^{r} a^{(\lambda)}_{1i} b_{ik} x_k \quad (\lambda = 1, 2, \dots r-1).$$

Aber in dem letzten Ausdruck verschwinden die Coefficienten von $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots x_n$ in Folge der Gleichungen (6); also ergiebt sich

$$(9) \qquad y'_{\lambda+1} = \sum_{k=1}^{r} \sum_{i=2}^{r} a^{(\lambda)}_{1i} b_{ik} x_k \quad (\lambda = 1, 2, \dots r-1).$$

Drückt man nun mittelst (8) $x_2, x_3, \dots x_r$ durch $y_2, y_3, \dots y_r$ aus, und setzt in (9) ein, schreibt ferner der Gleichförmigkeit wegen noch y_1 statt x_1, so erscheint $y_1', y_2', \dots y_r'$ in jeder Substitution von G als lineare Function von $y_1, y_2, \dots y_r$ allein. Hiermit ist folgender Satz bewiesen:

Ist in einer endlichen oder unendlichen linearen Substitutionsgruppe mindestens ein nicht in der Hauptdiagonale befindlicher Coefficient durchgehend Null, so lässt sich die Gruppe stets so transformiren, dass sich eine geringere Anzahl von Substitutionsvariabelen absondern lässt, welche nur unter sich substituirt werden.

Schematisch lässt sich also die Matrix einer jeden Substitution der so transformirten Gruppe folgendermassen darstellen:

$$(10) \qquad \begin{array}{c|c} Q_1 & R_1 \equiv 0 \\ \hline R_2 & Q_2 \end{array},$$

wo Q_1 und Q_2 Quadrate aus resp. r^2 und $(n-r)^2$ Elementen, R_1 ein Rechteck aus r Zeilen und $n-r$ Colonnen bedeutet, dessen sämmtliche Elemente Null sind, R_2 endlich ein Rechteck aus $n-r$ Zeilen und r Colonnen. Hierbei ist r irgend eine der Zahlen von 1 bis $n-1$.

§ 3.

Im Folgenden nehmen wir an, dass die soeben beschriebene Transformation der Gruppe vollzogen, dass also jede ihrer Substitutionen, die wir nun wiederum in den Variabelen z schreiben, in der Form (10) gegeben sei. Ich habe jetzt des Weiteren zu beweisen, dass, falls die Ordnung unserer Gruppe endlich ist, was wir nunmehr annehmen, durch eine neue Transformation sich bewirken lässt, dass auch die in dem Rechteck R_2 befindlichen Elemente durchgehend Null werden.

Zu diesem Zwecke transformire ich die Gruppe in die Hermite'sche Normalform*), aber so, dass die schon in R_1 befindlichen durchgehenden Nullen nicht zerstört werden. Dies lässt sich in folgender Weise erreichen. Ich setze:

$$(11) \qquad \begin{cases} z_i = \sum_{k=1}^{r} \lambda_{ik} y_k \quad (i = 1, 2, \ldots r), \\ z_i = y_i + \sum_{k=1}^{r} \lambda_{ik} y_k \quad (i = r+1, r+2, \ldots n). \end{cases}$$

Sei jetzt

$$(12) \qquad H = \sum_{i,k=1}^{n} \alpha_{ik} z_i \bar{z}_k \quad (\alpha_{ki} = \bar{\alpha}_{ik})$$

eine für die Gruppe invariante Hermite'sche Form. Hierin mache man die Substitution (11) und berechne die Coefficienten von

$$\bar{y}_{r+1}, \bar{y}_{r+2}, \ldots \bar{y}_n.$$

Man findet als Coefficienten von $\bar{y}_\mu$ folgenden Ausdruck:

$$(13) \qquad \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{r} \alpha_{i\mu} \lambda_{ik} y_k + \sum_{k=r+1}^{n} \alpha_{k\mu} y_k \quad (\mu = r+1, \ldots n).$$

Ich suche nun die Grössen λ_{ik} so zu bestimmen, dass in den $n-r$ Ausdrücken (13) die Coefficienten von $y_1, y_2, \ldots y_r$ Null werden. Dies erfordert die Lösung der folgenden $n-r$ Gleichungen in Bezug auf die n Unbekannten $u_1, u_2, \ldots u_n$:

*) Siehe das in diesen Annalen Bd. 50, pag. 497 gegebene Citat.

$$(14) \qquad \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i\mu} u_i = 0 \quad (\mu = r+1, \ldots n).$$

Wie immer auch die $\alpha_{i\mu}$ beschaffen sein mögen, so lässt sich diesen Gleichungen stets durch $n-(n-r)=r$ linear unabhängige Lösungssysteme

$$(15) \qquad u_i = \lambda_{ik} \quad (i=1, \ldots n;\ k=1, \ldots r)$$

genügen. Es giebt also unter den Determinanten r^{ten} Grades dieser $n \cdot r$ Grössen λ_{ik} sicher eine, welche nicht verschwindet. Sei dies die Determinante $|\lambda_{ik}|$ für $i, k = 1, 2, \ldots r$. Die mit diesen so gewählten Werthen der λ_{ik} gebildeten Grössen (11) sind alsdann erstens linear unabhängig, zweitens werden durch ihre Einführung die in R_1 befindlichen durchgehenden Nullen nicht afficirt, und endlich wird durch (11) die Form (12), wie aus (13) (14) und (15) folgt, in folgende Form transformirt:

$$(16) \qquad H = \sum_{i,k=1}^{r} \beta_{ik} y_i \bar{y}_k + \sum_{i,k=r+1}^{n} \beta_{ik} y_i \bar{y}_k .$$

Nunmehr kann durch lineare Transformation der $y_1, \ldots y_r$ unter sich, als auch der $y_{r+1}, \ldots y_n$ unter sich bewirkt werden, dass sowohl der erste, als auch der zweite Summand von H in (16) in die Normalform übergeführt wird (wobei wiederum die in R_1 befindlichen Nullen nicht afficiert werden), H also die Normalform

$$H = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{x}_i$$

annimmt.

Nunmehr folgt, dass in der so transformirten, in den x_i geschriebenen Gruppe auch sämmtliche in dem Rechteck R_2 befindlichen Coefficienten ohne Weiteres durchgehend Null sein müssen. Da nämlich die Gruppe jetzt auf die Hermite'sche Normalform reducirt ist, so muss in jeder Substitution jeder Coefficient gleich dem conjugirten Werth des Quotienten seiner Unterdeterminante $n-1^{\text{ten}}$ Grades durch die Substitutionsdeterminante sein*). Bildet man aber die Unterdeterminanten $n-1^{\text{ten}}$ Grades der in dem Rechteck R_2 befindlichen Elemente, so sieht man sofort, dass dieselben sämmtlich verschwinden, weil jede derselben die $r(n-r)$ Nullen von R_1 enthält. Also muss jedes Element in R_2 durchgehend Null sein. Hiermit ist der im Eingange formulirte Satz bewiesen.

University of Chicago, December 1898.

*) Vgl. l. c. pag. 497.

Ueber allgemeine Thetaformeln.

Von

A. Krazer in Strassburg i. E.

Herr Prym und ich*) haben gezeigt, wie man zu Thetaformeln von allgemeinem Charakter dadurch gelangen kann, dass man in der ein vorgelegtes Product von n Thetafunctionen von je p Veränderlichen darstellenden np-fach unendlichen Reihe an Stelle der bisherigen Summationsbuchstaben neue vermittelst einer linearen Substitution mit rationalen Coefficienten einführt. Diese unsere Untersuchungen bedürfen nach mehreren Richtungen der Ergänzung.

1. Die von Herrn Prym und mir angewandte Methode der Umformung unendlicher Reihen ist, wie wir übrigens schon bei Beginn unserer gemeinschaftlichen Untersuchungen bemerkt haben, nicht auf Thetareihen beschränkt, sondern auf ganz beliebige unendliche Reihen anwendbar, Im ersten Abschnitte der vorliegenden Abhandlung wird dieses Princip der Umformung unendlicher, insbesondere mehrfach unendlicher Reihen durch Einführung neuer Summationsbuchstaben vermittelst einer linearen Substitution mit rationalen Coefficienten, von allem Zufälligen, was ihm bei der Anwendung auf Thetareihen anhaftet, entkleidet, in der vollen Allgemeinheit dargestellt**).

2. In den Formeln, welche die soeben genannten Umformungen unendlicher Reihen zum Ausdrucke bringen, kommen gewisse positive ganze Zahlen vor, welche als die Anzahlen der Lösungen von Systemen linearer Congruenzen auftreten. Auf die Bestimmung dieser Zahlen,

*) Prym, Ableitung einer allgemeinen Thetaformel. Acta math. Bd. 3 (1883) pag. 216.

Krazer und Prym, Neue Grundlagen einer Theorie der allgemeinen Thetafunctionen. Leipzig 1892.

**) Mit dieser Umformung unendlicher Reihen beschäftigt sich auch eine inzwischen erschienene Abhandlung des Herrn Huebner, Ueber die Umformung unendlicher Reihen und Producte mit Beziehung auf die Theorie der elliptischen Functionen (Progr. Königsberg 1891), deren Resultate aber nur im Falle einfach unendlicher Reihen mit den hier angegebenen übereinstimmen.

die zuerst von Henry St. Smith*) und später aber unabhängig davon von Herrn Frobenius**) angegeben wurde, ist von Herrn Prym und mir nirgendwo eingegangen worden. Sie wird im zweiten Abschnitte der vorliegenden Abhandlung in Anlehnung an die soeben citirte Abhandlung des Herrn Frobenius, aber auf einem von dem dortigen verschiedenen Wege durchgeführt.

3. In den Untersuchungen von Herrn Prym und mir ist die Frage nach der *allgemeinsten* linearen Substitution mit rationalen Coefficienten, durch welche ein gegebenes Product von n Thetafunctionen von je p Veränderlichen in ein Aggregat solcher Producte übergeführt wird, und damit die Frage nach der *allgemeinsten* einschlägigen Thetaformel nirgendwo beantwortet worden. Nur die von uns angegebene Umformung einer einzelnen Thetareihe***) ist die allgemeinste derartige Umformung; bei der Umformung eines Products von mehreren Thetafunctionen†) dagegen legten wir der Substitution, vermittelst welcher an Stelle der bisherigen np Summationsbuchstaben $m_\mu^{(\varrho)} \begin{pmatrix} \varrho = 1,2,\ldots,n \\ \mu = 1,2,\ldots,p \end{pmatrix}$ np neue Summationsbuchstaben $n_\mu^{(\varrho)} \begin{pmatrix} \varrho = 1,2,\ldots,n \\ \mu = 1,2,\ldots,p \end{pmatrix}$ eingeführt werden, von vornherein freiwillig die Beschränkung auf, dass sie in jeder ihrer Gleichungen nur Grössen m und n mit demselben unteren Index μ enthalte. Es wurden also bis jetzt neben den Substitutionen zur Umformung einer einzelnen Thetafunction (Substitutionen E) nur eine ganz besondere Art von Substitutionen zur Umformung eines Productes von mehreren Thetafunctionen (Substitutionen D) in Betracht gezogen, und wenn wir auch als wahrscheinlich ansahen, dass aus diesen beiden Arten von Substitutionen die allgemeinste Substitution S, welche ein Product von n Thetafunctionen von je p Veränderlichen in ein Aggregat von solchen Producten überführt, zusammengesetzt werden könne, so war es uns doch nicht gelungen, einen Beweis für die Richtigkeit dieser Vermuthung zu erbringen. Dieser Beweis wird im dritten Abschnitte der vorliegenden Abhandlung geführt.

4. Von Herrn Prym und mir ist die Stellung unserer Thetaformeln zu den von andern Autoren veröffentlichten nirgendwo erörtert worden. Dieser Aufgabe ist der vierte Abschnitt der gegenwärtigen Abhandlung gewidmet. Es zeigt sich dabei, dass von den den Substitutionen E entsprechenden Thetaformeln früher nur ganz specielle

*) Smith, On Systems of Linear Indeterminate Equations and Congruences (1861). Coll. math. Papers, Vol. 1, pag. 367.

**) Frobenius, Theorie der linearen Formen mit ganzen Coefficienten. J. für Math. Bd. 86 (1879), pag. 146.

***) Krazer und Prym, Neue Grundlagen etc. pag. 70.

†) Krazer und Prym, a. a. O. pag. 16.

Fälle bekannt gewesen waren. Etwas anders liegt die Sache für die zu den Substitutionen D gehörigen Thetaformeln. Von ihnen war die dem Werthe $r = 1$ entsprechende Formel für Producte von je zwei Thetafunctionen bereits 1854 von Schröter seinen Untersuchungen über die Modulargleichungen zu Grunde gelegt und auf Producte von beliebig vielen Thetafunctionen 1866 von Herrn Gordan ausgedehnt worden. Ohne damals diese Formel des Herrn Gordan zu kennen, gelangten wir 1884 in naturgemässer Fortsetzung früherer Untersuchungen*) zur Verallgemeinerung der Schröter'schen Formel. Bevor wir die von uns gefundene Formel veröffentlichten**) war auf anderem Wege und gleichfalls unabhängig von Herrn Gordan Herr Krause zu der nämlichen Formel gekommen und hatte dieselbe unter dem Namen „Additionstheorem zwischen Thetafunctionen mit verschiedenen Moduln" Untersuchungen über die Transformation der Thetafunctionen zu Grunde gelegt.

Erster Abschnitt.

Ein allgemeines Princip der Umformung unendlicher, insbesondere mehrfach unendlicher Reihen.

Es sei gegeben eine q-fach unendliche absolut convergente Reihe:

$$W = \sum_{m_1,\cdots,m_q}^{-\infty,\cdots,+\infty} f(m_1|\cdots|m_q), \tag{1}$$

deren allgemeines Glied $f(m_1|\cdots|m_q)$ im Uebrigen eine beliebige Function der Summationsbuchstaben $m_1, \ldots, m_q$ und anderer Grössen, Variablen und Constanten, sein möge, und bei der die Summation so auszuführen ist, dass jede der q Grössen m unabhängig von den anderen die Reihe der ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, sodass an Stelle des Systems der q Summationsbuchstaben $m_1, \ldots, m_q$ jede Variation mit Wiederholung zur q^{ten} Classe tritt, die man aus den überhaupt existirenden ganzen Zahlen als Elementen bilden kann. In dieser q-fach unendlichen Reihe führe man jetzt an Stelle der bisherigen Summationsbuchstaben $m_1, \ldots, m_q$ neue $n_1, \ldots, n_q$ ein mit Hülfe einer linearen Substitution von der Gestalt:

$$r m_\mu = \sum_{\nu=1}^{q} a_{\mu\nu} n_\nu, \qquad (\mu = 1,2,\ldots,q) \tag{2}$$

*) Prym, Ableitung einer allgemeinen Thetaformel. Acta math. Bd. 3 (1883), pag. 216.

**) Eine Mittheilung der Formel, aber ohne die Absicht der Veröffentlichung geschah an die Münchener Akademie am 11. August 1885.

bei der r eine positive ganze Zahl, die a ganze Zahlen mit nicht verschwindender Determinante sind. Man erhält dann, wenn man den Ausdruck, in den das allgemeine Glied $f(m_1|\cdots|m_q)$ durch Einführung der Grössen n übergeht, mit $g(n_1|\cdots|n_q)$ bezeichnet, also:

$$f(m_1|\cdots|m_q) = g(n_1|\cdots|n_q) \tag{3}$$

setzt:

$$W = \sum_{n_1,\cdots,n_q} g(n_1|\cdots|n_q), \tag{4}$$

und es ist die Frage auf die Alles ankommt, die, *wie hier über die n summirt werden muss.* Diese Frage ist vorerst folgendermassen zu beantworten. Bezeichnet man die Determinante der q^2 Zahlen $a_{\mu\nu}$ mit Δ und die Adjuncte von $a_{\mu\nu}$ in dieser Determinante mit $\alpha_{\mu\nu}$, so folgt aus den Gleichungen (2) durch Auflösung nach den n als Unbekannten:

$$n_\nu = \frac{r}{\Delta}\sum_{\mu=1}^{q} \alpha_{\mu\nu} m_\mu, \qquad (\nu = 1,2,\ldots,q) \tag{5}$$

und es muss daher die auf der rechten Seite von (4) angedeutete Summation nach den n in der Weise ausgeführt werden, dass man an Stelle des Systems der q Summationsbuchstaben $n_1, \ldots, n_q$ ein jedes der Werthesysteme und jedes einmal setzt, welche sich aus den Gleichungen (5) ergeben, wenn man darin an Stelle des Systems der q Buchstaben $m_1, \ldots, m_q$ eine jede der Variationen mit Wiederholung zur q^{ten} Classe aus den überhaupt existirenden ganzen Zahlen als Elementen treten lässt.

Zur directen Bestimmung dieser Werthesysteme, von denen man jedenfalls sagen kann, dass keine zwei unter ihnen mit einander übereinstimmen, muss das System der durch die Gleichungen (5) als Functionen der ganzen Zahlen m definirten Grössen n genau untersucht werden. Zu dem Ende bezeichne man mit ϱ_μ den kleinsten positiven Rest der Zahl m_μ nach dem Modul Δ und setze:

$$m_\mu = \Delta m'_\mu + \varrho_\mu. \qquad (\mu = 1, 2,\ldots,q) \tag{6}$$

Führt man diese Ausdrücke in die Gleichungen (5) ein, so zerfällt jede Grösse n_ν in einen ganzzahligen Theil n_ν' und einen Bruch, in der Form:

$$n_\nu = n'_\nu + \frac{r}{\Delta}\sum_{\mu=1}^{q} \alpha_{\mu\nu}\varrho_\mu. \qquad (\nu = 1,2,\ldots,q) \tag{7}$$

Die n' sind ganze Zahlen von besonderer Art; anstatt auf ihre Ausdrücke in den m' einzugehen, bemerke man, dass für die n' jedenfalls nur solche ganze Zahlen auftreten, welche nach Einführung der ihnen

entsprechenden Ausdrücke (7) in die Gleichungen (2) für die m ganze Zahlen liefern. Setzt man aber aus (7) in (2) ein, so folgt:

$$(8) \qquad r m_\mu = \sum_{\nu=1}^{q} a_{\mu\nu} n'_\nu + r \varrho_\mu, \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, q)$$

und man erhält daher für die ganzen Zahlen n' die Bedingung, dass:

$$(9) \qquad \sum_{\nu=1}^{q} a_{\mu\nu} n'_\nu \equiv 0 \pmod{r} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, q)$$

sei. Sind diese Bedingungen erfüllt, dann entsprechen den zu solchen n' gemäss den Gleichungen (7) gehörigen Grössen n in der That ganze Zahlen m. Bildet man daher die Summe:

$$(10) \qquad \sum_{\varrho_1, \ldots, \varrho_q}^{0, 1, \ldots, \nabla-1} \sum_{n'_1, \ldots, n'_q}^{-\infty, \ldots, +\infty}{}' g\left(n'_1 + \frac{\overline{=}}{\Delta}\varrho_1 | \cdots | n'_q + \frac{\overline{=}}{\Delta}\varrho_q\right),$$

bei der zur Abkürzung:

$$(11) \qquad \overline{=}\varrho_\nu = r \sum_{\mu=1}^{q} \alpha_{\mu\nu} \varrho_\mu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, q)$$

gesetzt ist, und bei der, indem ∇ den absoluten Werth von Δ bezeichnet, über jedes ϱ frei von 0 bis $\nabla - 1$ summirt wird, für das System der q Summationsbuchstaben n' aber nur jene aus ganzen Zahlen gebildeten Variationen mit Wiederholung zur q^{ten} Classe zu treten haben, welche in ihren Elementen den Congruenzen (9) genügen, so enthält diese Summe nach dem soeben Bemerkten alle Glieder der Summe (4) und keine anderen Glieder; und es frägt sich nur noch, ob sie auch jedes Glied der Summe (4) nur einmal oder ob sie es mehrere Male enthält, oder, was auf dasselbe hinauskommt, ob alle Glieder der Summe (10) von einander verschieden, oder ob sie theilweise einander gleich sind. Um diese Frage zu entscheiden, greife man ein bestimmtes Glied der Summe (10) heraus; es ist bestimmt durch gewisse den Congruenzen (9) genügende ganze Zahlen n' und gewisse positive ganze Zahlen ϱ aus der Reihe $0, 1, \cdots, \nabla - 1$. Soll ein anderes Glied, charakterisirt durch andere Zahlen n'' und σ ihm gleich sein, so ist dazu nothwendig und hinreichend, dass für $\nu = 1, 2, \ldots, q$:

$$n'_\nu + \frac{r}{\Delta} \sum_{\mu=1}^{q} \alpha_{\mu\nu} \varrho_\mu = n''_\nu + \frac{r}{\Delta} \sum_{\mu=1}^{q} \alpha_{\mu\nu} \sigma_\mu$$

sei; dann muss aber jedenfalls:

$$r\sum_{\mu=1}^{q}\alpha_{\mu\nu}(\varrho_\mu-\sigma_\mu)\equiv 0 \pmod{\nabla} \qquad (\nu=1,2,\ldots,q)$$

sein; ist umgekehrt diese Bedingung erfüllt und setzt man:

$$r\sum_{\mu=1}^{q}\alpha_{\mu\nu}\varrho_\mu = r\sum_{\mu=1}^{q}\alpha_{\mu\nu}\sigma_\mu + \Delta g_\nu \qquad (\nu=1,2,\ldots,q)$$

so braucht man nur:

$$n_\nu'' = n_\nu' + g_\nu \qquad (\nu=1,2,\ldots,q)$$

zu nehmen, dann sind in der That die beiden Glieder der Summe einander gleich. So oft also die Congruenzen:

$$r\sum_{\mu=1}^{q}\alpha_{\mu\nu}x_\mu \equiv 0 \pmod{\nabla} \qquad (\nu=1,2,\ldots,q) \tag{12}$$

durch Zahlen x aus der Reihe $0, 1, \cdots, \nabla-1$ befriedigt werden können, so oft kehrt jedes Glied der Summe (10) bei weiterem Fortgange der Summation wieder. Heisst man daher diese Anzahl σ', so ist die Summe (10) das σ'-fache der Summe W und man hat:

$$W = \frac{1}{\sigma'}\sum_{\varrho_1,\cdots,\varrho_q}^{0,1,\cdots,\nabla-1}\ \sum_{n_1',\cdots,n_q'}^{-\infty,\cdots,+\infty}{}' g\left(n_1'+\frac{\overline{=}\varrho_1}{\Delta}\,|\cdots|\,n_q'+\frac{\overline{=}\varrho_q}{\Delta}\right). \tag{13}$$

In dieser Gleichung bedeutet also σ' die Anzahl der Lösungen — um anzugeben, dass es sich dabei nur um jene Lösungen handelt, die aus Zahlen der Reihe $0, 1, \cdots, \nabla-1$ gebildet sind, sei genauer gesagt „Normallösungen" — des Congruenzensystems (12), über jedes ϱ ist frei zu summiren von 0 bis $\nabla-1$, über die n' von $-\infty$ bis $+\infty$, jedoch dürfen hier nur jene Zahlensysteme genommen werden, welche die Congruenzen (9) erfüllen. Von dieser Beschränkung der Summation kann man sich aber leicht auf folgende Weise befreien.

Multiplicirt man das allgemeine Glied der Summe in (13) mit einem Factor, der den Werth 1 hat, wenn die n' solche ganze Zahlen sind, die den Congruenzen (9) genügen, dagegen den Werth Null, wenn die Zahlen n' diesen Congruenzen nicht genügen, so wird durch Einschiebung dieses Factors F, der in seiner Wirksamkeit mit dem Dirichlet'schen discontinuirlichen Factor der Integralrechnung zu vergleichen ist, zunächst der Werth der Summe (13) nicht geändert; nachdem er aber eingeschoben ist, darf jetzt die Beschränkung der Summation nach den n' einfach weggelassen werden, und man darf schreiben:

$$(14) \qquad W = \frac{1}{\sigma^r} \sum_{\varrho_1,\cdots,\varrho_q}^{0,1,\cdots,\nabla-1} \sum_{n_1,\cdots,n_q}^{-\infty,\cdots,+\infty} F.g\left(n_1 + \frac{\overline{=}}{\Delta}\varrho_1 | \cdots | n_q + \frac{\overline{=}}{\Delta}\varrho_q\right),$$

wo jetzt über jedes ϱ frei von 0 bis $\nabla - 1$ und über jedes n frei von $-\infty$ bis $+\infty$ summirt wird. Es handelt sich jetzt nur noch um die Bildung eines solchen Factors F. Beachtet man aber, dass die Grösse:

$$(15) \qquad f_\mu = \sum_{\sigma_\mu=0}^{r-1} e^{\frac{2\pi i}{r}\sum_{\nu=1}^{q}(a_{\mu\nu}n_\nu)\sigma_\mu}$$

den Werth r besitzt, wenn die Zahlen n die Congruenz:

$$\sum_{\nu=1}^{q} a_{\mu\nu}n_\nu \equiv 0 \pmod{r}$$

erfüllen, dagegen den Werth 0, wenn sie dies nicht thun, so sieht man sofort, dass:

$$(16) \qquad F = \frac{f_1 f_2 \cdots f_q}{r^q} = \frac{1}{r^q} \sum_{\sigma_1,\cdots,\sigma_q}^{0,1,\cdots,r-1} e^{\frac{2\pi i}{r}\sum_{\mu=1}^{q}\sum_{\nu=1}^{q} a_{\mu\nu}n_\nu\sigma_\mu}$$

ein Factor der vorher verlangten Art ist. Setzt man aber diesen Ausdruck an Stelle von F in (14) ein und vertauscht noch unter der Voraussetzung der absoluten Convergenz der neuen unendlichen Reihen die Summationsordnung, so erhält man die Gleichung:

$$(17) \qquad W = \frac{1}{r^q\sigma'} \sum_{\varrho_1,\cdots,\varrho_q}^{0,1,\cdots,\nabla-1} \sum_{\sigma_1,\cdots,\sigma_q}^{0,1,\cdots,r-1}$$

$$\left[\sum_{n_1,\cdots,n_q}^{-\infty,\cdots,+\infty} e^{\frac{2\pi i}{r}\sum_{\mu=1}^{q}\sum_{\nu=1}^{q} a_{\mu\nu}\sigma_\mu n^\nu} g\left(n_1 + \frac{\overline{=}}{\Delta}\varrho_1 | \cdots | n_q + \frac{\overline{=}}{\Delta}\varrho_q\right)\right],$$

welche die gewünschte Umformung der gegebenen unendlichen Reihe darstellt, und der man schliesslich, weil:

$$\sum_{\nu=1}^{q} a_{\mu\nu}\frac{\overline{=}}{\varrho}_\nu = r\Delta\varrho_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, q)$$

und in Folge dessen für alle ganzzahligen ϱ und σ

$$e^{\frac{2\pi i}{r}\sum_{\mu=1}^{q}\sum_{\nu=1}^{q} a_{\mu\nu}\sigma_\mu \frac{\overline{\varrho}_\nu}{\Delta}} = 1$$

ist, die für die Anwendungen bequemere Form:

$$W = \frac{1}{r^q \Delta^r} \sum_{\varrho_1,\cdots,\varrho_q}^{0,1,\cdots,\Delta-1} \sum_{\sigma_1,\cdots,\sigma_q}^{0,1,\cdots,r-1} \left[\sum_{n_1,\cdots,n_q}^{-\infty,\cdots,+\infty} e^{\frac{2\pi i}{r}\sum_{\nu=1}^{q} \overline{\sigma}_\nu \left(n_\nu + \frac{\overline{\varrho}_\nu}{\Delta}\right)} g\left(n_1 + \frac{\overline{\varrho}_1}{\Delta} | \cdots | n_q + \frac{\overline{\varrho}_q}{\Delta}\right) \right] \tag{18}$$

geben kann, bei der noch zur Abkürzung:

$$\sum_{\mu=1}^{q} a_{\mu\nu}\sigma_\mu = \overline{\sigma}_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, q)$$

gesetzt ist.

Bei Betrachtung der gewonnenen Endformel wird man zunächst das Resultat bemerken, dass die gegebene unendliche Reihe in eine Summe mehrerer unendlicher Reihen übergeführt wurde; bei genauerer Betrachtung des Ganges der Untersuchung erkennt man sodann, dass dieses Resultat einmal durch gruppenweises Zusammenfassen der Glieder der gegebenen Reihe zu Theilreihen, dann aber weiter durch Einschieben von Gruppen neuer Glieder, die zusammen den Werth Null haben, erreicht wurde. Aus dem letzteren Umstande erkennt man auch, dass auf die am Schlusse eingeführte Bedingung der absoluten Convergenz der neuen unendlichen Reihen nicht verzichtet werden kann, da sie nicht eine Folge der absoluten Convergenz der ursprünglichen Reihe ist.

Obwohl die Umformung (18) ihre wahre Bedeutung erst für mehrfach unendliche Reihen erlangt, so ist sie doch auch auf einfach unendliche Reihen anwendbar, und es liefern hier die beiden einfachsten Substitutionen $m = qn$ und $rm = n$ zwei Umformungen einer einfach unendlichen Reihe, bei denen die beiden oben genannten Processe des gruppenweisen Zusammenfassens der Glieder der gegebenen Reihe zu Theilreihen und des Einschiebens von Gruppen neuer Glieder mit der Summe Null einzeln auftreten und daher besonders klar erkennbar sind. Es entspricht nämlich der Substitution

$$m = qn$$

die Umformung:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(m) = \sum_{\varrho=0}^{q-1}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g\left(n+\frac{\varrho}{q}\right)\right) = \sum_{\varrho=0}^{q-1}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(qn+\varrho)\right)$$

$$\begin{aligned}
&= [f(0) \quad +f(q) \quad +f(2q) \quad +\cdots]\\
&+ [f(1) \quad +f(q+1) \quad +f(2q+1)+\cdots]\\
&+ [f(2) \quad +f(q+2) \quad +f(2q+2)+\cdots]\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+ [f(q-1)+f(2q-1)+f(3q-1)+\cdots]\text{*)},
\end{aligned}$$

während der Substitution

$$rm = n$$

die Umformung;

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(m) = \frac{1}{r}\sum_{\sigma=0}^{r-1}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{2\pi i}{r}\sigma n} g(n)\right) = \frac{1}{r}\sum_{\sigma=0}^{r-1}\left(\sum_{n=-\infty}^{+r} e^{\frac{2\pi i}{r}\sigma n} f\left(\frac{n}{r}\right)\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{r}\Big\{ \Big[f(0)+ \quad f\left(\tfrac{1}{r}\right)+ \quad f\left(\tfrac{2}{r}\right)+\cdots\Big]\\
&\quad +\Big[f(0)+\tau \quad f\left(\tfrac{1}{r}\right)+\tau^2 \quad f\left(\tfrac{2}{r}\right)+\cdots\Big]\\
&\quad +\Big[f(0)+\tau^2 \quad f\left(\tfrac{1}{r}\right)+\tau^4 \quad f\left(\tfrac{2}{r}\right)+\cdots\Big]\\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\quad +\Big[f(0)+\tau^{r-1} f\left(\tfrac{1}{r}\right)+\tau^{2r-2} f\left(\tfrac{2}{r}\right)+\cdots\Big]\Big\}
\end{aligned}$$

entspricht, bei der zur Abkürzung:

$$\tau = e^{\frac{2\pi i}{r}}$$

gesetzt ist.

Zweiter Abschnitt.

Ueber die Anzahl s der Normallösungen eines Systems linearer Congruenzen.

Es seien mit $a_{\mu\nu}\binom{\mu=1,2,\ldots,p}{\nu=1,2,\ldots,q}pq$ beliebige ganze Zahlen, mit r eine positive ganze Zahl bezeichnet; jedes System von q ganzen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_q$, welches gleichzeitig den p Congruenzen:

$$(1) \qquad \sum_{\nu=1}^{q} a_{\mu\nu}x_\nu \equiv 0 \pmod{r} \qquad (\mu = 1,2,\ldots,p)$$

*) Dabei sind, ebenso wie beim zweiten Beispiele, die den negativen Werthen des Summationsbuchstabens n entsprechenden Glieder der Uebersichtlichkeit wegen unberücksichtigt gelassen.

genügt, heisst eine Lösung dieses Congruenzensystems; *Normallösungen* aber sollen unter diesen unbegrenzt vielen Lösungen diejenigen genannt werden, welche ausschliesslich von Zahlen aus der Reihe $0, 1, \ldots, r-1$ gebildet sind. Die Anzahl s dieser Normallösungen ist dann jedenfalls eine endliche und zwar ist $s \leqq r^q$. Es handelt sich im Folgenden wesentlich um die Bestimmung dieser Zahl s.

1.

Zunächst kann man ohne Mühe *für die Zahl s einen analytischen Ausdruck* anschreiben. Genügen nämlich die Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_q$ der Congruenz:

$$\sum_{\nu=1}^{q} a_{\mu\nu} x_\nu \equiv 0 \pmod{r},$$

wo μ irgend eine Zahl aus der Reihe $1, 2, \ldots, p$ bezeichne, so besitzt der Ausdruck:

$$f_\mu(x_1 \mid \cdots \mid x_q) = f_\mu = \sum_{y_\mu=0}^{r-1} e^{\frac{2\pi i}{r}\left(\sum_{\nu=1}^{q} a_{\mu\nu} x_\nu\right) y_\mu}$$

den Werth r; genügen dagegen die Zahlen x der angeschriebenen Congruenz nicht, so besitzt f_μ den Werth Null. Daraus folgt sofort, **dass der Ausdruck:**

$$F(x_1 \mid \cdots \mid x_q) = \frac{f_1 f_2 \cdots f_p}{r^p} = \frac{1}{r^p} \sum_{y_1, \cdots, y_p}^{0, 1, \ldots, r-1} e^{\frac{2\pi i}{r} \sum_{\mu=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{q} a_{\mu\nu} x_\nu y_\mu}$$

für jedes Zahlensystem $x_1, x_2, \ldots, x_q$, das eine Lösung des Congruenzensystems (1) ist, den Werth 1, für jedes andere den Werth 0 hat, und dass daher die Summe:

$$\sum_{x_1, \cdots, x_q}^{0, 1, \ldots, r-1} F(x_1 \mid \cdots \mid x_q)$$

den Werth s besitzt. ***Man hat also für die Anzahl s der Normallösungen des Congruenzensystems* (1) *den Ausdruck:***

$$s = \frac{1}{r^p} \sum_{\substack{x_1, \cdots, x_q \\ y_1, \cdots, y_p}}^{0, 1, \ldots, r-1} e^{\frac{2\pi i}{r} \sum_{\mu=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{q} a_{\mu\nu} x_\nu y_\mu}, \tag{2}$$

wobei die angedeutete Summation so auszuführen ist, dass über jede der $p + q$ Grössen x und y unabhängig von den übrigen von 0 bis $r - 1$ summirt wird.

2.

Mit Hülfe des unter (2) für s angegebenen Ausdrucks lässt sich nun sofort ein Satz beweisen. Nennt man nämlich die Anzahl der Normallösungen des zu (1) *conjugirten* Congruenzensystems:

$$\sum_{\mu=1}^{p} a_{\mu\nu} x'_\mu \equiv 0 \pmod{r} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, q) \tag{3}$$

s', so ist nach (2)

$$s' = \frac{1}{r^q} \sum_{\substack{x'_1, \cdots, x'_p \\ y'_1, \cdots, y'_q}}^{0,1,\cdots,r-1} e^{\frac{2\pi i}{r} \sum_{\nu=1}^{q} \sum_{\mu=1}^{p} a_{\mu\nu} x'_\mu y'_\nu},$$

und es ergiebt sich daraus, nachdem man für $\mu = 1, 2, \ldots, p$ und $\nu = 1, 2, \ldots, q$ $x'_\mu = y_\mu$, $y'_\nu = x_\nu$ gesetzt hat, sofort durch Vergleichung mit (2) die Beziehung:

$$r^q s' = r^p s.$$

Bezeichnet man also mit s die Anzahl der Normallösungen des Congruenzensystems (1), *mit s' die des conjugirten Congruenzensystems* (3), *so ist:*

$$\frac{r^q}{s} = \frac{r^p}{s'}. \tag{4}$$

3.

Die in der Gleichung (4) stehenden Quotienten sind ganze Zahlen; es ist nämlich für ein Congruenzensystem (1) *die Zahl s stets ein Theiler von r^q*. Um dies einzusehen ordne man die sämmtlichen r^q aus den Zahlen $0, 1, \ldots, r-1$ zu bildenden Zahlensysteme $x_1, x_2, \ldots, x_q$ folgendermassen in Gruppen, wobei zur Abkürzung ein Zahlensystem $x_1, x_2, \ldots, x_q$ symbolisch mit X bezeichnet und verschiedene solche Zahlensysteme durch obere Indices unterschieden werden mögen. Man betrachte die p Linearformen:

$$A_\mu = \sum_{\nu=1}^{q} a_{\mu\nu} x_\nu; \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p) \tag{5}$$

lässt man darin an Stelle von $x_1, x_2, \ldots, x_q$ zunächst die s Normallösungen des Congruenzensystems (1) treten, so wird

$$A_1 \equiv 0, \; A_2 \equiv 0, \ldots, \; A_p \equiv 0 \pmod{r};$$

diese s Zahlensysteme X seien mit:

$$X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(s)}$$

bezeichnet. Entweder sind damit alle r^q Zahlensysteme X erschöpft, d. h. es ist $s = r^q$, dann ist der aufgestellte Satz bewiesen; oder es ist $s < r^q$, dann giebt es ausser diesen s Zahlensystemen X noch andere; ein beliebiges solches sei $X' = (x_1', x_2', \ldots, x_q')$. Setzt man jetzt in den p Linearformen (5) $x_1 = x_1'$, $x_2 = x_2'$, $\ldots$, $x_q = x_q'$, so werden dieselben jedenfalls nicht alle $\equiv 0 \pmod r$; es möge

$$A_1 \equiv g_1', \; A_2 \equiv g_2', \; \ldots, \; A_p \equiv g_p' \pmod r$$

werden. Diese nämlichen Zahlen g' treten dann immer wieder auf, wenn man in den p Formen (5) an Stelle von $x_1, x_2, \ldots, x_q$ jene s Zahlensysteme einführt, welche aus dem Systeme X' durch Addition der Systeme $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(s)}$ abgeleitet werden (wobei die auftretenden Zahlen $x' + x$ auf ihre kleinsten positiven Reste nach dem Modul r zu reduciren sind). Die so entstandenen s Zahlensysteme seien mit

$$X^{(s+1)}, \; X^{(s+2)}, \; \ldots, \; X^{(2s)}$$

bezeichnet; sie sind alle von einander und von den Zahlensystemen $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(s)}$ verschieden, zugleich sind es die sämmtlichen Zahlensysteme, welche $A_1 \equiv g_1', A_2 \equiv g_2', \ldots, A_p \equiv g_p'$ machen. Entweder sind nun mit diesen zwei Reihen alle r^q Zahlensysteme X erschöpft, in welchem Falle $2s = r^q$, also der Satz bewiesen ist, oder es giebt noch andere Zahlensysteme X, die in diesen zwei Reihen nicht vorkommen.

So fortfahrend kann man die sämmtlichen r^q Zahlensysteme X in Reihen von je s anordnen in der Form:

$$(6) \qquad \begin{array}{llll} X^{(1)}, & X^{(2)}, & \ldots, & X^{(s)}; \\ X^{(s+1)}, & X^{(s+2)}, & \ldots, & X^{(2s)}; \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & & \\ X^{(t-1\cdot s+1)}, & X^{(t-1\cdot s+2)}, & \ldots, & X^{(ts)}; \end{array}$$

wobei $ts = r^q$ ist, und erkennt daraus, dass *die Anzahl s der Normallösungen des Congruenzensystems* (1) *stets ein Theiler von r^q ist.* Die s in einer Horizontalreihe stehenden Zahlensysteme sind dadurch charakterisirt, dass sie die m Linearformen (5) den nämlichen Zahlen $g_1, g_2, \ldots, g_p$ congruent machen, und es sind zugleich die sämmtlichen Zahlensysteme, die dies thun.

4.

Aus (6) schliesst man weiter sofort, dass *ein System nicht homogener linearer Congruenzen:*

$$(7) \qquad \sum_{\nu=1}^{q} a_{\mu\nu} x_\nu \equiv g_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

entweder s Normallösungen hat oder gar keine. Heisst man aber Zahlen

$g_1, g_2, \ldots, g_p$, für welche dieses Congruenzensystem Lösungen hat, durch die Formen (5) darstellbar, so ist die Anzahl der darstellbaren Zahlensysteme $t = \frac{r^q}{s}$ *), und die Formel (4) lautet einfach dahin, dass *durch p Formen:*

$$A_\mu = \sum_{\nu=1}^{q} a_{\mu\nu} x_\nu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

und durch die q dazu conjugirten Formen:

$$A'_\nu = \sum_{\mu=1}^{p} a_{\mu\nu} x'_\mu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, q)$$

*stets gleich viele Zahlensysteme darstellbar sind***).

Ein Kriterium dafür, ob ein Congruenzensystem (7) Lösungen hat oder nicht, mit anderen Worten, ob ein Zahlensystem $g_1, g_2, \ldots, g_p$ durch gegebene Formen $A_1, A_2, \ldots, A_p$ darstellbar ist, wird in Art. 7 angegeben.

5.

Ein Fall kann sofort erledigt werden. Ist nämlich $p = q$ und die Determinante $\Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{qq} = \pm 1$, so ist jedes Zahlensystem $g_1, g_2, \ldots, g_p$ durch die Formen $A_1, A_2, \ldots, A_q$ darstellbar; es ist also in diesem Falle für jeden Werth des Moduls r:

$$t = r^q, \quad s = 1.$$

Von diesem Satze sei die folgende Anwendung gemacht. Lässt man in dem Gleichungensysteme:

$$\sum_{\nu=1}^{q} a_{\mu\nu} x_\nu = x'_\mu, \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, q)$$

für welches die Determinante $\Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{qq}$ den Werth ± 1 hat, an Stelle des Systems der Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_q$ der Reihe nach die sämmtlichen Variationen mit Wiederholung der Elemente $0, 1, \ldots, r-1$ zur q^{ten} Classe treten und denkt sich jedesmal die entstehenden Grössen $x'_1, x'_2, \ldots, x'_q$ auf ihre kleinsten positiven Reste nach dem Modul r reducirt, so treten nach dem soeben Bemerkten an Stelle des Systems der q Grössen $x'_1, x'_2, \ldots, x'_q$ diese nämlichen Variationen nur in anderer Reihenfolge. Mit anderen Worten: wenn die Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_q$ unabhängig von einander die Reihe der ganzen Zahlen $0, 1, \ldots, r-1$ durchlaufen, so thun dies, mod. r betrachtet, auch die

*) Frobenius a. a. O. p. 184.

**) Frobenius a. a. O. p. 192.

Zahlen $x_1', x_2', \ldots, x_q'$. Führt man daher in dem unter (2) angeschriebenen Ausdrucke für s an Stelle der Summationsbuchstaben x, y neue x', y' vermittelst der unimodularen linearen Substitutionen:

$$(8) \qquad x_\nu = \sum_{\sigma=1}^{q} h_{\nu\sigma} x_\sigma', \qquad y_\mu = \sum_{\varrho=1}^{p} k_{\varrho\mu} y_\varrho', \qquad \begin{matrix}(\nu = 1, 2, \ldots, q) \\ (\mu = 1, 2, \ldots, p)\end{matrix}$$

(wobei also $\Sigma \pm h_{11} h_{22} \ldots h_{qq} = \pm 1$, $\Sigma \pm k_{11} k_{22} \ldots k_{pp} = \pm 1$ ist) ein, so hat man auch über jeden dieser neuen Summationsbuchstaben unabhängig von den anderen von 0 bis $r-1$ zu summiren und erhält so, wenn man beachtet, dass:

$$\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{q} a_{\mu\nu} x_\nu y_\mu = \sum_{\varrho=1}^{p}\sum_{\sigma=1}^{q}\left(\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{q} k_{\varrho\mu} a_{\mu\nu} h_{\nu\sigma}\right) x_\sigma' y_\varrho'$$

wird, und zur Abkürzung:

$$(9) \qquad \sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{q} k_{\varrho\mu} a_{\mu\nu} h_{\nu\sigma} = b_{\varrho\sigma} \qquad \begin{pmatrix}\varrho = 1, 2, \ldots, p \\ \sigma = 1, 2, \ldots, q\end{pmatrix}$$

setzt, für s den neuen Ausdruck:

$$(10) \qquad s = \frac{1}{r^p} \sum_{\substack{x_1', \ldots, x_q' \\ y_1', \ldots, y_p'}}^{0, 1, \ldots, r-1} e^{\frac{2\pi i}{r} \sum_{\varrho=1}^{p}\sum_{\sigma=1}^{q} b_{\varrho\sigma} x_\sigma' y_\varrho'},$$

bei welchem man nun zum Zwecke der Berechnung von s über die ganzen Zahlen h und k innerhalb der Bedingungen

$$\Sigma \pm h_{11} h_{22} \ldots h_{qq} = \pm 1, \quad \Sigma \pm k_{11} k_{22} \ldots k_{pp} = \pm 1$$

frei verfügen darf.

6.

Der auf der rechten Seite der Gleichung (2) im Exponenten stehende Ausdruck:

$$A = \sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{q} a_{\mu\nu} x_\nu y_\mu$$

wird eine bilineare Form genannt. Verschwinden für die Matrix ihrer ganzzahligen Coefficienten $a_{\mu\nu}$ alle Determinanten $l+1^{\text{ten}}$ (und höheren) Grades, aber nicht alle Determinanten l^{ten} Grades, so heisst l der *Rang* der Form A. Man bilde, indem man unter λ eine der Zahlen $1, 2, \ldots, l$ versteht, alle Determinanten λ^{ten} Grades und heisse d_λ den grössten

gemeinsamen Theiler derselben; die Quotienten $e_\lambda = \frac{d_\lambda}{d_{\lambda-1}}$, wobei im Falle $\lambda = 1$ unter d_0 die Einheit zu verstehen ist, sind dann gleichfalls ganze Zahlen und heissen die *Elementartheiler* der Form A. Geht dann die Form A durch unimodulare lineare Substitutionen (8) in die Form:

$$B = \sum_{\varrho=1}^{p} \sum_{\sigma=1}^{q} b_{\varrho\sigma} x_\sigma' y_\varrho'$$

über, wobei die Coefficienten $b_{\varrho\sigma}$ durch die Gleichungen (9) definirt sind, so ist jede Determinante λ^{ten} Grades der b eine homogene lineare Function der Determinanten λ^{ten} Grades der a und daher auch durch d_λ theilbar; d_λ ist aber zugleich der grösste gemeinsame Theiler aller Determinanten λ^{ten} Grades der b, da auch die Form B durch unimodulare lineare Substitutionen in die Form A übergeführt werden kann, also auch jede Determinante λ^{ten} Grades der a eine homogene lineare Function der Determinanten λ^{ten} Grades der b ist. Nennt man daher zwei Formen wie A und B *äquivalent*, so sind für äquivalente Formen die Zahlen d_λ und daher auch die Elementartheiler e_λ die gleichen *).

Das in Art. 5 abgeleitete und in der Formel (10) niedergelegte Resultat kann jetzt dahin ausgesprochen werden, dass in dem Ausdrucke (2) für die Zahl s die Form A durch jede beliebige dazu äquivalente ersetzt werden darf. Unter allen zu einer gegebenen Form A äquivalenten Formen giebt es nun eine ausgezeichnete, die *Normalform:*

$$E = \sum_{\lambda=1}^{l} e_\lambda x_\lambda' y_\lambda',$$

deren Coefficienten $e_1, e_2, \ldots, e_l$ die vorher definirten Elementartheiler von A sind**). Führt man aber diese Normalform E an Stelle der Form B in (10) ein, so erhält man für s den Ausdruck:

$$(11) \qquad s = \frac{1}{r^p} \sum_{\substack{x_1', \ldots, x_q' \\ y_1', \ldots, y_p'}}^{0,1,\ldots,r-1} e^{\frac{2\pi i}{r} \sum_{\lambda=1}^{l} e_\lambda x_\lambda y_\lambda'},$$

der jetzt ohne Mühe ausgewerthet werden kann.

Zunächst kann die Summation nach den Grössen $x_{l+1}', \ldots, x_q'$, $y_{l+1}', \ldots, y_p'$, da von ihnen das allgemeine Glied der Summe unab-

*) Frobenius a. a. O. p. 148 u. f.

**) Frobenius a. a. O. p. 157 u. f.

hängig ist, sofort ausgeführt werden, und weiter zerfällt dann die übrig bleibende $2l$-fache Summe in das Product von l Doppelsummen. Man erhält so für s den Ausdruck:

$$s = r^{q-2l} \prod_{\lambda=1}^{l} \left(\sum_{x'_\lambda, y'_\lambda}^{0,1,\ldots,r-1} e^{\frac{2\pi i}{r} e_\lambda x'_\lambda y'_\lambda} \right). \tag{12}$$

Man bemerkt nun weiter, dass eine Summe:

$$S_\lambda = \sum_{y'_\lambda=0}^{r-1} e^{\frac{2\pi i}{r} e_\lambda x'_\lambda y'_\lambda}$$

nur dann einen von Null verschiedenen Werth und zwar den Werth r hat, wenn $e_\lambda x'_\lambda$ durch r ohne Rest theilbar ist; durchläuft x'_λ aber die Zahlen $0, 1, \ldots, r-1$, so kommt dies s_λ-mal vor, wenn s_λ den grössten gemeinsamen Theiler von e_λ und r bezeichnet, nämlich für die Werthe $x'_\lambda = \varkappa \frac{r}{s_\lambda}$ $(\varkappa = 0, 1, \ldots, s_\lambda - 1)$; also ist:

$$\sum_{x'_\lambda, y'_\lambda}^{0,1,\ldots,r-1} e^{\frac{2\pi i}{r} e_\lambda x'_\lambda y'_\lambda} = \sum_{x'_\lambda=0}^{r-1} S_\lambda = s_\lambda \cdot r$$

und daher endlich*):

$$s = s_1 s_2 \ldots s_l \cdot r^{q-l} \tag{13}$$

Man hat also das Hauptresultat: *Die Anzahl s der Normallösungen des Congruenzensystems* (1) *beträgt* $s = s_1 s_2 \ldots s_l r^{q-l}$, *wenn l der Rang der bilinearen Form A, s_λ aber für $\lambda = 1, 2, \ldots, l$ der grösste gemeinsame Theiler von r und dem λ^{ten} Elementartheiler e_λ von A ist.*

7.

Nachdem man jetzt im Stande ist, für jedes gegebene Congruenzensystem (1) die Anzahl seiner Normallösungen zu berechnen, kann auch die in Art. 4 aufgeworfene Frage beantwortet werden, welchen Bedingungen ein Zahlensystem $g_1, g_2, \ldots, g_p$ genügen muss, damit das dort aufgestellte System nichthomogener linearer Congruenzen (7) Lösungen besitze.

Man betrachte die p Linearformen:

$$A_\mu = \sum_{\nu=1}^{q} a_{\mu\nu} x_\nu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

*) Frobenius a. a. O. p. 192; Smith a. a. O. p. 399.

und daneben die p Linearformen:

$$\bar{A}_\mu = \sum_{\nu=1}^{q} a_{\mu\nu} x_\nu - g_\mu x_{q+1}. \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

Jedes durch die Linearformen A_μ darstellbare Zahlensystem ist auch durch die Linearformen $\bar{A}_\mu$ darstellbar (man braucht nur $x_{q+1} = 0$ zu setzen), es ist also $\bar{t} \geqq t$, wenn die Anzahl der darstellbaren Zahlensysteme für die Linearformen A_μ wie früher mit t, für die Linearformen $\bar{A}_\mu$ mit $\bar{t}$ bezeichnet wird. Hat nun das Congruenzensystem (7) keine Lösung, so ist schon das Zahlensystem $g_1, g_2, \ldots, g_p$ selbst zwar durch die Linearformen $\bar{A}_\mu$ (man braucht nur $x_1 = 0, \ldots, x_q = 0$, $x_{q+1} = r - 1$ zu setzen), nicht aber durch die Linearformen A_μ darstellbar; es ist als in diesem Falle $\bar{t} > t$. Hat dagegen das Congruenzensystem (7) eine Lösung $x_1 = \xi_1$, $x_2 = \xi_2$, $\ldots$, $x_q = \xi_q$, so ist mod. r:

$$\sum_{\nu=1}^{q} a_{\mu\nu} x_\nu - g_\mu x_{q+1} \equiv \sum_{\nu=1}^{q} a_{\mu\nu}(x_\nu - \xi_\nu x_{q+1}); \quad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

es ist also jedes durch die Formen $\bar{A}_\mu$ darstellbare Zahlensystem auch durch die Formen A_μ darstellbar und sohin $\bar{t} = t$. Folglich ist $\bar{t} = t$ die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass das Congruenzensystem (7) eine Lösung besitze*). Da nun, wie früher angegeben, für ein Congruenzensystem (1) die Zahl t mit der Anzahl s der Normallösungen durch die Gleichung $t = \frac{r^q}{s}$ zusammenhängt, so zieht die Gleichung $\bar{t} = t$ für die entsprechenden Zahlen $\bar{s}$ und s die Gleichung $\bar{s} = rs$ nach sich, und man kann daher das gefundene Resultat folgendermassen aussprechen. *Damit das System der nichthomogenen linearen Congruenzen* (7) *Lösungen besitze, ist nothwendig und hinreichend, dass für das Congruenzensystem:*

$$\sum_{\nu=1}^{q} a_{\mu\nu} x_\nu - g_\mu x_{q+1} \equiv 0 \pmod{r} \quad (\mu = 1, 2, \ldots, p) \tag{14}$$

die Anzahl der Normallösungen $\bar{s} = rs$ betrage, wenn s die Anzahl der Normallösungen des Congruenzensystems (1) *bezeichnet.*

8.

Es sollen jetzt noch aus der Formel (13) einige Resultate abgeleitet werden, die bei Untersuchungen über Thetafunctionen Verwendung finden.

*) Frobenius a. a. O. p. 183; Smith a. a. O. p. 399.

Im Falle $l = p = q$ ergiebt sich unter der Annahme, dass der Modul r ein Vielfaches der Determinante $\Delta = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{qq}$ sei, folgendes einfache Resultat. Da $e_1 e_2 \ldots e_q$ die Determinante der Normalform E ist, diese aber mit der Determinante Δ der ursprünglichen Form bis aufs Vorzeichen übereinstimmt, so ist $\nabla = e_1 e_2 \ldots e_q$, wenn ∇ den absoluten Werth von Δ bezeichnet. Ist nun $r = g\nabla$, wo g eine positive ganze Zahl ist, so ist für $\lambda = 1, 2, \ldots, q$: $s_\lambda = e_\lambda$ und daher $s = e_1 e_2 \ldots e_q = \nabla$. Man hat also den Satz, dass, *wenn nur die Determinante* $\Delta = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{qq}$ *von Null verschieden ist, die Anzahl der Normallösungen des Congruenzensystems:*

$$\sum_{\nu=1}^{q} a_{\mu\nu} x_\nu \equiv 0 \pmod{g\nabla} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, q) \tag{15}$$

für jede ganze Zahl g stets gleich dem absoluten Werthe ∇ der Determinante Δ ist.

9.

Ist wieder $l = p = q$, der Modul r aber relativ prim zu Δ, also auch wegen $\nabla = e_1 e_2 \ldots e_q$ relativ prim zu jedem Elementartheiler e_λ, so sind alle Grössen s_λ und daher auch $s = 1$. *Es hat also das Congruenzensystem:*

$$\sum_{\nu=1}^{q} a_{\mu\nu} x_\nu \equiv 0 \pmod{r}, \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, q) \tag{16}$$

bei welchem wieder die Determinante $\Delta = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{qq} \neq 0$ *sei, in dem Falle, dass der Modul r relativ prim zu Δ ist, nur eine einzige Normallösung, nämlich* $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \ldots,\ x_q = 0$*).

10.

Man betrachte ferner das Congruenzensystem:

$$\sum_{\mu=1}^{q} \alpha_{\mu\nu} x_\mu \equiv 0 \pmod{\nabla}, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, q) \tag{17}$$

bei welchem $\alpha_{\mu\nu}$ die Adjuncte von $a_{\mu\nu}$ in der Determinante:

$$\Delta = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{qq}$$

bezeichne. Bekanntlich ist jede Unterdeterminante λ^{ten} Grades der a dem $\Delta^{\lambda-1}$-fachen der zugehörigen Adjuncte $q - \lambda^{\text{ten}}$ Grades der a gleich; bezeichnet man also mit δ_λ den grössten gemeinsamen Theiler

*) Frobenius a. a. O. p. 193.

der Determinanten λ^{ten} Grades der α, so ist $\delta_\lambda = \nabla^{\lambda-1} . d_{q-\lambda}$, und es hat daher für die bilineare Form:

$$\sum_{\mu=1}^{q} \sum_{\nu=1}^{q} \alpha_{\mu\nu} x_\nu y_\mu$$

der λ^{te} Elementartheiler ε_λ den Werth:

$$\varepsilon_\lambda = \nabla \frac{d_{q-\lambda}}{d_{q-\lambda+1}} = \frac{\nabla}{e_{q-\lambda+1}}.$$

Es ist also weiter mit Rücksicht auf das Congruenzensystem (17) der grösste gemeinsame Theiler σ_λ von ε_λ und dem Modul $\nabla\varepsilon_\lambda$ selbst und daher endlich *die Anzahl σ der Normallösungen des Congruenzensystems* (17):

$$(18) \qquad \sigma = \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_q = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_q = \frac{\nabla^q}{e_q e_{q-1} \ldots e_1} = \nabla^{q-1}.$$

11.

Man betrachte endlich das im ersten Abschnitte unter (12) auftretende Congruenzensystem:

$$(19) \qquad r \sum_{\mu=1}^{q} \alpha_{\mu\nu} x_\mu \equiv 0 \pmod{\nabla}. \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, q)$$

Nennt man bei diesem den grössten gemeinsamen Theiler der Determinanten λ^{ten} Grades seiner Coefficienten δ_λ' und den λ^{ten} Elementartheiler der zugehörigen bilinearen Form ε_λ', so ist:

$$\delta_\lambda' = r^\lambda \nabla^{\lambda-1} d_{q-\lambda}, \quad \varepsilon_\lambda' = \frac{r\nabla}{e_{q-\lambda+1}}.$$

Folglich ist der grösste gemeinsame Theiler σ_λ' von ε_λ' und dem Modul ∇:

$$\sigma_\lambda' = \frac{s_{q-\lambda+1}\nabla}{e_{q-\lambda+1}},$$

wenn wie früher mit $s_{q-\lambda+1}$ der grösste gemeinsame Theiler von $e_{q-\lambda+1}$ und r bezeichnet wird, und es ist also endlich *die Anzahl σ' der Normallösungen des Congruenzensystems* (19):

$$(20) \qquad \sigma' = \sigma_1' \sigma_2' \ldots \sigma_q' = \frac{s_q s_{q-1} \ldots s_1 \nabla^q}{e_q e_{q-1} \ldots e_1} = s . \nabla^{q-1},$$

wenn wie immer mit s die nach (13) *zu berechnende Anzahl der Normallösungen des Congruenzensystems* (1) *bezeichnet wird.*

Führt man den unter (20) gefundenen Werth an Stelle von σ' in die Endformel (18) des ersten Abschnittes ein, so stellt sich *die durch die lineare Substitution:*

$$r m_\mu = \sum_{\nu=1}^{q} a_{\mu\nu} n_\nu, \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, q)$$

bei der r eine positive ganze Zahl, die $a_{\mu\nu}$ ganze Zahlen mit nicht verschwindender Determinante bezeichnen, bewirkte Umformung der q-fach unendlichen Reihe:

$$W = \sum_{m_1, \ldots, m_q}^{-\infty, \ldots, +\infty} f(m_1 | \ldots | m_q)$$

dar in der Gleichung:

(H)
$$W = \frac{1}{r^q \nabla^{q-1} s} \sum_{\varrho_1, \ldots, \varrho_q}^{0, 1, \ldots, \nabla-1} \sum_{\sigma_1, \ldots, \sigma_q}^{0, 1, \ldots, r-1}$$

$$\left(\sum_{n_1, \ldots, n_q}^{-\infty, \ldots, +\infty} e^{\frac{2\pi i}{r} \sum_{\nu=1}^{q} \left(n_\nu + \frac{\overline{=}}{\Delta}\right) \bar{\sigma}_\nu} g\left(n_1 + \frac{\overline{=}}{\Delta} | \ldots | n_q + \frac{\overline{=}}{\Delta}\right) \right).$$

Dabei ist die Function $g(n_1 | \ldots | n_q)$ durch die Gleichung:

$$f(m_1 | \ldots | m_q) = g(n_1 | \ldots | n_q)$$

definirt; es ist ferner zur Abkürzung:

$$\overline{=}_\nu = r \sum_{\mu=1}^{q} \alpha_{\mu\nu} \varrho_\mu, \quad \bar{\sigma}_\nu = \sum_{\mu=1}^{q} a_{\mu\nu} \sigma_\mu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, q)$$

gesetzt; es bezeichnet Δ den Werth, ∇ den absoluten Werth der Determinante $\Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{qq}$ und $\alpha_{\mu\nu}$ die Adjuncte von $a_{\mu\nu}$ in dieser Determinante, und es ist endlich unter s die nach der Formel (13) *zu berechnende Anzahl der Normallösungen des Congruenzensystems:*

$$\sum_{\nu=1}^{q} a_{\mu\nu} x_\nu \equiv 0 \pmod{r} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, q)$$

verstanden.

Dritter Abschnitt.

Von den Umformungen eines Thetaproductes durch lineare Substitution der Summationsbuchstaben.

1.

Die allgemeinen Substitutionen S.

Gegeben sei das Thetaproduct:

$$(1)\qquad \vartheta\left(\left(u^{(1)}\right)\right)_{a^{(1)}} \ldots \vartheta\left(\left(u^{(n)}\right)\right)_{a^{(n)}}$$
$$= \sum_{[m]}^{-\infty,\ldots,+\infty} e^{\sum_{\varrho=1}^{n}\left(\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\mu'=1}^{p} a_{\mu\mu'}^{(\varrho)} m_{\mu}^{(\varrho)} m_{\mu'}^{(\varrho)} + 2\sum_{\mu=1}^{p} m_{\mu}^{(\varrho)} u_{\mu}^{(\varrho)}\right)},$$

wobei unter dem Summenzeichen das System der np Summationsbuchstaben $m_{\mu}^{(\varrho)}$ $\begin{pmatrix}\varrho = 1, 2, \ldots, n\\ \mu = 1, 2, \ldots, p\end{pmatrix}$ abgekürzt mit $[m]$ bezeichnet und die angedeutete Summation so auszuführen ist, dass nach jedem dieser np Summationsbuchstaben unabhängig von den anderen von $-\infty$ bis $+\infty$ summirt werden soll. Die auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende np-fach unendliche Reihe soll dadurch umgeformt werden, dass man an Stelle der Summationsbuchstaben m neue Summationsbuchstaben n einführt mit Hülfe der Substitution:

$$(S)\qquad m_{\mu}^{(\varrho)} = \sum_{\sigma=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{p} r_{\mu\nu}^{(\varrho\sigma)} n_{\nu}^{(\sigma)}, \qquad \begin{pmatrix}\varrho = 1, 2, \ldots, n\\ \mu = 1, 2, \ldots, p\end{pmatrix}$$

bei der die $r_{\mu\nu}^{(\varrho\sigma)}$ $(np)^2$ rationale Zahlen mit nicht verschwindender Determinante bezeichnen, und es sollen dabei die Zahlen r in allgemeinster Weise so bestimmt werden, dass die nach Ausführung der Substitution S auftretende np-fach unendliche Reihe ein Aggregat von Producten von n Thetafunctionen von je p Veränderlichen wird.

Unter Anwendung der Substitution S wird nun:

$$\sum_{\varrho=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\mu'=1}^{p} a_{\mu\mu'}^{(\varrho)} m_{\mu}^{(\varrho)} m_{\mu'}^{(\varrho)}$$
$$= \sum_{\sigma=1}^{n}\sum_{\sigma'=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{p}\sum_{\nu'=1}^{p}\left(\sum_{\varrho=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\mu'=1}^{p} a_{\mu\mu'}^{(\varrho)} r_{\mu\nu}^{(\varrho\sigma)} r_{\mu'\nu'}^{(\varrho\sigma')}\right) n_{\nu}^{(\sigma)} n_{\nu'}^{(\sigma')};$$

soll also die neue np-fach unendliche Reihe wieder Producte von n Thetafunctionen von je p Veränderlichen liefern, so müssen die Coefficienten $r_{\mu\nu}^{(\varrho\sigma)}$ von S den $\frac{1}{2}(n-1)np^2$ Bedingungen:

$$(2)\qquad \sum_{\varrho=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\mu'=1}^{p} a_{\mu\mu'}^{(\varrho)} r_{\mu\nu}^{(\varrho\sigma)} r_{\mu'\nu'}^{(\varrho\sigma')} = 0 \quad \begin{pmatrix}\sigma,\sigma'=1,2,\ldots,n;\ \sigma<\sigma'\\ \nu,\nu'=1,2,\ldots,p\end{pmatrix}$$

genügen. Sind diese Bedingungen erfüllt, und setzt man dann:

$$(3)\qquad \sum_{\varrho=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\mu'=1}^{p} a_{\mu\mu'}^{(\varrho)} r_{\mu\nu}^{(\varrho\sigma)} r_{\mu'\nu'}^{(\varrho\sigma)} = b_{\nu\nu'}^{(\sigma)} \quad \begin{pmatrix}\sigma=1,2,\ldots,n\\ \nu,\nu'=1,2,\ldots,p\end{pmatrix}$$

und:

$$(4)\qquad \sum_{\varrho=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{p} r_{\mu\nu}^{(\varrho\sigma)} u_{\mu}^{(\varrho)} = v_{\nu}^{(\sigma)}, \qquad \begin{pmatrix}\sigma=1,2,\ldots,n\\ \nu=1,2,\ldots,p\end{pmatrix}$$

so geht, wie die am Ende des vorigen Abschnittes angeschriebene Hauptformel (H) unmittelbar erkennen lässt, das vorgelegte Thetaproduct mit den Modulen $a_{\mu\mu'}^{(\varrho)}\begin{pmatrix}\varrho=1,2,\ldots,n\\ \mu,\mu'=1,2,\ldots,p\end{pmatrix}$ und den Argumenten $u_{\mu}^{(\varrho)}\begin{pmatrix}\varrho=1,2,\ldots,n\\ \mu=1,2,\ldots,p\end{pmatrix}$ in ein Aggregat von Thetaproducten mit den Modulen $b_{\nu\nu'}^{(\sigma)}\begin{pmatrix}\sigma=1,2,\ldots,n\\ \nu,\nu'=1,2,\ldots,p\end{pmatrix}$ und den Argumenten $v_{\nu}^{(\sigma)}\begin{pmatrix}\sigma=1,2,\ldots,n\\ \nu=1,2,\ldots,p\end{pmatrix}$ über. Die Gleichungen (2) stellen also die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dar, denen die Coefficienten der Substitution S zu genügen haben*).

---

*) Zur Convergenz der neuen Thetareihen bedarf es keiner weiteren Voraussetzungen. Bezeichnet man nämlich, wie üblich, den reellen Theil von $a_{\mu\mu'}^{(\varrho)}$ mit $a'^{(\varrho)}_{\mu\mu'}$, den reellen Theil von $b_{\nu\nu'}^{(\sigma)}$ mit $b'^{(\sigma)}_{\nu\nu'}$, so erhält man wegen der Gleichungen (3):

$$\sum_{\nu=1}^{p}\sum_{\nu'=1}^{p} b'^{(\sigma)}_{\nu\nu'} y_\nu y_{\nu'} = \sum_{\varrho=1}^{n}\left(\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\mu'=1}^{p} a'^{(\varrho)}_{\mu\mu'} x_\mu^{(\varrho)} x_{\mu'}^{(\varrho)}\right),$$

wenn man zur Abkürzung:

$$\sum_{\nu=1}^{p} r_{\mu\nu}^{(\varrho\sigma)} y_\nu = x_\mu^{(\varrho)} \qquad \begin{pmatrix}\varrho=1,2,\ldots,n\\ \mu=1,2,\ldots,p\end{pmatrix}$$

setzt, und erkennt daraus sofort, dass die auf der linken Seite stehende quadratische Form:

$$\sum_{\nu=1}^{p}\sum_{\nu'=1}^{p} b'^{(\sigma)}_{\nu\nu'} y_\nu y_{\nu'}$$

eine negative ist, sobald die n auf der rechten Seite vorkommenden Formen:

$$\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\mu'=1}^{p} a_{\mu\mu'}^{(\varrho)} x_\mu^{(\varrho)} x_{\mu'}^{(\varrho)} \qquad (\varrho=1,2,\ldots,n)$$

es sind; d. h. dass jede der n neuen Thetareihen convergirt, wenn die n gegebenen es thun.

2.

Die Substitutionen E.

Von den Substitutionen S wurden von Herrn Prym und mir nur zwei specielle Arten untersucht. Die erste Art ist dadurch charakterisirt, dass von den Coefficienten $r_{\mu\nu}^{(\varrho\sigma)}$ nur jene von Null verschieden sind, bei denen $\varrho = \sigma$ ist. Eine solche Substitution wird also durch ein Gleichungensystem von der Form:

$$(E) \qquad m_\mu^{(\varrho)} = \sum_{\nu=1}^{p} r_{\mu\nu}^{(\varrho)} n_\nu^{(\varrho)} \qquad \begin{pmatrix} \varrho = 1, 2, \ldots, n \\ \mu = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix}$$

definirt. Bedingungen für die Coefficienten $r_{\mu\nu}^{(\varrho)}$ treten dabei, ausser dass die n Determinanten $\Sigma \pm r_{11}^{(\varrho)} r_{22}^{(\varrho)} \ldots r_{pp}^{(\varrho)}$ $(\varrho = 1, 2, \ldots, n)$ sämmtlich von Null verschieden sein müssen, nicht auf, da durch die gemachte Annahme, wonach $r_{\mu\nu}^{(\varrho\sigma)} = 0$ ist, sobald $\varrho \gtrless \sigma$ ist, die Bedingungen (2) bereits erfüllt sind. Die Substitution E ist eine zerfallende; sie zerfällt in n getrennte Substitutionen, von denen die i^{te}:

$$(5) \qquad m_\mu^{(i)} = \sum_{\nu=1}^{p} r_{\mu\nu}^{(i)} n_\nu^{(i)} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

die i^{te} Thetafunction $\vartheta(\!(u^{(i)})\!)_{a^{(i)}}$ allein betrifft, und es vollzieht sich daher die durch die Substitution E bewirkte Umformung des Thetaproductes (1) in der Weise, dass jede der n Thetafunctionen für sich transformirt und die n so entstandenen Gleichungen schliesslich mit einander multiplicirt werden. Es genügt also die Umformung einer einzelnen Thetafunction durch eine Substitution von der Form (5) anzugeben. Indem man zu dem Ende die p^2 rationalen Zahlen $r_{\mu\nu}^{(i)}$ auf gemeinsamen Nenner r bringt und der Einfachheit halber den Index i unterdrückt, entsteht die Aufgabe, die p-fach unendliche Thetareihe:

$$(6) \qquad \vartheta(\!(u)\!)_a = \sum_{m_1, \ldots, m_p}^{-\infty, \ldots, +\infty} e^{\sum_{\mu=1}^{p} \sum_{\mu'=1}^{p} a_{\mu\mu'} m_\mu m_{\mu'} + 2 \sum_{\mu=1}^{p} m_\mu u_\mu}$$

durch die Substitution:

$$(7) \qquad r m_\mu = \sum_{\nu=1}^{p} e_{\mu\nu} n_\nu, \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

bei der r eine positive ganze Zahl, die $e_{\mu\nu}$ ganze Zahlen mit nicht verschwindender Determinante bezeichnen, umzuformen. Diese Umformung erhält man aber aus der am Ende des vorigen Abschnittes angeschriebenen Hauptformel (H) unmittelbar in der Gestalt:

$$(8)\qquad r^p\,\nabla^{p-1}\,s\,\vartheta\langle\!\langle u\rangle\!\rangle_a$$

$$=\sum_{\varrho_1,\cdots,\varrho_p}^{0,1,\cdots,\nabla-1}\sum_{\sigma_1,\cdots,\sigma_p}^{0,1,\cdots,r-1}\left(\sum_{n_1,\cdots,n_p}^{-\infty,\cdots,+\infty} e^{\sum_{\nu=1}^{p}\sum_{\nu'=1}^{p} b_{\nu\nu'}\left(n_\nu+\frac{\bar{\bar{\varrho}}_\nu}{\Delta}\right)\left(n_{\nu'}+\frac{\bar{\bar{\varrho}}_{\nu'}}{\Delta}\right)+2\sum_{\nu=1}^{p}\left(n_\nu+\frac{\bar{\bar{\varrho}}_\nu}{\Delta}\right)\left(v_\nu+\frac{\bar{\sigma}_\nu}{r}\pi i\right)}\right)$$

oder, indem man die auf der rechten Seite hinter den beiden ersten Summenzeichen stehende p-fach unendliche Reihe durch die mit ihr identische Thetafunction ersetzt, in der Thetaformel:

$$(I)\qquad r^p\,\nabla^{p-1}\,s\,\vartheta\langle\!\langle u\rangle\!\rangle_a=\sum_{\varrho_1,\cdots,\varrho_p}^{0,1,\cdots,\nabla-1}\sum_{\sigma_1,\cdots,\sigma_p}^{0,1,\cdots,r-1}\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\bar{\bar{\varrho}}}{\Delta}\\ \frac{\bar{\sigma}}{r}\end{bmatrix}_*\langle\!\langle v\rangle\!\rangle_b.$$

Dabei sind die Grössen v, b mit den Grössen u, a durch die Gleichungen:

$$(9)\qquad v_\nu=\frac{1}{r}\sum_{\mu=1}^{p}e_{\nu\mu}u_\mu,\qquad b_{\nu\nu'}=\frac{1}{r^2}\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\mu'=1}^{p}e_{\nu\mu}e_{\nu'\mu'}a_{\mu\mu'}$$
$$(\nu,\nu'=1,2,\ldots,p)$$

verknüpft; es ist ferner zur Abkürzung:

$$(10)\qquad \bar{\bar{\varrho}}_\nu=r\sum_{\mu=1}^{p}\varepsilon_{\nu\mu}\varrho_\mu,\qquad \bar{\sigma}_\nu=\sum_{\mu=1}^{p}e_{\nu\mu}\sigma_\mu\qquad(\nu=1,2,\ldots p)$$

gesetzt; es bezeichnet weiter Δ den Werth, ∇ den absoluten Werth der Determinante $\Sigma\pm e_{11}e_{22}\ldots e_{pp}$ und $\varepsilon_{\mu\nu}$ die Adjuncte von $e_{\mu\nu}$ in dieser Determinante, und es ist endlich unter s die nach Formel (13) des zweiten Abschnittes zu berechnende Anzahl der Normallösungen des Congruenzensystems:

$$(11)\qquad \sum_{\nu=1}^{p}e_{\mu\nu}x_\nu\equiv 0\ (\mathrm{mod.}\ r)\qquad(\mu=1,2,\ldots,p)$$

verstanden.

Man wird noch bemerken, dass die Substitutionen E eine Gruppe bilden, dass also irgend zwei oder mehrere E-Substitutionen sich wieder zu einer E-Substitution zusammensetzen, und dass die inverse einer E-Substitution selbst wieder eine E-Substitution ist; endlich aber, dass eine Substitution E die einzig mögliche, zur Umformung eines Thetaproductes (1) anwendbare Substitution S ist, wenn die n gegebenen Thetafunctionen allgemeine und ihre Modulen vollständig von einander unabhängig sind; denn bestehen zwischen den Modulen

$$a_{\mu\mu'}^{(\varrho)}\begin{pmatrix}\varrho=1,2,\ldots,n\\ \mu,\mu'=1,2,\ldots,p\end{pmatrix}$$

keinerlei Beziehungen, so können, da dann für alle Werthe der Indices:

$$r_{\mu\nu}^{(\varrho\sigma)}\, r_{\mu'\nu'}^{(\varrho\sigma')} = 0$$

sein muss, sobald $\sigma \gtrless \sigma'$ ist, die Relationen (2) nur durch die Coefficienten einer Substitution E erfüllt werden.

3.

Die Substitutionen D.

Die zweite von Herrn Prym und mir untersuchte specielle Art von Substitutionen S ist dadurch charakterisirt, dass von den Coefficienten $r_{\mu\nu}^{(\varrho\sigma)}$ nur jene von Null verschieden sind, für welche $\mu = \nu$ ist. Eine solche Substitution wird also durch ein Gleichungensystem von der Form:

$$(D) \qquad m_\mu^{(\varrho)} = \sum_{\sigma=1}^{n} r_\mu^{(\varrho\sigma)}\, n_\mu^{(\sigma)} \qquad \begin{pmatrix} \varrho = 1, 2, \ldots, n \\ \mu = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix}$$

definirt. Auch eine Substitution D ist eine zerfallende; sie zerfällt in p Substitutionen, von denen die k^{te}:

$$(12) \qquad m_k^{(\varrho)} = \sum_{\sigma=1}^{n} r_k^{(\varrho\sigma)}\, n_k^{(\sigma)} \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, n)$$

ist, von denen aber jede alle n Thetafunctionen betrifft, und die daher hier nicht gesondert betrachtet werden können. Die Coefficienten der Substitution D, für welche die p den einzelnen Substitutionen (12) zugehörigen Determinanten $\Sigma \pm r_k^{(11)} r_k^{(22)} \ldots r_k^{(nn)}$ sämmtlich von Null verschieden sein müssen, sind ausserdem an die $\frac{1}{2}(n-1)np^2$ aus (2) folgenden Bedingungen:

$$(13) \qquad \sum_{\varrho=1}^{n} a_{\mu\mu'}^{(\varrho)}\, r_\mu^{(\varrho\sigma)}\, r_{\mu'}^{(\varrho\sigma')} = 0 \qquad \begin{pmatrix} \sigma, \sigma' = 1, 2, \ldots, n;\ \sigma < \sigma' \\ \mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix}$$

geknüpft, während die Moduln $b_{\mu\mu'}^{(\sigma)}$ und die Argumente $v_\mu^{(\sigma)}$ der neuen Thetafunctionen durch die aus (3) und (4) folgenden Gleichungen:

$$(14) \qquad b_{\mu\mu'}^{(\sigma)} = \sum_{\varrho=1}^{n} a_{\mu\mu'}^{(\varrho)}\, r_\mu^{(\varrho\sigma)}\, r_{\mu'}^{(\varrho\sigma)}, \qquad v_\mu^{(\sigma)} = \sum_{\varrho=1}^{n} r_\mu^{(\varrho\sigma)}\, u_\mu^{(\varrho)}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma = 1, 2, \ldots, n \\ \mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix}$$

bestimmt sind.

Die gefundenen Bedingungen (13) sind aber nicht nur Bedingungen für die Coefficienten $r_\mu^{(\varrho\sigma)}$ der Substitution D sondern auch für die

Modulen $a^{(\varrho)}_{\mu\mu'}$ des gegebenen Thetaproductes. Damit nämlich die Gleichungen (13) durch rationale Zahlen $r^{(\varrho\sigma)}_{\mu}$ von nicht verschwindender Determinante erfüllt werden können, müssen die Modulen $a^{(\varrho)}_{\mu\mu'}$ in gewissem Zusammenhange mit einander stehen, und es erfordert demnach die Anwendung einer D-Substitution von vorneherein eine besondere Beschaffenheit des gegebenen Thetaproductes. Um diese aufzudecken leite man aus dem System von Relationen:

$$(15)\qquad \sum_{\varrho=1}^{n} a^{(\varrho)}_{\mu\mu'} r^{(\varrho\sigma)}_{\mu} r^{(\varrho\sigma')}_{\mu'} = \begin{cases} b^{(\sigma)}_{\mu\mu'}, & \text{wenn } \sigma' = \sigma, \\ 0, & \text{wenn } \sigma' \gtrless \sigma, \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \sigma, \sigma' = 1, 2, \ldots, n \\ \mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix}$$

ein System einfacherer Relationen ab. Zu dem Ende bezeichne man mit $s^{(\varrho\sigma)}_{\mu}$ die durch den Werth der Determinante $\Sigma \pm r^{(11)}_{\mu} r^{(22)}_{\mu} \ldots r^{(nn)}_{\mu}$ dividirte Adjuncte $n-1^{\text{ten}}$ Grades von $r^{(\varrho\sigma)}_{\mu}$ in dieser Determinante, multiplicire, indem man unter ϱ' irgend eine Zahl aus der Reihe $1, 2, \ldots, n$ versteht, linke und rechte Seite der Gleichung (15) mit $s^{(\varrho'\sigma')}_{\mu}$ und summire nach σ' von 1 bis n; man erhält dann, wenn man nach geschehener Summation schliesslich noch den Accent bei ϱ' unterdrückt, die Gleichung:

$$(16)\qquad r^{(\varrho\sigma)}_{\mu} a^{(\varrho)}_{\mu\mu'} = s^{(\varrho\sigma)}_{\mu} b^{(\sigma)}_{\mu\mu'}. \qquad \begin{pmatrix} \varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n \\ \mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix}$$

Aus den Gleichungen (16) folgt nun zunächst, dass, wenn von den p Gleichungssystemen (12), aus denen die Substitution D besteht, eines, etwa das k^{te} in Folge des Verschwindens gewisser seiner Coefficienten $r^{(\varrho\sigma)}_{k}$ in der Weise zerfällt, dass m von den n Zahlen $n^{(1)}_{k}, n^{(2)}_{k}, \ldots, n^{(n)}_{k}$ nur in m seiner n Gleichungen, die übrigen $n-m$ Zahlen n_k nur in den $n-m$ übrigen Gleichungen vorkommen, dann die sämmtlichen p Gleichungensysteme in derselben Weise zerfallen. Schliesst man aber diesen Fall, in der Erwägung, dass dann die verlangte Umformung des gegebenen Productes von n Thetafunctionen sich in der Weise vollzieht, dass das Product von m dieser Functionen und ebenso das Product der $n-m$ übrigen jedes für sich transformirt und die beiden so entstandenen Gleichungen mit einander multiplicirt werden, aus, so folgert man aus den Gleichungen (16) ohne Mühe, dass der Quotient von irgend zwei der $2n$ Grössen

$$a^{(1)}_{\mu\mu'}, \ldots, a^{(n)}_{\mu\mu'}, \; b^{(1)}_{\mu\mu'}, \ldots, b^{(n)}_{\mu\mu'}$$

eine rationale Zahl, dass also:

$$(17)\qquad a^{(\varrho)}_{\mu\mu'} = h^{(\varrho)}_{\mu\mu'} a_{\mu\mu'}, \quad b^{(\sigma)}_{\mu\mu'} = k^{(\sigma)}_{\mu\mu'} a_{\mu\mu'} \qquad \begin{pmatrix} \varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n \\ \mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix}$$

ist, wo die h, k ganze Zahlen bezeichnen. Beachtet man aber weiter die aus (16) folgende Gleichung:

$$(18)\qquad \frac{a^{(\varrho)}_{\mu\mu'}a^{(\varrho)}_{\mu'\mu''}a^{(\varrho)}_{\mu''\mu}}{a^{(\varrho)}_{\mu\mu}a^{(\varrho)}_{\mu'\mu'}a^{(\varrho)}_{\mu''\mu''}} = \frac{b^{(\sigma)}_{\mu\mu'}b^{(\sigma)}_{\mu'\mu''}b^{(\sigma)}_{\mu''\mu}}{b^{(\sigma)}_{\mu\mu}b^{(\sigma)}_{\mu'\mu'}b^{(\sigma)}_{\mu''\mu''}}, \qquad \begin{pmatrix}\varrho,\sigma = 1,2,\ldots,n\\ \mu,\mu',\mu'' = 1,2,\ldots,p\end{pmatrix}$$

so erkennt man noch, dass die Zahlen $h^{(\varrho)}_{\mu\mu'}$, $k^{(\sigma)}_{\mu\mu'}$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit in der Form:

$$(19)\qquad h^{(\varrho)}_{\mu\mu'} = p^{(\varrho)}f^{(\varrho)}_{\mu}f^{(\varrho)}_{\mu'}, \quad k^{(\sigma)}_{\mu\mu'} = q^{(\sigma)}g^{(\sigma)}_{\mu}g^{(\sigma)}_{\mu'} \qquad \begin{pmatrix}\varrho,\sigma = 1,2,\ldots,n\\ \mu,\mu' = 1,2\ldots,p\end{pmatrix}$$

angenommen werden können, wo die f, g von Null verschiedene, die p, q positive ganze Zahlen sind, sodass also schliesslich:

$$(20)\qquad a^{(\varrho)}_{\mu\mu'} = p^{(\varrho)}f^{(\varrho)}_{\mu}f^{(\varrho)}_{\mu'}\alpha_{\mu\mu'} \qquad \begin{pmatrix}\varrho = 1,2,\ldots,n\\ \mu,\mu' = 1,2,\ldots,p\end{pmatrix}$$

und:

$$(21)\qquad b^{(\sigma)}_{\mu\mu'} = g^{(\sigma)}g^{(\sigma)}_{\mu}g^{(\sigma)}_{\mu'}a_{\mu\mu'} \qquad \begin{pmatrix}\sigma = 1,2,\ldots,n\\ \mu,\mu' = 1,2,\ldots,p\end{pmatrix}$$

wird. Die Gleichungen (20) stellen die gesuchten Beziehungen zwischen den Modulen des gegebenen Thetaproductes dar; sie zeigen, dass die Modulen $a^{(\varrho)}_{\mu\mu'}\begin{pmatrix}\varrho = 1,2,\ldots,n\\ \mu,\mu' = 1,2,\ldots,p\end{pmatrix}$ eines Thetaproductes (1), wenn dieses durch eine D-Substitution überhaupt soll umgeformt werden können, aus den Modulen $a_{\mu\mu'}$ einer einzigen Thetafunction in der Form (20) abgeleitet sein müssen, und die Gleichungen (21) sagen weiter aus, dass die gleiche Herleitung aus den Thetamodulen $a_{\mu\mu'}$ auch für die Modulen $b^{(\sigma)}_{\mu\mu'}$ der neuen Thetafunctionen gilt.

Sind aber die Gleichungen (20), (21) erfüllt, so ergiebt sich aus den Gleichungen (16) für die Coefficienten $r^{(\varrho\sigma)}_{\mu}$ der Substitution D die Eigenschaft, dass der Ausdruck

$$\frac{f^{(\varrho)}_{\mu}}{g^{(\sigma)}_{\mu}}r^{(\varrho\sigma)}_{\mu}$$

für jedes μ von 1 bis p den nämlichen Werth besitzt, dass also:

$$(22)\qquad r^{(\varrho\sigma)}_{\mu} = \frac{g^{(\sigma)}_{\mu}}{f^{(\varrho)}_{\mu}}t^{(\varrho\sigma)} \qquad \begin{pmatrix}\varrho,\sigma = 1,2,\ldots,n\\ \mu = 1,2,\ldots,p\end{pmatrix}$$

ist, wo die $t^{(\varrho\sigma)}$ rationale Zahlen bezeichnen, die auf Grund der Gleichungen (15) den Bedingungen:

$$(23)\qquad \sum_{\varrho=1}^{n}p^{(\varrho)}t^{(\varrho\sigma)}t^{(\varrho\sigma')} = \begin{cases}q^{(\sigma)}, & \text{wenn } \sigma' = \sigma,\\ 0, & \text{wenn } \sigma' \gtrless \sigma,\end{cases} \qquad (\sigma,\sigma' = 1,2,\ldots,n)$$

zu genügen haben. Man erhält also die allgemeinste Substitution D, welche ein Thetaproduct mit den Modulen (20) in ein Aggregat von Thetaproducten mit den Modulen (21) überführt, in ihren Coefficienten

$\gamma_\mu^{(\varrho\sigma)}$ durch die Gleichungen (22) gegeben, wenn man darin die $t^{(\varrho\sigma)}$ als rationale Zahlen in allgemeinster Weise so bestimmt, dass sie den Gleichungen (23) genügen, d. h. mit anderen Worten so, dass durch die Substitution:

$$x^{(\varrho)} = \sum_{\sigma=1}^{n} t^{(\varrho\sigma)} y^{(\sigma)} \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, n) \tag{24}$$

die Form:

$$P = \sum_{\varrho=1}^{n} p^{(\varrho)} x^{(\varrho)^2} \tag{25}$$

in die Form:

$$Q = \sum_{\sigma=1}^{n} q^{(\sigma)} y^{(\sigma)^2} \tag{26}$$

übergeht.

Beachtet man schliesslich noch, dass man die so bestimmte Substitution:

$$m_\mu^{(\varrho)} = \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{g_\mu^{(\sigma)}}{f_\mu^{(\varrho)}} t^{(\varrho\sigma)} n_\mu^{(\sigma)} \qquad \begin{pmatrix} \varrho = 1, 2, \ldots, n \\ \mu = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix} \tag{D}$$

aus den drei Substitutionen:

$$m_\mu^{(\varrho)} = \frac{1}{f_\mu^{(\varrho)}} m_\mu'^{(\varrho)} \qquad \begin{pmatrix} \varrho = 1, 2, \ldots, n \\ \mu = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix} \tag{27}$$

$$m_\mu'^{(\varrho)} = \sum_{\sigma=1}^{n} t^{(\varrho\sigma)} n_\mu'^{(\sigma)}, \qquad \begin{pmatrix} \varrho = 1, 2, \ldots, n \\ \mu = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix} \tag{28}$$

$$n_\mu'^{(\sigma)} = g_\mu^{(\sigma)} n_\mu^{(\sigma)} \qquad \begin{pmatrix} \sigma = 1, 2, \ldots, n \\ \mu = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix} \tag{29}$$

zusammensetzen kann, und dass von diesen die erste und letzte E-Substitutionen specieller Art sind (sie sind auch D-Substitutionen, was aber hier nicht in Betracht kommt), die mittlere wieder eine D-Substitution ist, die aber dadurch ausgezeichnet ist, dass die Coefficientensysteme der p Substitutionen (12), in welche sie zerfällt, mit einander identisch sind, so kann man sagen, dass man die allgemeine Substitution D mit Hülfe der Substitutionen E auf die soeben charakterisirte speciellere Form:

$$m_\mu^{(\varrho)} = \sum_{\sigma=1}^{n} t^{(\varrho\sigma)} n_\mu^{(\sigma)} \qquad \begin{pmatrix} \varrho = 1, 2, \ldots, n \\ \mu = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix} \tag{30}$$

reduciren kann. In dieser Substitution bezeichnen die $t^{(\varrho\sigma)}$ rationale Zahlen, welche den Gleichungen (22) genügen, und es wird durch sie ein Thetaproduct mit den Modulen:

$$a_{\mu\mu'}^{(\varrho)} = p^{(\varrho)} a_{\mu\mu'} \qquad \begin{pmatrix} \varrho = 1, 2, \ldots, n \\ \mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix}$$

in ein Aggregat von Thetaproducten mit den Modulen:

$$b_{\mu\mu'}^{(\sigma)} = q^{(\sigma)} a_{\mu\mu'} \qquad \begin{pmatrix} \sigma = 1, 2, \ldots, n \\ \mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix}$$

übergeführt. Bei der Aufstellung der zu einer D-Substitution gehörigen Thetaformel wird man sich also, nachdem die einer E-Substitution entsprechende Formel aus dem vorigen Artikel zu entnehmen ist, auf die specielle Form (30) dieser Substitution beschränken. Indem man aber zu dem Ende die n^2 rationalen Zahlen $t^{(\varrho\sigma)}$ auf gemeinsamen Nenner bringt, entsteht die Aufgabe, die np-fach unendliche Reihe:

$$(31) \qquad \vartheta\left(\!\left(u^{(1)}\right)\!\right)_{a^{(1)}} \ldots \vartheta\left(\!\left(u^{(n)}\right)\!\right)_{a^{(n)}}$$
$$= \sum_{|m|}^{-\infty,\ldots,+\infty} e^{\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\mu'=1}^{p} a_{\mu\mu'} \sum_{\varrho=1}^{n} p^{(\varrho)} m_{\mu}^{(\varrho)} m_{\mu'}^{(\varrho)} + 2\sum_{\varrho=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{p} m_{\mu}^{(\varrho)} u_{\mu}^{(\varrho)}},$$

durch die Substitution:

$$(32) \qquad r m_{\mu}^{(\varrho)} = \sum_{\sigma=1}^{n} d^{(\varrho\sigma)} n_{\mu}^{(\sigma)} \qquad \begin{pmatrix} \varrho = 1, 2, \ldots, n \\ \mu = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix}$$

umzuformen, bei der r eine positive ganze Zahl, die $d^{(\varrho\sigma)}$ ganze Zahlen bezeichnen, welche den Gleichungen:

$$(33) \qquad \sum_{\varrho=1}^{n} p^{(\varrho)} d^{(\varrho\sigma)} d^{(\varrho\sigma')} = \begin{cases} r^2 q^{(\sigma)}, & \text{wenn } \sigma' = \sigma, \\ 0, & \text{wenn } \sigma' \gtrless \sigma, \end{cases} \qquad (\sigma, \sigma' = 1, 2, \ldots, n)$$

genügen. Diese Umformung erhält man vermittelst der am Ende des vorigen Abschnitts angeschriebenen Hauptformel (H) ohne Mühe in der Gestalt:

$$(II) \qquad \left(r^n \nabla^{n-1} s\right)^p \vartheta\left(\!\left(u^{(1)}\right)\!\right)_{a^{(1)}} \ldots \vartheta\left(\!\left(u^{(n)}\right)\!\right)_{a^{(n)}}$$
$$= \sum_{|\alpha|}^{0,1,\ldots,\nabla-1} \sum_{|\beta|}^{0,1,\ldots,r-1} \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\bar{\bar{\alpha}}^{(1)}}{\Delta} \\ \frac{\bar{\beta}^{(1)}}{r} \end{bmatrix} \left(\!\left(v^{(1)}\right)\!\right)_{b^{(1)}} \ldots \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\bar{\bar{\alpha}}^{(n)}}{\Delta} \\ \frac{\bar{\beta}^{(n)}}{r} \end{bmatrix} \left(\!\left(v^{(n)}\right)\!\right)_{b^{(n)}}.$$

Dabei ist:

$$(34) \qquad a_{\mu\mu'}^{(\varrho)} = p^{(\varrho)} a_{\mu\mu'}, \quad b_{\mu\mu'}^{(\sigma)} = q^{(\sigma)} a_{\mu\mu'}; \qquad \begin{pmatrix} \varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n \\ \mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix}$$

es ist ferner:

$$(35) \qquad r v_{\mu}^{(\sigma)} = \sum_{\varrho=1}^{n} d^{(\varrho\sigma)} u_{\mu}^{(\varrho)}; \qquad \begin{pmatrix} \sigma = 1, 2, \ldots, n \\ \mu = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix}$$

es ist weiter zur Abkürzung gesetzt:

$$(36)\quad \bar{\alpha}_\mu^{(\sigma)} = r\sum_{\varrho=1}^{n}\delta^{(\varrho\sigma)}\alpha_\mu^{(\varrho)}, \qquad \bar{\beta}_\mu^{(\sigma)} = \sum_{\varrho=1}^{n} d^{(\varrho\sigma)}\beta_\mu^{(\varrho)}; \qquad \begin{pmatrix}\sigma = 1,2,\ldots,n\\ \mu = 1,2,\ldots,p\end{pmatrix}$$

es bezeichnet Δ den Werth, ∇ den absoluten Werth der Determinante $\Sigma \pm d^{(11)} d^{(22)} \ldots d^{(nn)}$ und $\delta^{(\varrho\sigma)}$ die Adjuncte von $d^{(\varrho\sigma)}$ in dieser Determinante; es deutet das Zeichen $\sum_{[\alpha]}^{0,1,\ldots,\nabla-1}$ an, dass für $\begin{matrix}\varrho = 1,2,\ldots,n\\ \mu = 1,2,\ldots,p\end{matrix}$ nach jedem $\alpha_\mu^{(\varrho)}$ von 0 bis $\nabla - 1$, das Zeichen $\sum_{[\beta]}^{0,1,\ldots,r-1}$, dass für $\begin{matrix}\varrho = 1,2,\ldots,n\\ \mu = 1,2,\ldots,p\end{matrix}$ nach jedem $\beta_\mu^{(\varrho)}$ von 0 bis $r-1$ zu summiren ist; es bezeichnet endlich s die nach Formel (13) des zweiten Abschnittes zu berechnende Anzahl der Normallösungen des Congruenzensystems:

$$(37)\quad \sum_{\sigma=1}^{n} d^{(\varrho\sigma)} x^{(\sigma)} \equiv 0 \pmod{r}. \qquad (\varrho = 1,2,\ldots,n)$$

Bezüglich der Zusammensetzung von D-Substitutionen mag, da diese Frage für die späteren Untersuchungen nicht in Betracht kommt, nur kurz das Folgende bemerkt werden. Setzt man mit einer D-Substitution, welche ein Thetaproduct mit Modulen $a_{\mu\mu'}^{(\sigma)}$ in ein Aggregat von Thetaproducten mit Modulen $b_{\mu\mu'}^{(\sigma)}$ überführt, eine zweite D-Substitution, welche ein Thetaproduct mit den Modulen $b_{\mu\mu'}^{(\sigma)}$ in ein Aggregat von Thetaproducten mit Modulen $c_{\mu\mu'}^{(\tau)}$ überführt, zusammen, so ist das Product dieser beiden Substitutionen wieder eine D-Substitution, und es wird durch diese ein Thetaproduct mit den Modulen $a_{\mu\mu'}^{(\varrho)}$ in ein Aggregat von Thetaproducten mit den Modulen $c_{\mu\mu'}^{(\tau)}$ übergeführt. Die zwischen den Coefficienten dieser Substitutionen bestehenden Relationen sind ohne Mühe dem Vorigen zu entnehmen.

Die zur Substitution D inverse Substitution:

$$D^{-1})\qquad n_\mu^{(\sigma)} = \sum_{\varrho=1}^{n} s_\mu^{(\varrho\sigma)} m_\mu^{(\varrho)}, \qquad \begin{pmatrix}\sigma = 1,2,\ldots,n\\ \mu = 1,2,\ldots,p\end{pmatrix}$$

bei welcher, wie oben, $s_\mu^{(\varrho\sigma)}$ die durch den Werth der Determinante $\Sigma \pm r_\mu^{(11)} r_\mu^{(22)} \ldots r_\mu^{(nn)}$ getheilte Adjuncte von $r_\mu^{(\varrho\sigma)}$ in dieser Determinante bezeichnet, ist selbst wieder eine D-Substitution, ihre Coefficienten $s_\mu^{(\varrho\sigma)}$ genügen den leicht aus (16) erhältlichen Gleichungen:

$$(38)\quad \sum_{\sigma=1}^{n} b_{\mu\mu'}^{(\sigma)} s_\mu^{(\varrho\sigma)} s_{\mu'}^{(\varrho'\sigma)} = \begin{cases} a_{\mu\mu'}^{(\varrho)}, & \text{wenn } \varrho' = \varrho,\\ 0, & \text{wenn } \varrho' \gtrless \varrho,\end{cases} \qquad \begin{pmatrix}\varrho, \varrho' = 1,2,\ldots,n\\ \mu, \mu' = 1,2,\ldots,p\end{pmatrix}$$

und es wird durch sie ein Thetaproduct mit den Moduln $b_{\mu\mu'}^{(\sigma)}$ in ein

Aggregat von Thetaproducten mit den Modulen $a^{(\varrho)}_{\mu\mu'}$ übergeführt. Wie man die so entstehende Thetaformel aus der Formel (II) durch Umkehrung erhalten kann, ist an anderem Orte ausführlich erörtert worden*).

Endlich erkennt man ohne Mühe, dass die Ueberführung eines Thetaproductes mit Modulen von der Form (20) in ein Aggregat von Thetaproducten mit Modulen von der Form (21), sobald zwischen den Thetamodulen $a_{\mu\mu'}$ ausser den Gleichungen $a_{\mu\mu'} = a_{\mu'\mu}$ keine linearen Relationen bestehen, nur durch eine Substitution von der Form D geschehen kann. Zu dem Ende beachte man, dass die Gleichungen (2) und (3), wenn man darin $a^{(\varrho)}_{\mu\mu'}$ und $b^{(\sigma)}_{\mu\mu'}$ durch ihre Ausdrücke aus (20), (21) ersetzt, in Folge der vorausgesetzten Unabhängigkeit der Thetamodulen $a_{\mu\mu'}$ die Gleichungen:

$$(39)\quad \sum_{\varrho=1}^{n} p^{(\varrho)} f^{(\varrho)}_{\mu} f^{(\varrho)}_{\mu'} r^{(\varrho\,\sigma)}_{\mu\nu} r^{(\varrho\,\sigma')}_{\mu'\nu'} = \begin{cases} q^{(\sigma)} g^{(\sigma)}_{\nu} g^{(\sigma)}_{\nu'}, & \text{wenn } \sigma' = \sigma,\ \mu = \nu,\ \mu' = \nu', \\ 0, & \text{in allen anderen Fällen,} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma, \sigma' = 1, 2, \ldots, n \\ \mu, \mu', \nu, \nu' = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix}$$

nach sich ziehen, und diese für $\sigma' = \sigma$, $\mu' = \mu$, $\nu' = \nu$ die Gleichungen:

$$(40)\quad \sum_{\varrho=1}^{n} p^{(\varrho)} f^{(\varrho)^2}_{\mu} r^{(\varrho\sigma)^2}_{\mu\nu} = \begin{cases} q^{(\sigma)} g^{(\sigma)^2}_{\nu}, & \text{wenn } \mu = \nu, \\ 0, & \text{wenn } \mu \gtrless \nu, \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \sigma = 1, 2, \ldots, n \\ \mu, \nu = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix}$$

liefern. Aus diesen Gleichungen schliesst man aber, da die $p^{(\varrho)}$ positive Grössen sind, sofort, dass $r^{(\varrho\sigma)}_{\mu\nu} = 0$ ist, sobald $\mu \gtrless \nu$ ist, womit die Substitution als eine D-Substitution charakterisirt ist.

4.

Zusammensetzung der allgemeinen Substitution S aus Substitutionen D und E.

Es soll jetzt nachgewiesen werden, dass die in Art. 1 aufgestellte allgemeine Substitution S, durch welche ein Thetaproduct mit Modulen $a^{(\varrho)}_{\mu\mu'}\begin{pmatrix} \varrho = 1, 2, \ldots, n \\ \mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix}$ in ein Aggregat von Thetaproducten mit Modulen $b^{(\sigma)}_{\mu\mu'}\begin{pmatrix} \sigma = 1, 2, \ldots, n \\ \mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix}$ übergeführt wird, deren $(np)^2$ Coefficienten $r^{(\varrho\sigma)}_{\mu\nu}\begin{pmatrix} \varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n \\ \mu, \nu = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix}$ also den Gleichungen:

*) Krazer und Prym, Neue Grundlagen etc. p. 22 u. f.

$$(41)\qquad \sum_{\varrho=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\mu'=1}^{p} a^{(\varrho)}_{\mu\mu'} r^{(\varrho\sigma)}_{\mu\nu} r^{(\varrho\sigma')}_{\mu'\nu'} = \begin{cases} b^{(\sigma)}_{\nu\nu'}, & \text{wenn } \sigma' = \sigma, \\ 0, & \text{wenn } \sigma' \gtrless \sigma, \end{cases}$$
$$\begin{pmatrix} \sigma, \sigma' = 1, 2, \ldots, n \\ \nu, \nu' = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix}$$

genügen, immer aus Substitutionen E und D zusammengesetzt werden kann, in der Form:

$$(42)\qquad S = E_1 D E_2.$$

Dabei wird nur bezüglich der Modulen $a^{(\varrho)}_{\mu\mu'}\begin{pmatrix} \varrho = 1, 2, \ldots, n \\ \mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix}$ der gegebenen n Thetafunctionen vorausgesetzt, dass zwischen den Modulen $a^{(i)}_{\mu\mu'}$ $(\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p)$ einer einzelnen, etwa der i^{ten} Thetafunction, ausser den Beziehungen $a^{(i)}_{\mu\mu'} = a^{(i)}_{\mu'\mu}$ $(\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p;\ \mu < \mu')$ keinerlei lineare Gleichungen von der Form $\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\mu'=1}^{p} k_{\mu\mu'} a^{(i)}_{\mu\mu'} = 0$ bestehen, bei denen die $k_{\mu\mu'}$ ganze Zahlen bezeichnen; diese Voraussetzung, welche sich zum Beweise des ausgesprochenen Satzes nothwendig erweist, steht durchaus im Einklange mit der in den vorliegenden Untersuchungen herrschenden Tendenz, Formeln aufzustellen, deren Gültigkeit nicht an besondere Specialisirungen der Thetamodulen geknüpft ist.

Wie bei anderweitigen ähnlichen Untersuchungen wird man den zu erbringenden Nachweis, dass sich jede Substitution S aus Substitutionen D und E in der Form (42) zusammensetzen lässt, führen, indem man zeigt, dass sich jede Substitution S mit Hülfe von Substitutionen E auf eine Substitution D reduciren lässt in der Gestalt:

$$(43)\qquad E_1^{-1} S E_2^{-1} = D.$$

Im Folgenden werden aber die Schlüsse noch etwas vereinfacht, wenn man entsprechend der mit (42) und (43) äquivalenten Gleichung:

$$(44)\qquad E_2 S^{-1} E_1 = D^{-1}$$

und unter Beachtung des gegen Ende des vorigen Artikels bemerkten Satzes, dass die inverse einer D-Substitution selbst wieder eine D-Substitution ist, die Möglichkeit der ebengenannten Reduction an der zu S inversen Substitution:

$$(S^{-1})\qquad n^{(\sigma)}_{\nu} = \sum_{\varrho=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{p} s^{(\varrho\sigma)}_{\mu\nu} m^{(\varrho)}_{\mu} \qquad \begin{pmatrix} \sigma = 1, 2, \ldots, n \\ \nu = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix}$$

nachweist, bei welcher $s^{(\varrho\sigma)}_{\mu\nu}$ die durch den Werth der Determinante der $(np)^2$ Coefficienten der Substitution S getheilte Adjuncte von $r^{(\varrho\sigma)}_{\mu\nu}$ in dieser Determinante bezeichnet. Bevor nun zu diesem Nachweise selbst geschritten werden kann, müssen zwei Eigenschaften der Sub-

stitution S^{-1} aufgedeckt werden, die bei diesem Beweise eine entscheidende Rolle spielen.

Um dieselben zu erhalten, leite man zunächst aus den Gleichungen (41) ein System einfacherer Relationen ab. Zu dem Ende multiplicire man, indem man unter τ irgend eine Zahl aus der Reihe $1, 2, \ldots, n$ und unter λ irgend eine Zahl aus der Reihe $1, 2, \ldots, p$ versteht, linke und rechte Seite der Gleichung (41) mit $s_{\lambda\nu'}^{(\tau\sigma')}$ und summire hierauf nach σ' von 1 bis n und nach ν' von 1 bis p. Man erhält dann, weil die Summe:

$$\sum_{\sigma'=1}^{n} \sum_{\nu'=1}^{p} r_{\mu'\nu'}^{(\varrho\sigma')} s_{\lambda\nu'}^{(\tau\sigma')}$$

nur dann einen von Null verschiedenen Werth und zwar den Werth 1 hat, wenn gleichzeitig $\mu' = \lambda$ und $\varrho = \tau$ ist, die Gleichungen:

$$\sum_{\mu=1}^{p} a_{\mu\lambda}^{(\tau)} r_{\mu\nu}^{(\tau\sigma)} = \sum_{\nu'=1}^{p} b_{\nu\nu'}^{(\sigma)} s_{\lambda\nu'}^{(\tau\sigma)}, \quad \begin{pmatrix} \sigma, \tau = 1, 2, \ldots, n \\ \lambda, \nu = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix} \tag{45}$$

aus denen jetzt weitere Schlüsse gezogen werden sollen.

Man nehme an, dass irgend eine der n^2 Determinanten:

$$\sum \pm s_{11}^{(\varrho\sigma)} s_{22}^{(\varrho\sigma)} \ldots s_{pp}^{(\varrho\sigma)}, \qquad (\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n)$$

etwa die Determinante:

$$\sum \pm s_{11}^{(ij)} s_{22}^{(ij)} \ldots s_{pp}^{(ij)}$$

den Werth Null besitze. Es existiren dann p ganze Zahlen k_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots, p)$, die nicht alle Null sind, derart, dass gleichzeitig die p Gleichungen:

$$\sum_{\lambda=1}^{p} k_\lambda s_{\lambda\nu'}^{(ij)} = 0 \qquad (\nu' = 1, 2, \ldots, p) \tag{46}$$

bestehen, und man erhält, wenn man in (45) $\tau = i$ und $\sigma = j$ setzt, hierauf linke und rechte Seite mit k_λ multiplicirt und nach λ von 1 bis p summirt, die Gleichungen:

$$\sum_{\lambda=1}^{p} \sum_{\mu=1}^{p} k_\lambda a_{\mu\lambda}^{(i)} r_{\mu\nu}^{(ij)} = 0. \tag{47}$$

Aus diesen Gleichungen folgt aber, da der Voraussetzung nach zwischen den Modulen $a_{\mu\lambda}^{(i)}$ $(\mu, \lambda = 1, 2, \ldots, p)$ keine linearen Relationen ausser $a_{\mu\lambda}^{(i)} = a_{\lambda\mu}^{(i)}$ bestehen sollen, dass die sämmtlichen Grössen:

$$k_\mu r_{\mu\nu}^{(ij)} = 0 \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p) \tag{48}$$

und ebenso die sämmtlichen Grössen:

$$k_\lambda r_{\mu\nu}^{(ij)} + k_\mu r_{\lambda\nu}^{(ij)} = 0 \qquad (\lambda, \mu, \nu = 1, 2, \ldots, p) \tag{49}$$

sein müssen, welche Gleichungen sofort, da nicht alle k_λ Null sind, das Verschwinden der sämmtlichen p^2 Grössen $r_{\mu\nu}^{(ij)}$ $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$ nach sich ziehen. Sind aber die p^2 Grössen $r_{\mu\nu}^{(ij)}$ $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$ sämmtlich Null, so folgt aus (45), nachdem man darin $\tau = i$ und $\sigma = j$ gesetzt hat:

$$\sum_{\nu'=1}^{p} b_{\nu\nu'}^{(j)} s_{\lambda\nu'}^{(ij)} = 0. \qquad (\lambda, \nu = 1, 2, \ldots, p) \tag{50}$$

Da nun die Determinante $\Sigma \pm b_{11}^{(j)} b_{22}^{(j)} \ldots b_{pp}^{(j)}$ als Determinante der Modulen einer Thetafunction einen von Null verschiedenen Werth besitzt, so folgt aus jenen p Gleichungen, welche aus (50) hervorgehen, wenn man für λ eine bestimmte der Zahlen $1, 2, \ldots, p$ setzt und sodann für ν der Reihe nach die Zahlen $1, 2, \ldots, p$ treten lässt, das Verschwinden der p Grössen $s_{\lambda\nu'}^{(ij)}$ $(\nu' = 1, 2, \ldots, p)$, und da dieser Schluss für $\lambda = 1, 2, \ldots, p$ gemacht werden kann, so ergiebt sich schliesslich als Folge der Gleichungen (50) das Verschwinden aller p^2 Grössen $s_{\mu\nu}^{(ij)}$ $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$. Man hat also endlich als erste Eigenschaft der Substitution S^{-1}: *Besitzt irgend eine Determinante* $\Sigma \pm s_{11}^{(ij)} s_{22}^{(ij)} \ldots s_{pp}^{(ij)}$ *den Werth Null, so verschwinden alle ihre* p^2 *Elemente* $s_{\mu\nu}^{(ij)}$ $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$.

Giebt man daher der Thatsache, dass die p^2 Grössen $s_{\mu\nu}^{(ij)}$ $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$ sämmtlich den Werth Null haben, dadurch Ausdruck, dass man sagt, das System der p^2 Grössen $s_{\mu\nu}^{(ij)}$ oder kürzer das System $s^{(ij)}$ sei Null, so lässt sich das soeben gefundene Resultat auch dahin umkehren, *dass ein System* $s^{(ij)}$, *das nicht Null ist, stets eine von Null verschiedene Determinante besitzt.*

Ein System $s^{(ij)}$, bei welchem alle Elemente ausserhalb der Hauptdiagonale den Werth Null haben, die Elemente der Hauptdiagonale aber den gleichen von Null verschiedenen Werth besitzen, soll fernerhin ein „reducirtes" System heissen, und $s^{(ij)}$ in diesem Falle zugleich den gemeinsamen Werth der Elemente der Hauptdiagonale bezeichnen. Ist dann ein System $s^{(ij)}$ ein reducirtes, so folgt aus (45), nachdem man darin $\tau = i$ und $\sigma = j$ gesetzt hat:

$$\sum_{\mu=1}^{p} a_{\mu\lambda}^{(i)} r_{\mu\nu}^{(ij)} = b_{\nu\lambda}^{(j)} s^{(ij)}. \qquad (\lambda, \nu = 1, 2, \ldots, p) \tag{51}$$

Hieraus ergiebt sich aber durch Vertauschung von λ und ν:

$$\sum_{\mu=1}^{p} a_{\mu\nu}^{(i)} r_{\mu\lambda}^{(ij)} = b_{\lambda\nu}^{(j)} s^{(ij)} \qquad (\lambda, \nu = 1, 2, \ldots, p) \tag{52}$$

und aus (51) und (52) wegen $b_{\lambda\nu}^{(j)} = b_{\nu\lambda}^{(j)}$ $(\lambda, \nu = 1, 2, \ldots, p)$:

$$\sum_{\mu=1}^{p} a_{\mu\lambda}^{(i)} r_{\mu\nu}^{(ij)} = \sum_{\mu=1}^{p} a_{\mu\nu}^{(i)} r_{\mu\lambda}^{(ij)}. \qquad (\lambda, \nu = 1, 2, \ldots, p) \tag{53}$$

Da nun der gemachten Voraussetzung zu Folge zwischen den Modulen $a_{\mu\nu}^{(i)}$ $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$ ausser den Gleichungen $a_{\mu\nu}^{(i)} = a_{\nu\mu}^{(i)}$ keine linearen Relationen bestehen sollen, so folgt aus den Gleichungen (53) sofort, dass:

$$r_{\nu\nu}^{(ij)} = r_{\lambda\lambda}^{(ij)}, \qquad r_{\lambda\nu}^{(ij)} = 0 \qquad \left(\lambda, \nu = 1, 2, \ldots, p;\ \lambda \lessgtr \nu\right) \tag{54}$$

ist, d. h. dass auch das System $r^{(ij)}$ ein reducirtes ist, und sodann endlich aus (51):

$$r^{(ij)} a_{\nu\lambda}^{(i)} = s^{(ij)} b_{\nu\lambda}^{(j)}. \qquad (\lambda, \nu = 1, 2, \ldots, p) \tag{55}$$

Man hat daher als zweite Eigenschaft der Substitution S^{-1}: *Ist irgend ein System $s^{(ij)}$ ein reducirtes, d. h. ist*

$$s_{\mu\nu}^{(ij)} = \begin{cases} s^{(ij)}, & \text{wenn } \mu = \nu, \\ 0, & \text{wenn } \mu \gtrless \nu, \end{cases} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p) \tag{56}$$

wo $s^{(ij)}$ von Null verschieden ist, so sind die Modulen $a_{\mu\nu}^{(i)}$ den Modulen $b_{\mu\nu}^{(j)}$ proportional, in der Art, dass:

$$b_{\mu\nu}^{(j)} = f^{(ij)} a_{\mu\nu}^{(i)} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p) \tag{57}$$

ist. Umgekehrt folgt, wenn die Gleichungen (57) erfüllt sind, aus den Gleichungen (45), nachdem man darin $\tau = i$ und $\sigma = j$ gesetzt hat:

$$\sum_{\mu=1}^{p} a_{\mu\lambda}^{(i)} r_{\mu\nu}^{(ij)} = \sum_{\nu'=1}^{p} f^{(ij)} a_{\nu\nu'}^{(i)} s_{\lambda\nu'}^{(ij)}, \quad (\lambda, \nu = 1, 2, ., ., p) \tag{58}$$

und diese Gleichungen ziehen, weil zwischen den Modulen $a_{\mu\nu}^{(i)}$ $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$ ausser $a_{\mu\nu}^{(i)} = a_{\nu\mu}^{(i)}$ keine linearen Relationen bestehen sollen, sofort für die Systeme $r^{(ij)}$ und $s^{(ij)}$ nach sich, dass sie reducirt oder Null sind. *Sind also die Modulen $a_{\mu\nu}^{(i)}$ den Modulen $b_{\mu\nu}^{(j)}$ proportional, so ist das System $s^{(ij)}$ entweder reducirt oder Null.*

Um nun die verlangte, durch die Gleichung (44) dargestellte Reduction der Substitution S^{-1} auszuführen, denke man sich deren Coefficienten $s_{\mu\nu}^{(\varrho\sigma)}\binom{\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n}{\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p}$ in ein quadratisches Schema angeordnet; dabei ist es aber für die folgende Untersuchung durchaus ausreichend und zweckmässig, immer ein System von p^2 Zahlen $s_{\mu\nu}^{(ij)}$ $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$ durch ein einziges Zeichen $s^{(ij)}$ zu ersetzen und dementsprechend als Repräsentanten der Coefficienten der Substitution S^{-1} das Schema:

$$S^{-1} = \begin{matrix} s^{(11)} & s^{(21)} & \ldots & s^{(n1)} \\ s^{(12)} & s^{(22)} & \ldots & s^{(n2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s^{(1n)} & s^{(2n)} & \ldots & s^{(nn)} \end{matrix}$$

von nur n Verticalreihen (V. R.) und n Horizontalreihen (H. R.) einzuführen. Nun ordne man, indem man beachtet, dass eine Umstellung der V. R. beziehlich der H. R. des angeschriebenen Schemas nur einer Vertauschung der Factoren in dem ursprünglichen beziehlich in den neuen Thetaproducten entspricht, die n V. R. und die n H. R. von S^{-1} folgendermassen.

Man suche unter den n V. R. von S^{-1} diejenige auf, in der am wenigsten Systeme $s^{(\varrho\sigma)}$ Null sind (giebt es dabei mehrere gleichberechtigte unter den n V. R., so nehme man, wie in solchen Fällen im Folgenden stets, eine beliebige darunter) und bringe sie an die erste Stelle, zugleich auch durch passende Vertauschung der H. R. die in ihr vorkommenden von Null verschiedenen Systeme, deren Anzahl n_1 sei, an die n_1 ersten Stellen, sodass also nach geschehener Anordnung die n_1 Systeme $s^{(11)}, s^{(12)}, \ldots, s^{(1,n_1)}$ von Null verschieden, die $n - n_1$ Systeme $s^{(1,n_1+1)}, s^{(1,n_1+2)}, \ldots, s^{(1,n)}$ aber Null sind. Nun betrachte man die n_1 ersten H. R., suche unter ihnen diejenige auf, in der am wenigsten Systeme $s^{(\varrho\sigma)}$ Null sind, setze sie durch Umstellung der H. R. an die erste Stelle und gleichzeitig durch passende Umstellung der V. R. (mit Ausnahme der ersten, die an ihrer Stelle bleibt) die in ihr vorkommenden von Null verschiedenen Systeme an die ersten Stellen. Beträgt deren Anzahl n_1', so sind nach geschehener Anordnung die Systeme $s^{(11)}, s^{(21)}, \ldots, s^{(n_1',1)}$ von Null verschieden, die Systeme $s^{(n_1'+1,1)}, s^{(n_1'+2,1)}, \ldots, s^{(n,1)}$ aber Null.

Nun bezeichne man für $\sigma = 1, 2, \ldots, n_1$ mit $\sigma_{\mu\nu}^{(1\sigma)}$ die durch den Werth der Determinante des Systems $s^{(1\sigma)}$ dividirte Adjuncte von $s_{\mu\nu}^{(1\sigma)}$ in dieser Determinante und bilde eine E-Substitution:

$$x_\mu^{(\varrho)} = \sum_{\nu=1}^{p} r_{\mu\nu}^{(\varrho)} y_\nu^{(\varrho)} \qquad \begin{pmatrix} \varrho = 1, 2, \ldots, n \\ \mu = 1, 2, \ldots p \end{pmatrix} \tag{59}$$

dadurch, dass man für $\varrho = 1, 2, \ldots, n_1$:

$$r_{\mu\nu}^{(\varrho)} = \sigma_{\mu\nu}^{(1\varrho)}, \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$$

für $\varrho = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n$ aber:

$$r_{\mu\nu}^{(\varrho)} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \mu = \nu, \\ 0, & \text{wenn } \mu \gtrless \nu, \end{cases} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$$

setzt. Die so gebildete E-Substitution soll E_2 heissen. Man bezeichne ebenso für $\varrho = 1, 2, \ldots, n_1'$ mit $\sigma_{\mu\nu}^{(\varrho 1)}$ die durch den Werth der

Determinante des Systems $s^{(\varrho 1)}$ dividirte Adjuncte von $s_{\mu\nu}^{(\varrho 1)}$ in dieser Determinante und bestimme eine weitere E-Substitution, E_1, dadurch, dass man in (59) für $\varrho = 2, 3, \ldots, n_1'$:

$$r_{\mu\nu}^{(\varrho)} = \sigma_{\mu\nu}^{(\varrho 1)}, \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$$

für $\varrho = 1$ und $\varrho = n_1' + 1, n_1' + 2, \ldots, n$ aber:

$$r_{\mu\nu}^{(\varrho)} = \begin{matrix} 1, \text{ wenn } \mu = \nu, \\ 0, \text{ wenn } \mu \gtrless \nu, \end{matrix} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$$

setzt. Setzt man dann diese Substitutionen E_2 und E_1 mit der Substitution S^{-1} zu einer Substitution T zusammen in der Form:

$$T = E_2 S^{-1} E_1, \tag{60}$$

so ist in der Substitution T, wenn deren Coefficienten mit:

$$t_{\mu\nu}^{(\varrho\sigma)} \qquad \begin{pmatrix} \varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n \\ \mu, \nu = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix}$$

bezeichnet werden:

für $\sigma = 1, 2, \ldots, n_1$:

$$t_{\mu\nu}^{(1\sigma)} = \begin{matrix} 1, \text{ wenn } \mu = \nu, \\ 0, \text{ wenn } \mu \gtrless \nu, \end{matrix}$$

für $\sigma = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n$:

$$t_{\mu\nu}^{(1\sigma)} = 0,$$

für $\varrho = 1, 2, \ldots, n_1'$: $\qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$

$$t_{\mu\nu}^{(\varrho 1)} = \begin{matrix} 1, \text{ wenn } \mu = \nu, \\ 0, \text{ wenn } \mu \gtrless \nu, \end{matrix}$$

für $\varrho = n_1' + 1, n_1' + 2, \ldots, n$:

$$t_{\mu\nu}^{(\varrho 1)} = 0.$$

Nun sind aber nach Früherem, sobald ein System $t^{(1\sigma)}$ reducirt ist, die Modulen $a_{\mu\mu'}^{(1)}$ den Modulen $b_{\mu\mu'}^{(\sigma)}$ $(\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p)$ proportional, und ebenso, wenn ein System $t^{(\varrho 1)}$ reducirt ist, die Modulen $a_{\mu\mu'}^{(\varrho)}$ den Modulen $b_{\mu\mu'}^{(1)}$ proportional, und da bei der Substitution T ersteres für $\sigma = 1, 2, \ldots n_1$, letzteres für $\varrho = 1, 2, \ldots, n_1'$ gilt, so folgt endlich, dass bei ihr für jedes ϱ von 1 bis n_1' und jedes σ von 1 bis n_1 die Modulen $a_{\mu\mu'}^{(\varrho)}$ den Modulen $b_{\mu\mu'}^{(\sigma)}$ proportional sind, was wiederum nach Früherem nach sich zieht, dass die sämmtlichen $n_1 n_1'$ Systeme $t^{(\varrho\sigma)}$ $(\varrho = 1, 2, \ldots, n_1', \sigma = 1, 2, \ldots, n_1)$ reducirt oder Null sind*).

*) Es kann nicht stören, dass hier die Modulen $a_{\mu\mu'}^{(\varrho)}$ und $b_{\mu\mu'}^{(\sigma)}$ in anderer Bedeutung eingeführt werden als früher; hier ist angenommen, dass durch die

Ist nun $n_1 = n_1' = n$, so ist bereits die Substitution T eine D-Substitution, da bei ihr alle Coefficienten $t_{\mu\nu}^{(\varrho\sigma)}$, bei denen $\mu \gtrless \nu$ ist, verschwinden, und die Gleichung (60) stellt die verlangte Reduction der Substitution S^{-1} dar. Ist dagegen n_1 oder n_1', oder sind beide Zahlen kleiner als n, so hat man die Reduction in der jetzt zu erörternden Weise fortzusetzen.

Man nehme zunächst an, es seien n_1 und n_2 beide kleiner als n. Die erste V. R. von T hat an den $n - n_1$ letzten Stellen lauter Systeme, die Null sind; man suche unter der $2^{\text{ten}}, 3^{\text{ten}}, \ldots, n_1'^{\text{ten}}$ V. R. jene auf, bei welcher von den $n - n_1$ letzten Systemen die wenigsten Null sind, und bringe dieselbe durch Umstellung der V. R. an die $n_1'^{\text{te}}$ Stelle, gleichzeitig aber durch passende Umstellung der $n - n_1$ letzten H. R. diese von Null verschiedenen Systeme, deren Anzahl $n_2 - n_1$ betrage, an die $n_1 + 1^{\text{te}}, n_1 + 2^{\text{te}}, \ldots, n_2^{\text{te}}$ Stelle. Hierauf suche man unter der $n_1 + 1^{\text{ten}}, n_1 + 2^{\text{ten}}, \ldots n_2^{\text{ten}}$ H. R. diejenige auf, bei der unter den $n - n_1'$ letzten Systemen die wenigsten Null sind, und bringe sie durch Umstellung der H. R. an die $n_1 + 1^{\text{te}}$ Stelle, gleichzeitig aber durch passende Umstellung der $n - n_1'$ letzten V. R. diese von Null verschiedenen Systeme, deren Anzahl $n_2' - n_1'$ betrage, an die $n_1' + 1^{\text{te}}, n_1' + 2^{\text{te}}, \ldots, n_2'^{\text{te}}$ Stelle. Es sind dann nach geschehener Anordnung bei der Substitution T in der $n_1'^{\text{ten}}$ V. R. die Systeme $t^{(n_1', n_1+1)}, t^{(n_1', n_1+2)}, \ldots, t^{(n_1', n_2)}$ von Null verschieden, die Systeme $t^{(n_1', n_2+1)}, t^{(n_1', n_2+2)}, \ldots, t^{(n_1', n)}$ Null, und in der $n_1 + 1^{\text{ten}}$ H. R. die Systeme $t^{(n_1', n_1+1)}, t^{(n_1'+1, n_1+1)}, \ldots, t^{(n_2', n_1+1)}$ von Null verschieden, die Systeme $t^{(n_2'+1, n_1+1)}, t^{(n_2'+2, n_1+1)}, \ldots, t^{(n, n_1+1)}$ Null. Nun bestimme man aus (59) eine E-Substitution E_2', indem man:

für $\varrho = 1, 2, \ldots, n_1$:

$$r_{\mu\nu}^{(\varrho)} = \begin{matrix} 1, \text{ wenn } \mu = \nu, \\ 0, \text{ wenn } \mu \gtrless \nu, \end{matrix}$$

für $\varrho = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n_2$:

$$r_{\mu\nu}^{(\varrho)} = r_{\mu\nu}^{(n_1', \varrho)}, \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$$

für $\varrho = n_2 + 1, n_2 + 2, \ldots, n$:

$$r_{\mu\nu}^{(\varrho)} = \begin{matrix} 1, \text{ wenn } \mu = \nu, \\ 0, \text{ wenn } \mu \gtrless \nu, \end{matrix}$$

setzt, unter $r_{\mu\nu}^{(n_1', \varrho)}$ die durch die Determinante des Systems $t^{(n_1', \varrho)}$ getheilte Adjuncte von $t_{\mu\nu}^{(n_1', \varrho)}$ in dieser Determinante verstanden, und eine weitere E-Substitution E_1', indem man in (59):

Substitution T ein Thetaproduct mit den Modulen $a_{\mu\mu'}^{(\varrho)}$ in ein Aggregat von Thetaproducten mit den Modulen $b_{\mu\mu'}^{(\sigma)}$ übergeführt werde.

für $\varrho = 1, 2, \ldots, n_1'$:

$$\tau_{\mu\nu}^{(\varrho)} = \begin{matrix} 1, \text{ wenn } \mu = \nu, \\ 0, \text{ wenn } \mu \gtrless \nu, \end{matrix}$$

für $\varrho = n_1' + 1, n_1' + 2, \ldots, n_2'$:

$$\tau_{\mu\nu}^{(\varrho)} = \tau_{\mu\nu}^{(\varrho, n_1+1)}, \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$$

für $\varrho = n_2' + 1, n_2' + 2, \ldots, n$:

$$\tau_{\mu\nu}^{(\varrho)} = \begin{matrix} 1, \text{ wenn } \mu = \nu, \\ 0, \text{ wenn } \mu \gtrless \nu, \end{matrix}$$

setzt, unter $\tau_{\mu\nu}^{(\varrho, n_1+1)}$ die durch die Determinante des Systems $t^{(\varrho, n_1+1)}$ getheilte Adjuncte von $t_{\mu\nu}^{(\varrho, n_1+1)}$ in dieser Determinante verstanden. Setzt man dann diese Substitutionen E_2', E_1' mit der Substitution T zu einer Substitution U zusammen in der Form:

$$U = E_2' T E_1', \tag{61}$$

so sind in der Substitution U die Systeme $u^{(n_1', n_1+1)}, u^{(n_1', n_1+2)}, \ldots, u^{(n_1', n_2)}$ und ebenso die Systeme $u^{(n_1'+1, n_1+1)}, u^{(n_1'+2, n_1+1)}, \ldots, u^{(n_2', n_1+1)}$ reducirt, und man schliesst daraus nicht nur, wie früher, dass für jedes ϱ von n_1' bis n_2' und für jedes σ von $n_1 + 1$ bis n_2 die Modulen $a_{\mu\mu'}^{(\varrho)}$ den Modulen $b_{\mu\mu'}^{(\sigma)}$ proportional und daher alle Systeme $u^{(\varrho\sigma)}$, welche diesen Werthen von ϱ und σ entsprechen, reducirt oder Null sind, sondern in Verbindung mit dem früher erhaltenen Resultate sofort weiter, dass die Proportionalität der Modulen $a_{\mu\mu'}^{(\varrho)}$ mit den Modulen $b_{\mu\mu'}^{(\sigma)}$ für jedes ϱ von 1 bis n_2' und jedes σ von 1 bis n_2 besteht, und dass daher alle $n_2' n_2$ den ersten n_2 H. R. und ersten n_2' V. R. gemeinsamen Systeme $u^{(\varrho\sigma)}$ ($\varrho = 1, 2, \ldots, n_2'$; $\sigma = 1, 2, \ldots, n_2$) reducirt oder Null sind.

Das angegebene Verfahren ist auch anwendbar, wenn $n_1' = n$ ist, in welchem Falle sich die Substitution E_1' auf die identische reducirt; es versagt aber, wenn $n_1 = n$ ist, und ferner, wenn die n_1' ersten V. R. von T an ihren $n - n_1$ letzten Stellen lauter Systeme haben, die Null sind. In beiden Fällen kann, wie man leicht sieht, die Reduction von T in der Weise vorgenommen werden, dass man das im Vorigen angegebene Reductionsverfahren unter durchgängiger Vertauschung der H. R. mit den V. R. nachbildet.

Ist nun für die Substitution U $n_2 = n_2' = n$, so ist sie eine D-Substitution, und es wird durch die aus (60) und (61) folgende Gleichung:

$$U = E_2' E_2 S^{-1} E_1 E_1' \tag{62}$$

die verlangte Reduction der Substitution S^{-1} geliefert, wenn man noch die beiden E-Substitutionen E_2' und E_2 und ebenso die beiden E-Substitutionen E_1 und E_1' zu je einer E-Substitution zusammensetzt. Sind

dagegen n_2 und n_2' oder eine dieser beiden Zahlen kleiner als n, so hat man das Reductionsverfahren in der angegebenen Weise fortzusetzen, bis man schliesslich zu einer D-Substitution gekommen ist.

Man hat so den im Vorigen ausgesprochenen Satz bewiesen, dass man jede beliebige Substitution S, durch welche ein Product von n Thetafunctionen in ein Aggregat solcher Producte übergeführt wird, stets aus Substitutionen D und E in der Form (42) zusammensetzen kann.

Dieses Resultat lässt sich ausführlicher folgendermassen aussprechen.

Wenn ein Thetaproduct (1) mit den Modulen $a_{\mu\mu'}^{(\varrho)}\begin{pmatrix}\varrho=1,2,\ldots,n\\ \mu,\mu'=1,2,\ldots,p\end{pmatrix}$ durch irgend eine lineare Substitution S mit rationalen Coefficienten in ein Aggregat von Thetaproducten mit den Modulen $b_{\nu\nu'}^{(\sigma)}\begin{pmatrix}\sigma=1,2,\ldots,n\\ \nu,\nu'=1,2,\ldots,p\end{pmatrix}$ übergeführt werden kann, wozu die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen in den Gleichungen (2) und (3) angegeben sind, so kann man sowohl das gegebene Thetaproduct mit den Modulen $a_{\mu\mu'}^{(\varrho)}$ als auch das Thetaproduct mit den Modulen $b_{\nu\nu'}^{(\sigma)}$ durch je eine Substitution E, d. h. durch blosse Umformung jeder einzelnen seiner Thetafunctionen vermittelst einer linearen Substitution, in ein Aggregat von Thetaproducten überführen, deren Modulen ganze Vielfache $p^{(\varrho)}a_{\mu\mu'}$ bez. $q^{(\sigma)}a_{\nu\nu'}$ der Modulen einer einzigen Thetafunction sind, so dass nunmehr jedes Thetaproduct mit den Modulen $p^{(\varrho)}a_{\mu\mu'}$ durch eine Substitution von der Art D in Thetaproducte mit den Modulen $q^{(\sigma)}a_{\nu\nu'}$ übergeht.

Aus der Möglichkeit der Zusammensetzung der allgemeinen Substitution S aus Substitutionen D und E folgt nun weiter, dass man ebenso jene Thetaformel, welche die durch die allgemeine Substitution S bewirkte Ueberführung eines Thetaproductes in ein Aggregat neuer Thetaproducte zum Ausdruck bringt, aus den in diesem Abschnitte aufgestellten, den Substitutionen E und D entsprechenden Formeln (I), (II) durch Zusammensetzung erhalten kann, dass man sich also hinsichtlich der Aufstellung von Thetaformeln auf diese beiden Formeln beschränken darf.

Vierter Abschnitt.

Ueber die zu den Substitutionen E und D gehörigen Thetaformeln. Specielle Fälle derselben. Historisches.

1.

Ueber die zu den Substitutionen E gehörigen Thetaformeln.

Die der allgemeinen Substitution E entsprechende Thetaformel (I) ist zuerst von Herrn Prym und mir*) angegeben worden; bis dahin waren nur ganz specielle Fälle derselben bekannt, welche alle der Annahme entsprechen, dass bei der zu Grunde liegenden Substitution (7) sämmtliche nicht in der Hauptdiagonale stehenden Coefficienten $e_{\mu\nu}$ den Werth Null haben. Ist aber für jedes μ und ν von 1 bis p $e_{\mu\nu} = 0$, sobald $\mu \gtrless \nu$, dagegen $e_{11} = e_{22} = \cdots = e_{pp} = q$, wo q eine positive ganze Zahl bezeichnet, die zu r relativ prim ist, so nimmt die Formel (I) die einfache Gestalt**):

$$(1) \qquad r^p\, \vartheta(\!(u)\!)_a = \sum_{\varrho_1,\cdots,\varrho_p}^{0,1,\cdots,q-1} \sum_{\sigma_1,\cdots,\sigma_p}^{0,1,\cdots,r-1} \vartheta \begin{bmatrix} \frac{r\varrho}{q} \\ \frac{q\sigma}{r} \end{bmatrix} (\!(v)\!)_b$$

an, bei der die Grössen v, b jetzt mit den Grössen u, a durch die Gleichungen:

$$(2) \qquad v_\nu = \frac{q}{r} u_\nu, \quad b_{\nu\nu'} = \frac{q^2}{r^2} a_{\nu\nu'} \qquad (\nu, \nu' = 1, 2, \ldots, p)$$

verknüpft sind, und aus der weiter für $r = 1$ die Formel***):

$$(3) \qquad \vartheta(\!(u)\!)_a = \sum_{\varrho_1,\cdots,\varrho_p}^{0,1,\cdots,q-1} \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\varrho}{q} \\ 0 \end{bmatrix} (\!(qu)\!)_{q^2 a},$$

für $q = 1$ dagegen die Formel†):

$$(4) \qquad r^p\, \vartheta(\!(u)\!)_a = \sum_{\sigma_1,\cdots,\sigma_p}^{0,1,\cdots,r-1} \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sigma}{r} \end{bmatrix} \left(\!\!\left(\frac{u}{r}\right)\!\!\right)_{\frac{a}{r^2}}$$

hervorgeht Dabei mag noch bemerkt werden, dass die Formeln (3) und (4) nicht wesentlich verschieden von einander sind, insofern als jede von ihnen als die Umkehrung der anderen angesehen werden kann. Lässt man nämlich, indem man unter $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ ganze Zahlen

*) Krazer und Prym, Neue Grundlagen etc., pag. 72, Formel (I_0).
**) a. a. O. pag. 77, Formel (I_2).
***) a. a. O. pag. 77, Formel (I_3).
†) a. a. O. pag. 77, Formel $(\bar{I}_3)$.

versteht, in der Formel (3) für $\mu = 1, 2, \ldots, p$ u_μ in $u_\mu + \frac{1}{q}\sigma_\mu \pi i$ übergehen, so entsteht unter Anwendung bekannter Hülfsformeln*) die allgemeinere Formel:

$$(5) \qquad \vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sigma}{q} \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a = \sum_{\varrho_1,\cdots,\varrho_p}^{0,1,\ldots,q-1} \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\varrho}{q} \\ 0 \end{bmatrix}(\!(qu)\!)_{q^2 a}\, e^{\frac{2\pi i}{q}\sum_{\mu=1}^{p}\varrho_\mu \sigma} .$$

Diese Formel enthält q^p verschiedene specielle, die man erhält, wenn man jeder der p Grössen $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ unabhängig von den anderen die Werthe $0, 1, \ldots, q-1$ ertheilt. Addirt man diese q^p Gleichungen zu einander, d. h. summirt man in (5) über jedes σ von 0 bis $q-1$, so entsteht, da die Summe:

$$\sum_{\sigma_1,\cdots,\sigma_p}^{0,1,\ldots,q-1} e^{\frac{2\pi i}{q}\sum_{\mu=1}^{p}\varrho_\mu \sigma_\mu}$$

nur dann einen von Null verschiedenen Werth und zwar den Werth q^p besitzt, wenn $\varrho_1 = \varrho_2 = \cdots = \varrho_p = 0$ ist, eine Formel, die sich von der Formel (4) ersichtlich nur durch die Bezeichnung unterscheidet. In ähnlicher Weise kann man von der Formel (4) zu der Formel (3) zurückkehren.

Die Formeln (3) und (4) sind für den Fall $p = 1$ längst bekannt. Schon Jacobi**) hat bemerkt, dass die $\vartheta(u)_a$ darstellende Reihe, wenn man in ihr die geraden Glieder von den ungeraden trennt, in zwei Reihen zerfällt, von denen jede für sich eine Thetafunction mit dem Argumente $2u$ und dem Modul $4a$ darstellt, und ist so zu der Formel (3) für $p = 1$ und $q = 2$ gelangt. Schröter***) hat diese Zerspaltung einer Thetareihe in mehrere durch Zusammenfassung derjenigen Glieder, bei denen die Summationsbuchstaben einander nach dem Modul q congruent sind, auf den Fall eines beliebigen q ausgedehnt und so die Formel (3) für $p = 1$ und beliebiges q erhalten, während die Formel (4) zuerst von Herrn Gordan†) angegeben wurde. Die Formeln (3) und (4) sind für den Fall $p = 1$ genau jene Umformungen der Thetareihe, welche am Ende des ersten Abschnittes für eine beliebige einfach unendliche Reihe angeschrieben sind.

Nachdem die Formeln (3) und (4) für den Fall $p = 1$ gefunden

*) a. a. O. pag. 7, Formeln (A) und (D).

**) Jacobi, Theorie der elliptischen Functionen aus den Eigenschaften der Thetareihen abgeleitet. Ges. Werke Bd. 1, pag. 515.

***) Schröter, De aequationibus modularibus. Inaug. Diss. Königsberg 1854, pag. 9.

†) Gordan, Beziehungen zwischen Thetaproducten. J. für Math. Bd. 66 (1866), pag. 191.

waren, war es leicht zu ersehen, dass solche Formeln auch für Thetafunctionen mehrerer Veränderlichen bestehen; sie wurden zuerst (unter Beschränkung auf den Fall $p = 2$ und $q = 2$) von Herrn Königsberger*) angegeben, doch hatte schon vorher Herr Thomae**) die Formel:

$$(6) \qquad \vartheta(\!(u)\!)_a = \sum_{\varrho_1=0}^{q_1-1} \cdots \sum_{\varrho_p=0}^{q_p-1} \vartheta\begin{bmatrix} \varrho \\ q \\ 0 \end{bmatrix} (\!(v)\!)_b ,$$

bei der

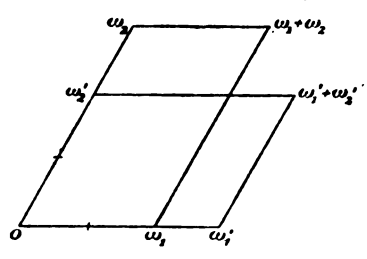
$$(7) \qquad v_\nu = q_\nu u_\nu , \quad b_{\nu\nu'} = q_\nu q_{\nu'} a_{\nu\nu'} \qquad (\nu, \nu' = 1, 2, \ldots, p)$$

ist, aufgestellt; eine Formel, welche allgemeiner als die Formel (3) ist, in die sie für $q_1 = q_2 = \cdots = q_p = q$ übergeht, und welche aus der Formel (I) erhalten wird, wenn man darin $r = 1$ und:

$$e_{\mu\nu} = \begin{cases} q_\nu, & \text{wenn } \mu = \nu, \\ 0, & \text{wenn } \mu \gtrless \nu, \end{cases} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$$

setzt.

Was endlich den Charakter der Formel (I) angeht, so liegt derselben, wie Herr Prym und ich***) gezeigt haben, eine lineare Transformation der Perioden mit gebrochenen Transformationszahlen zu Grunde, also eine solche, bei der das neue Periodengitter Periodenparallelotope desselben Inhalts, aber nicht die nämlichen Gitterpunkte aufweist, wie das ursprüngliche. Die Formel (1) entspricht z. B. im Falle $p = 1$ der Periodentransformation:



$$\omega_1 = \frac{q}{r}\,\omega_1', \qquad \omega_2 = \frac{r}{q}\,\omega_2',$$

für welche unter der Annahme $q = 2$, $r = 3$ die Periodenparallelogramme durch nebenstehende Figur dargestellt werden.

2.

Ueber die zu den Substitutionen D gehörigen Thetaformeln.

Die der allgemeinen Substitution D entsprechende Thetaformel (II) ist gleichfalls von Herrn Prym und mir†) aufgestellt worden. Die

*) Königsberger, Ueber die Transformation der Abel'schen Functionen erster Ordnung. J. für Math., Bd. 64 (1865), pag. 33.

**) Thomae, Die allgemeine Transformation der Θ-Functionen mit beliebig vielen Variabeln. Inaug.-Diss. Göttingen 1864, pag. 5.

***) Krazer und Prym, Neue Grundlagen etc. pag. 73 u. f.

†) Krazer und Prym, Neue Grundlagen etc., pag. 20, Formel (Θ).

zuerst bekannt gewordenen speciellen Fälle der Formel bezogen sich ausschliesslich auf den Fall $n=2$, für welchen Schröter*) die bekannte, der Substitution:

$$(8)\qquad \begin{aligned} m_\mu^{(1)} &= \quad \beta n_\mu^{(1)} + n_\mu^{(2)} \\ m_\mu^{(2)} &= -\alpha n_\mu^{(1)} + n_\mu^{(2)} \end{aligned} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

entsprechende Formel:

$$(9)\qquad \vartheta\langle\!\langle u^{(1)}\rangle\!\rangle_{a^{(1)}}\vartheta\langle\!\langle u^{(2)}\rangle\!\rangle_{a^{(2)}} = \sum_{s_1,\ldots,s_p}^{0,1,\ldots,\alpha+\beta-1} \vartheta\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \overline{\alpha+\beta} \\ 0 \end{bmatrix}\langle\!\langle v^{(1)}\rangle\!\rangle_{b^{(1)}}\vartheta\begin{bmatrix} \alpha\varepsilon \\ \overline{\alpha+\beta} \\ 0 \end{bmatrix}\langle\!\langle v^{(2)}\rangle\!\rangle_{b^{(2)}},$$

bei der:

$$(10)\qquad \begin{aligned} a_{\mu\mu'}^{(1)} &= \alpha a_{\mu\mu'}, \quad & b_{\mu\mu'}^{(1)} &= \alpha\beta(\alpha+\beta)a_{\mu\mu'} \\ a_{\mu\mu'}^{(2)} &= \beta a_{\mu\mu'}, \quad & b_{\mu\mu'}^{(2)} &= \quad (\alpha+\beta)a_{\mu\mu'} \end{aligned} \qquad (\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p)$$

ist, während die Variablen v mit den Variablen u durch die Gleichungen:

$$(11)\qquad \begin{aligned} v_\mu^{(1)} &= \beta u_\mu^{(1)} - \alpha u_\mu^{(2)} \\ v_\mu^{(2)} &= \quad u_\mu^{(1)} + \quad u_\mu^{(2)} \end{aligned} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

zusammenhängen, für $p=1$ angegeben hat**). Später hat Schröter***) die Formel (9) durch die allgemeinere, der Substitution:

$$(12)\qquad \begin{aligned} m_\mu^{(1)} &= \quad trn_\mu^{(1)} + sn_\mu^{(2)} \\ m_\mu^{(2)} &= -spn_\mu^{(1)} + tn_\mu^{(2)} \end{aligned} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

und Hoppe†) durch die noch allgemeinere, der Substitution:

$$(13)\qquad \begin{aligned} m_\mu^{(1)} &= fhcn_\mu^{(1)} - gedn_\mu^{(2)} \\ m_\mu^{(2)} &= ghan_\mu^{(1)} + febn_\mu^{(2)} \end{aligned} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

entsprechende ersetzt.

---

*) Schröter, De aequationibus modularibus. Inaug.-Diss. Königsberg 1854, pag. 7, Formel (1).

**) Für $p>1$ finden sich solche Formeln zuerst bei Königsberger, Ueber die Transformation der Abel'schen Functionen erster Ordnung. J. für Math. Bd. 64 (1865), pag. 24.

***) Schröter, Ueber die Entwicklung der Potenzen der elliptischen Transcendenten ϑ und die Theilung dieser Functionen. Hab.-Schrift, Breslau 1855, pag. 6, Formel 5.

†) Hoppe, Verallgemeinerung einer Relation der Jacobi'schen Functionen. Archiv f. Math. u. Phys. Th. 70 (1884), pag. 403, Formel (9). Die von Herrn Huebner, Ueber die Umformung unendlicher Reihen und Producte mit Beziehung auf die Theorie der elliptischen Functionen (Progr. Königsberg 1891) angegebenen Formeln (I)—(VI) pag. 37 u. f. entstehen aus solchen Formeln in Verbindung mit Formeln (4).

Geht man nun auf den Fall eines beliebigen n über, so erhält man unter der Annahme $r = 1$ zu der Substitution:

$$m_\mu^{(\varrho)} = \sum_{\sigma=1}^{n} d^{(\varrho\sigma)} n_\mu^{(\sigma)}, \qquad \begin{pmatrix} \varrho = 1, 2, \ldots, n \\ \mu = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix} \tag{14}$$

bei welcher die ganzen Zahlen $d^{(\varrho\sigma)}$ den Gleichungen:

$$\sum_{\varrho=1}^{n} p^{(\varrho)} d^{(\varrho\sigma)} d^{(\varrho\sigma')} = \begin{cases} q^{(\sigma)}, & \text{wenn } \sigma' = \sigma, \\ 0, & \text{wenn } \sigma' \gtrless \sigma, \end{cases} \quad (\sigma, \sigma' = 1, 2, \ldots, n) \tag{15}$$

genügen, die zuerst von Herrn Krause*) mitgetheilte, und von ihm „Additionstheorem zwischen Thetafunctionen mit verschiedenen Moduln" genannte Formel:

$$\begin{aligned} &\nabla^{(n-1)p}\, \vartheta\big(\!\big(u^{(1)}\big)\!\big)_{a^{(1)}} \ldots \vartheta\big(\!\big(u^{(n)}\big)\!\big)_{a^{(n)}} \\ &= \sum_{[\alpha]}^{0,1,\ldots,\nabla-1} \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\bar{\alpha}^{(1)}}{\Delta} \\ 0 \end{bmatrix}\big(\!\big(v^{(1)}\big)\!\big)_{b^{(1)}} \ldots \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\bar{\alpha}^{(n)}}{\Delta} \\ 0 \end{bmatrix}\big(\!\big(v^{(n)}\big)\!\big)_{b^{(n)}}; \end{aligned} \tag{16}$$

dabei ist:

$$a_{\mu\mu'}^{(\varrho)} = p^{(\varrho)} a_{\mu\mu'}, \quad b_{\mu\mu'}^{(\sigma)} = q^{(\sigma)} a_{\mu\mu'}, \qquad \begin{pmatrix} \varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n \\ \mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix} \tag{17}$$

es ist ferner:

$$v_\mu^{(\sigma)} = \sum_{\varrho=1}^{n} d^{(\varrho\sigma)} u_\mu^{(\varrho)}, \qquad \begin{pmatrix} \sigma = 1, 2, \ldots, n \\ \mu = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix} \tag{18}$$

oder umgekehrt:

$$u_\mu^{(\varrho)} = \frac{1}{\Delta} \sum_{\sigma=1}^{n} \delta^{(\varrho\sigma)} v_\mu^{(\sigma)}; \qquad \begin{pmatrix} \varrho = 1, 2, \ldots, n \\ \mu = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix} \tag{19}$$

es ist weiter zur Abkürzung gesetzt:

$$\bar{\bar{\alpha}}_\mu^{(\sigma)} = \sum_{\varrho=1}^{n} \delta^{(\varrho\sigma)} \alpha_\mu^{(\varrho)}; \qquad \begin{pmatrix} \sigma = 1, 2, \ldots, n \\ \mu = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix} \tag{20}$$

es bezeichnet Δ den Werth, ∇ den absoluten Werth der Determinante $\Sigma \pm d^{(11)} d^{(22)} \ldots d^{(nn)}$ und $\delta^{(\varrho\sigma)}$ die Adjuncte von $d^{(\varrho\sigma)}$ in dieser Determinante; es ist endlich die auf der rechten Seite von (16) angedeutete Summation in der Weise auszuführen, dass für $\begin{matrix} \varrho = 1, 2, \ldots, n \\ \mu = 1, 2, \ldots, p \end{matrix}$ nach

*) Krause, Ueber Fourier'sche Entwicklungen im Gebiete der Thetafunctionen zweier Veränderlichen. Math. Ann. Bd. 27 (1886), pag. 424, Formel (11). Etwas früher wurde die Formel (16) für den Fall einfach unendlicher Thetareihen und unter der speciellen Annahme $p^{(1)} = p^{(2)} = \cdots = p^{(n)} = 1$ von Herrn Krause in seiner Abhandlung: Zur Transformation der elliptischen Functionen. Leipz. Ber. 1886, pag. 39 mitgetheilt.

jedem $\alpha_\mu^{(\varrho)}$ von 0 bis $\nabla-1$ zu summiren ist. Die dabei als Summanden auftretenden ∇^{np} Thetaproducte können nach dem in Art. 10 des zweiten Abschnitts Bewiesenen in $\frac{\nabla^{np}}{\nabla^{(n-1)p}} = \nabla^p$ Gruppen geordnet werden, indem man zu einer Gruppe jedesmal diejenigen Thetaproducte, immer $\nabla^{(n-1)p}$ an der Zahl, zusammenfasst, für welche sich die Werthe der np Grössen $\overline{\overline{\alpha}}_\mu^{(\sigma)}$ $\begin{pmatrix}\sigma = 1, 2, \ldots, n\\ \mu = 1, 2, \ldots, p\end{pmatrix}$ nur um ganze Vielfache von Δ ändern, wenn man von einem dieser $\nabla^{(n-1)p}$ Thetaproducte zu einem andern derselben übergeht. Die $\nabla^{(n-1)p}$ in einer Gruppe vorkommenden Thetaproducte besitzen dann denselben Werth, und man kann daher in obiger Summe jede solche Gruppe von Summanden durch das $\nabla^{(n-1)p}$-fache eines beliebigen unter ihnen ersetzen. Führt man diese Vereinigung für jede der ∇^p Gruppen aus, so geht die rechte Seite der Gleichung (16) in das $\nabla^{(n-1)p}$-fache einer Summe von ∇^p wesentlich verschiedenen Thetaproducten über. Man wird endlich noch bemerken, dass in Folge der aus den Gleichungen sich ergebenden Beziehungen:

$$p^{(\varrho)} d^{(\varrho\sigma)} = \frac{1}{\Delta} q^{(\sigma)} \delta^{(\varrho\sigma)} \qquad (\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n) \tag{21}$$

die Grössen u auch in der Gestalt:

$$u_\mu^{(\varrho)} = p^{(\varrho)} \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{d^{(\varrho\sigma)}}{q^{(\sigma)}} v_\mu^{(\sigma)} \qquad \begin{pmatrix}\varrho = 1, 2, \ldots, n\\ \mu = 1, 2, \ldots, p\end{pmatrix} \tag{22}$$

und die Grössen $\overline{\overline{\alpha}}$ auch in der Gestalt:

$$\overline{\overline{\alpha}}_\mu^{(\sigma)} = \frac{\Delta}{q^{(\sigma)}} \sum_{\varrho=1}^{n} p^{(\varrho)} d^{(\varrho\sigma)} \alpha_\mu^{(\varrho)} \qquad \begin{pmatrix}\sigma = 1, 2, \ldots, n\\ \mu = 1, 2, \ldots, p\end{pmatrix} \tag{23}$$

dargestellt werden können, und endlich sich für das Quadrat der Determinante Δ der Werth:

$$\Delta^2 = \frac{q^{(1)} q^{(2)} \ldots q^{(n)}}{p^{(1)} p^{(2)} \ldots p^{(n)}} \tag{24}$$

ergiebt.

Lässt man in der Formel (16) für $\begin{matrix}\sigma = 1, 2, \ldots, n\\ \mu = 1, 2, \ldots, p\end{matrix}$ $v_\mu^{(\sigma)}$ in $v_\mu^{(\sigma)} + \varkappa_\mu^{(\sigma)} \pi i$ übergehen, indem man unter den $\varkappa$ ganze Zahlen versteht, und bezeichnet mit $\hat{\hat{\varkappa}}_\mu^{(\varrho)}$ den Ausdruck:

$$\hat{\hat{\varkappa}}_\mu^{(\varrho)} = \sum_{\sigma=1}^{n} \delta^{(\varrho\sigma)} \varkappa_\mu^{(\sigma)} = \Delta p^{(\varrho)} \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{d^{(\varrho\sigma)}}{q^{(\sigma)}} \varkappa_\mu^{(\sigma)}, \qquad \begin{pmatrix}\varrho = 1, 2, \ldots, n\\ \mu = 1, 2, \ldots, p\end{pmatrix} \tag{25}$$

so erhält man unter Anwendung der bekannten Hülfsformeln die allgemeinere Formel:

$$(26)\quad \vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ \overset{\wedge}{\varkappa}^{(1)} \\ \hline \Delta \end{bmatrix}\left(\!\!\left(u^{(1)}\right)\!\!\right)_{a^{(1)}} \cdots \vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ \overset{\wedge}{\varkappa}^{(n)} \\ \hline \Delta \end{bmatrix}\left(\!\!\left(u^{(n)}\right)\!\!\right)_{a^{(n)}}$$
$$= \sum_{[\alpha]}^{0,1,\cdots,\nabla-1} \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\overline{\alpha}^{(1)}}{\Delta} \\ 0 \end{bmatrix}\left(\!\!\left(v^{(1)}\right)\!\!\right)_{b^{(1)}} \cdots \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\overline{\alpha}^{(n)}}{\Delta} \\ 0 \end{bmatrix}\left(\!\!\left(v^{(n)}\right)\!\!\right)_{b^{(n)}} e^{\frac{2\pi i}{\Delta}\sum_{\sigma=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{p}\overline{\alpha}_{\mu}^{(\sigma)}\varkappa_{\mu}^{(\sigma)}}$$

und aus dieser, indem man über jedes $\varkappa$ von 0 bis $\nabla - 1$ summirt, die Formel:

$$\nabla^p\,\vartheta\left(\!\!\left(v^{(1)}\right)\!\!\right)_{b^{(1)}} \cdots \vartheta\left(\!\!\left(v^{(n)}\right)\!\!\right)_{b^{(n)}}$$
$$(27)\quad = \sum_{[\varkappa]}^{0,1,\cdots,\nabla-1} \vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ \overset{\wedge}{\varkappa}^{(1)} \\ \hline \Delta \end{bmatrix}\left(\!\!\left(u^{(1)}\right)\!\!\right)_{a^{(1)}} \cdots \vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ \overset{\wedge}{\varkappa}^{(n)} \\ \hline \Delta \end{bmatrix}\left(\!\!\left(u^{(n)}\right)\!\!\right)_{a^{(n)}}.$$

Diese Formel, von der man auch umgekehrt wieder zu der Formel (16) zurückkehren kann, und die daher als von der Formel (16) nicht wesentlich verschieden anzusehen ist*), ist zuerst und viel früher als die Formel (16) von Herrn Gordan**) mitgetheilt worden.

Für $r = 2$ geht die Formel (II) in das „zweite Additionstheorem" des Herrn Krause***) über.

Was die Bedeutung der Formel (II) angeht, so liefert dieselbe durch Specialisirung der ihr zu Grunde liegenden linearen Substitution und der Argumente der in ihr auftretenden Thetafunctionen eine Fülle von Relationen, welche im Falle der Transformation höheren Grades zwischen den ursprünglichen und den transformirten Thetafunctionen bestehen†). Die Formel (II) geht aber ferner, wenn man die Modulen

*) Die von Herrn Krause am Ende seiner oben citirten Abhandlung in den Leipz. Ber. 1886 pag. 43 gemachte Bemerkung ist demgemäss zu berichtigen.

**) Gordan, Beziehungen zwischen Thetaproducten. J. für Math. Bd. 66 (1866) pag. 189, Formel (VIII). Später als die Herren Krause und Gordan hat die Formeln (16) und (27) Herr Mertens, Ueber eine Verallgemeinerung der Schröter'schen Multiplicationsformeln für Thetareihen (Progr. Köln 1889), angegeben.

***) Krause, Ueber Fourier'sche Entwicklungen im Gebiete der Thetafunctionen zweier Veränderlichen. Math. Ann. Bd. 27 (1886), pag. 425, Formel (4).

†) Vergl. hiezu ausser den schon citirten Abhandlungen noch:

Göring, Untersuchungen über die Theilwerthe der Jacobi'schen Thetafunctionen und die im Gauss'schen Nachlasse mitgetheilten Beziehungen derselben. Math. Ann. Bd. 7 (1874) pag. 311.

Krause, Die Transformation der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung. Leipzig 1886.

Möller, Zur Transformation der Thetafunctionen. Inaug.-Diss. Rostock 1887.

aller in ihr vorkommenden Thetafunctionen einander gleich, d. h. $p^{(1)} = \cdots = p^{(n)} = q^{(1)} = \cdots = q^{(n)} = 1$ setzt, in die von Herrn Prym*) mitgetheilte „allgemeine Thetaformel" über, die nun ihrerseits alle zum Kreise der Additionstheoreme gehörigen Formeln, insbesondere die Riemann'sche Thetaformel und deren Verallgemeinerungen**) als specielle Fälle enthält.

Strassburg i. E., im Januar 1899.

Krause, Zur Transformation der Thetafunctionen. Leipz. Ber. 1893, pag. 99, 349, 523 und 805; 1896, pag. 291.

Krause, Ueber die Transformationstheorie der elliptischen Functionen. Jahresb. der d. Math. Ver. Bd. 4 (1894—1895), pag. 121.

Krause, Theorie der doppeltperiodischen Functionen einer veränderlichen Grösse. Leipzig. Bd. 1 (1895), Bd. 2 (1897).

*) Prym, Ableitung einer allgemeinen Thetaformel. Acta math. Bd. 3 (1883), pag. 216.

**) Krazer und Prym, Neue Grundlagen etc. pag. 33 u. f. und pag. 47 u. f.

Ueber kürzeste Integralcurven einer Pfaff'schen Gleichung.

Von

R. v. Lilienthal in Münster i. W.

In einer Besprechung*) meiner Schrift: „Grundlagen einer Krümmungslehre der Curvenscharen" macht Herr Sommerfeld auf die von Hertz**) aufgestellte Unterscheidung von geradesten und kürzesten Bahnen aufmerksam, welch' letztere in jener Schrift nicht betrachtet sind. Das veranlasst mich die Frage zu behandeln nach der kürzesten Verbindungslinie zweier Punkte, die zugleich Integralcurve einer gegebenen Pfaff'schen Gleichung oder mit anderen Worten orthogonale Trajectorie einer gegebenen doppeltunendlichen Curvenschar ist.

Ich leite im Folgenden zunächst die kennzeichnende Gleichung dieser kürzesten Linien auf zwei verschiedenen Wegen ab, von denen der erste der von Hertz angegebene, in der Variationsrechnung übliche ist, der zweite, geometrisch durchsichtigere, sich aber dem Gegenstande besser anpasst.

Sodann wird die Integration der aufgestellten Differentialgleichungen erörtert, und schliesslich sind zwei Fälle angegeben, in denen sich die Integration vereinfacht.

Auf die oben genannte Schrift werde ich unter dem Buchstaben „G" hinweisen, doch setzt nur der letzte Paragraph des Folgenden die Kenntniss der fraglichen Schrift voraus.

§ 1.

Erste Herleitung der Differentialgleichungen der kürzesten Linien.

Es sei eine doppelt unendliche Curvenschar durch die Gleichungen festgelegt:

$$dx : dy : ds = \xi : \eta : \zeta, \tag{1}$$

*) Göttingische gelehrte Anzeigen 1898. Nr. 11.

**) Die Principien der Mechanik. S. 100 u. 106.

wo ξ, η, ζ Functionen von x, y, z sind, die der Beziehung genügen sollen

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1.$$

Die rechtwinkligen Durchdringungscurven dieser Curvenschar sind die Integralcurven der Pfaff'schen Gleichung

$$\xi dx + \eta dy + \zeta dz = 0. \tag{2}$$

Man denke sich nun zwei Punkte $P_0(x_0, y_0, z_0)$ und $P_1(x_1, y_1, z_1)$ durch eine solche Integralcurve verbunden und betrachte die Coordinaten x, y, z ihrer Punkte als Functionen ihrer Bogenlänge s, die von P_0 bis P_1 die Werthe von 0 bis σ durchlaufen möge.

Variirt man nun die fragliche Curve unter der Forderung, dass einmal die variirte Curve durch die Punkte P_0 und P_1 gehe, und dass sie ferner Integralcurve der Gleichung (2) bleibe, so müssen die Variationen $\delta x, \delta y, \delta z$ für $s = 0$ und $s = \sigma$ verschwinden und ausserdem der variirten Gleichung (2) genügen d. h. der Beziehung:

$$\begin{aligned}\xi d\delta x + \eta d\delta y + \zeta d\delta z + dx\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \xi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \xi}{\partial z}\delta z\right)\\ + dy\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \eta}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \eta}{\partial z}\delta z\right)\\ + dz\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\delta z\right) = 0.\end{aligned}$$

Wendet man hier die Bezeichnungen an (G. S. 90):

$$2e_1 = \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z}, \quad 2e_2 = \frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad 2e_3 = \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y},$$

so gewinnt die fragliche Beziehung die Form:

$$\begin{aligned}\xi d\delta x + \eta d\delta y + \zeta d\delta z + \delta x(d\xi + 2e_3 dy - 2e_2 dz)\\ + \delta y(d\eta + 2e_1 dz - 2e_3 dx)\\ + \delta z(d\zeta + 2e_2 dx - 2e_1 dy) = 0,\end{aligned}$$

oder kürzer:

$$\xi d\delta x + \eta d\delta y + \zeta d\delta z + A = 0, \tag{3}$$

Damit die gedachte Curve unter allen die Punkte P_0 und P_1 verbindenden Integralcurven von (2) die kürzeste sei, muss die Variation des Integrals

$$\int_0^\sigma ds$$

unter der Bedingung (3) verschwinden.

Dies ergiebt bei Einführung einer einstweilen unbestimmten Function φ von s die Gleichung:

$$\int_0^\sigma \left\{ \frac{dx\,d\delta x + dy\,d\delta y + dz\,d\delta z}{ds} + \varphi(\xi d\delta x + \eta d\delta y + \zeta d\delta z + A) \right\} = 0,$$

oder nach Ausführung einer theilweisen Integration:

$$\int_0^\sigma \Big\{ \varphi A - \delta x \Big(d\frac{dx}{ds} + d(\varphi\xi) \Big) - \delta y \Big(d\frac{dy}{ds} + d(\varphi\eta) \Big) - \delta z \Big(d\frac{dz}{ds} + d(\varphi\zeta) \Big) \Big\} = 0.$$

Hier sind die Coefficienten von δx, δy, δz unter dem Integralzeichen gleich Null zu setzen. Auf diese Weise folgt, wenn man von den Differentialen zu den Ableitungen übergeht*):

$$(4) \qquad \begin{cases} \frac{d^2x}{ds^2} + \xi\frac{d\varphi}{ds} + 2\varphi\left(e_2\frac{dz}{ds} - e_3\frac{dy}{ds}\right) = 0, \\ \frac{d^2y}{ds^2} + \eta\frac{d\varphi}{ds} + 2\varphi\left(e_3\frac{dx}{ds} - e_1\frac{dz}{ds}\right) = 0, \\ \frac{d^2z}{ds^2} + \zeta\frac{d\varphi}{ds} + 2\varphi\left(e_1\frac{dy}{ds} - e_2\frac{dx}{ds}\right) = 0. \end{cases}$$

Multiplicirt man die vorstehenden Gleichungen der Reihe nach mit $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ und addirt sie, so erhält man die von vornherein geforderte Bedingung (2). Um die beiden anderen durch das System (4) gelieferten Bedingungen in geometrisch durchsichtiger Gestalt zu finden, setzen wir

$$(5) \qquad \begin{cases} 2e_1 = 2\varepsilon\xi + \frac{1}{P_s}\left(\eta\frac{dz}{ds} - \zeta\frac{dy}{ds}\right) + \frac{1}{P_s'}\frac{dx}{ds}, \\ 2e_2 = 2\varepsilon\eta + \frac{1}{P_s}\left(\zeta\frac{dx}{ds} - \xi\frac{dz}{ds}\right) + \frac{1}{P_s'}\frac{dy}{ds}, \\ 2e_3 = 2\varepsilon\zeta + \frac{1}{P_s}\left(\xi\frac{dy}{ds} - \eta\frac{dx}{ds}\right) + \frac{1}{P_s'}\frac{dz}{ds}, \end{cases}$$

ferner:

$$(6) \qquad \begin{cases} \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{1}{R_s}\left(\eta\frac{dz}{ds} - \zeta\frac{dy}{ds}\right) + \frac{\xi}{h_s}, \\ \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{1}{R_s}\left(\zeta\frac{dx}{ds} - \xi\frac{dz}{ds}\right) + \frac{\eta}{h_s}, \\ \frac{d^2z}{ds^2} = \frac{1}{R_s}\left(\xi\frac{dy}{ds} - \eta\frac{dx}{ds}\right) + \frac{\zeta}{h_s}. \end{cases}$$

Jetzt gewinnen die fraglichen Bedingungen die Gestalt:

$$(7) \qquad \frac{1}{R_s} + 2\varepsilon\varphi = 0, \quad \frac{d\varphi}{ds} - \frac{\varphi}{P_s} + \frac{1}{h_s} = 0.$$

*) Vergl. A. Voss, Ueber die Differentialgleichungen der Mechanik. Mathem. Annalen Bd. 25. S. 282.

Die Elimination von φ aus diesen Beziehungen gestaltet sich verschieden, je nachdem ε beständig Null ist oder im Allgemeinen nicht verschwindet. Da:

$$2\varepsilon = \xi\left(\frac{\partial\xi}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial z}\right) + \eta\left(\frac{\partial\xi}{\partial z} - \frac{\partial\xi}{\partial x}\right) + \zeta\left(\frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\xi}{\partial y}\right),$$

so sind im Falle $\varepsilon = 0$ die durch (1) definirten Curven orthogonale Trajectorien einer Flächenschar. Hier erhalten wir einfach:

$$\frac{1}{R_s} = 0, \tag{8}$$

indem die zweite Gleichung in (7) nur eine Bedingung für die dem Problem fremde Function φ darstellt.

Wenn aber ε im Allgemeinen von Null verschieden ist, liefert die Elimination von φ die Beziehung:

$$\frac{1}{R_s}\left(\frac{d\log\varepsilon}{ds} + \frac{1}{P_s}\right) + \frac{2\varepsilon}{h_s} - \frac{d\frac{1}{R_s}}{ds} = 0^*). \tag{9}$$

Wir wollen nun die geometrische Bedeutung der hier auftretenden Grössen R_s, h_s, P_s kennen lernen.

Sieht man die Coordinaten einer Raumcurve als Functionen ihrer Bogenlänge an, so werden die Gleichungen der zum Punkte (x, y, z) gehörenden Krümmungsaxe, falls man die Coordinaten ihrer Punkte mit u, v, w bezeichnet:

$$\begin{cases} u = x + \varrho^2\frac{d^2x}{ds^2} + \varrho l\left(\frac{dy}{ds}\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}\right), \\ v = y + \varrho^2\frac{d^2y}{ds^2} + \varrho l\left(\frac{dz}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}\right), \\ w = z + \varrho^2\frac{d^2z}{ds^2} + \varrho l\left(\frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}\right). \end{cases} \tag{10}$$

Hier bedeutet ϱ den Halbmesser der ersten Krümmung der Curve, also den Werth:

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}}. \tag{11}$$

Die Grösse l bedeutet die Abscisse des Punktes (u, v, w) bezüglich des Mittelpunktes der ersten Krümmung.

Nimmt man hier als Raumcurve eine orthogonale Trajectorie der durch (1) gegebenen Curvenschar, so ist:

$$\xi\frac{dx}{ds} + \eta\frac{dy}{ds} + \zeta\frac{dz}{ds} = 0.$$

*) Hiernach ist meine frühere Behauptung, diese Annalen Bd. 32 S. 555 Z. 8, 9, auf den Fall $\varepsilon = 0$ einzuschränken.

Da nun auch:

$$(u-x)\frac{dx}{ds}+(v-y)\frac{dy}{ds}+(w-z)\frac{dz}{ds}=0,$$

so sind die Gleichungen:

$$u=x+h\xi,\quad v=y+h\eta,\quad w=z+h\zeta$$

mit einander verträglich und dienen zur Bestimmung von h und l, d. h. die zum Punkte P einer orthogonalen Trajectorie gehörende Krümmungsaxe derselben schneidet die Tangente der durch P gehenden Einzelcurve der Curvenschar. Die Grösse h ist die Masszahl der Entfernung des fraglichen Schnittpunktes vom Punkte P.

Multiplicirt man die letzten Gleichungen der Reihe nach mit $\frac{d^2x}{ds^2}$, $\frac{d^2y}{ds^2}$, $\frac{d^2z}{ds^2}$ und addirt sie, so entsteht:

$$\frac{1}{h}=\xi\frac{d^2x}{ds^2}+\eta\frac{d^2y}{ds^2}+\zeta\frac{d^2z}{ds^2}, \tag{12}$$

also ist nach (6)

$$h=h_s.$$

Wir nennen $\frac{1}{h_s}$ die Normalkrümmung der betrachteten Trajectorie hinsichtlich der Curvenschar.

Da zugleich

$$\frac{1}{h_s}=-\frac{dx}{ds}\frac{d\xi}{ds}-\frac{dy}{ds}\frac{d\eta}{ds}-\frac{dz}{ds}\frac{d\zeta}{ds},$$

so sind die in Rede stehenden Normalkrümmungen aller denselben Punkt in derselben Richtung durchziehenden Trajectorien der Curvenschar einander gleich.

Zufolge der Beziehung:

$$(u-x)\frac{dx}{ds}+(v-y)\frac{dy}{ds}+(w-z)\frac{dz}{ds}=0.$$

sind auch die Gleichungen:

$$u=x+R\left(\eta\frac{dz}{ds}-\zeta\frac{dy}{ds}\right),$$
$$v=y+R\left(\zeta\frac{dx}{ds}-\xi\frac{dz}{ds}\right),$$
$$w=z+R\left(\xi\frac{dy}{ds}-\eta\frac{dx}{ds}\right)$$

mit einander verträglich, d. h. die betrachtete Krümmungsaxe schneidet auch die Tangente der durch P gehenden und zur betrachteten Trajectorie senkrechten Trajectorie der Curvenschar.

Multiplicirt man die vorstehenden Gleichungen der Reihe nach mit $\frac{d^2x}{ds^2}$, $\frac{d^2y}{ds^2}$, $\frac{d^2z}{ds^2}$ und addirt sie, so enteteht:

(13) $$\frac{1}{R} = \sum \left(\eta \frac{dz}{ds} - \zeta \frac{dy}{ds}\right) \frac{d^2x}{ds^2},$$

d. h. nach (6):

$$R = R_s.$$

Wir nennen $\frac{1}{R_s}$ die geodätische Krümmung der betrachteten Trajectorie hinsichtlich der Curvenschar.

Aus (6) und (11) ergiebt sich:

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{1}{R_s^2} + \frac{1}{h_s^2}.$$

Hiernach ist klar, dass von allen denselben Punkt P in derselben Richtung durchziehenden, orthogonalen Trajectorien der Curvenschar diejenige die kleinste erste Krümmung an der Stelle P besitzt, für welche an dieser Stelle die geodätische Krümmung verschwindet. Eine Trajectorie, längs derer diese Krümmung beständig verschwindet, habe ich eine geodätische Linie der Curvenschar genannt (G. S. 50). Nach dem Vorgange von Hertz (die Principien der Mechanik. S. 101) würde eine solche Linie als geradeste zu bezeichnen sein; jedoch ist diese Ausdrucksweise vom sprachlichen Standpunkt aus sehr wenig glücklich gewählt.

Wir wenden zweitens die Gleichungen (10) auf die den Punkt P durchziehende Einzelcurve der Schar an.

Hier ist:

$$\frac{dx}{ds} = \xi, \quad \frac{dy}{ds} = \eta, \quad \frac{dz}{ds} = \zeta$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\xi + \frac{\partial \xi}{\partial y}\eta + \frac{\partial \xi}{\partial z}\zeta,$$

oder da:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}\xi + \frac{\partial \eta}{\partial x}\eta + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\zeta = 0:$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = 2(e_2\zeta - e_3\eta)$$

und entsprechend:

$$\frac{d^2y}{ds^2} = 2(e_3\xi - e_1\zeta), \quad \frac{d^2z}{ds^2} = 2(e_1\eta - e_2\xi),$$

sodass:

$$\frac{1}{\varrho^2} = 4(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 - \varepsilon^2).$$

Man erhält so:

$$u = x + 2\varrho^2(e_2\zeta - e_3\eta) + 2\varrho l(e_1 - \varepsilon\xi),$$
$$v = y + 2\varrho^2(e_3\xi - e_1\zeta) + 2\varrho l(e_2 - \varepsilon\eta),$$
$$w = z + 2\varrho^2(e_1\eta - e_2\xi) + 2\varrho l(e_3 - \varepsilon\zeta).$$

Bildet man nun die Gleichungen:

$$u = x + \mathsf{P}\frac{dx}{ds}, \quad v = y + \mathsf{P}\frac{dy}{ds}, \quad w = z + \mathsf{P}\frac{dz}{ds},$$

so sind sie wegen der Beziehung:

$$(u-x)\xi + (v-y)\eta + (w-z)\zeta = 0$$

mit einander verträglich, und P bedeutet den Abstand des Punktes P vom Schnittpunkt der in Rede stehenden Krümmungsaxe mit der Tangente der betrachteten Trajectorie.

Multiplicirt man die fraglichen Gleichungen der Reihe nach mit $2(e_2\zeta - e_3\eta)$, $2(e_3\xi - e_1\zeta)$, $2(e_1\eta - e_2\xi)$ und addirt sie, so entsteht:

$$\frac{1}{\mathsf{P}} = 2\Big(\frac{dx}{ds}(e_2\zeta - e_3\eta) + \frac{dy}{ds}(e_3\xi - e_1\zeta) + \frac{dz}{ds}(e_1\eta - e_2\xi)\Big),$$

oder auch:

$$(14)\quad \frac{1}{\mathsf{P}} = 2\Big(e_1\Big(\eta\frac{dz}{ds} - \zeta\frac{dy}{ds}\Big) + e_2\Big(\zeta\frac{dx}{ds} - \xi\frac{dz}{ds}\Big) + e_3\Big(\xi\frac{dy}{ds} - \eta\frac{dx}{ds}\Big)\Big).$$

Folglich ist nach (6):

$$\frac{1}{\mathsf{P}} = \frac{1}{\mathsf{P}_g}.$$

Die durch (1) gegebene Curvenschar ist ein Strahlensystem, wenn längs jeder Curve der Schar die Grössen $\frac{d\xi}{ds}$, $\frac{d\eta}{ds}$, $\frac{d\zeta}{ds}$ verschwinden, d. h. wenn:

$$e_1 : e_2 : e_3 = \xi : \eta : \zeta.$$

In diesem Fall ist der Ausdruck $\frac{1}{\mathsf{P}_g}$ beständig Null.

Sonst verschwindet $\frac{1}{\mathsf{P}_g}$ nur, wenn die Tangente der betrachteten Trajectorie in einem Punkt zugleich Binormale der diesen Punkt durchziehenden Einzelcurve der Schar ist.

Wir haben demnach das Ergebniss: Ist der Ausdruck ε beständig gleich Null, so fallen die kürzesten Linien mit den geodätischen zusammen und werden durch die Gleichungen (2) und (8) festgelegt; ist ε im Allgemeinen von Null verschieden, so kennzeichnen die Gleichungen (2) und (8) die geodätischen, die Gleichungen (2) und (9) die kürzesten Linien.

§ 2.

Zweite Herleitung der Differentialgleichungen der kürzesten Linien.

Wir verstehen wieder unter x, y, z die Coordinaten einer die Punkte P_0 und P_1 verbindenden orthogonalen Trajectorie der gegebenen Curvenschar. Sie werden als Functionen der Bogenlänge s angenommen,

die von P_0 bis P die Werthe von 0 bis σ durchlaufen möge. Wir suchen nun andere die Punkte P_0 und P_1 ebenfalls verbindende Trajectorien zu finden, die in der Nähe der gedachten Trajectorie (x, y, z) liegen.

Nimmt man zunächst:

$$x' = x + s(s-\sigma)\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \frac{\tau^\nu}{\nu!},$$

$$y' = y + s(s-\sigma)\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \frac{\tau^\nu}{\nu!},$$

$$z' = z + s(s-\sigma)\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \frac{\tau^\nu}{\nu!}$$

und betrachtet die Grössen a_ν, b_ν, c_ν als Functionen von s, die für alle Werthe dieser Veränderlichen von 0 bis σ die Convergenz der auftretenden Summen bei hinreichend kleinen Werthen von τ ermöglichen, so werden x', y', z' für ein solches τ die Coordinaten einer die Punkte P_0 und P_1 verbindenden Curve darstellen.

Es sind nun die Bedingungen zu finden, unter denen die Curven $\tau = \text{const}$ zugleich orthogonale Trajectorien der gegebenen Curvenschar werden.

Zu diesem Zweck setzen wir abkürzend:

$$s(s-\sigma)a_\nu = \alpha_\nu, \quad s(s-\sigma)b_\nu = \beta_\nu, \quad s(s-\sigma)c_\nu = \gamma_\nu.$$

Die Werthe der Richtungscosinus ξ, η, ζ an der Stelle $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$ sind:

$$\xi' = \xi + \tau\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\alpha_1 + \frac{\partial \xi}{\partial y}\beta_1 + \frac{\partial \xi}{\partial z}\gamma_1\right) + \cdots$$

$$\eta' = \eta + \tau\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\alpha_1 + \frac{\partial \eta}{\partial y}\beta_1 + \frac{\partial \eta}{\partial z}\gamma_1\right) + \cdots$$

$$\zeta' = \zeta + \tau\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\alpha_1 + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\beta_1 + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\gamma_1\right) + \cdots$$

Nun müssen die Coefficienten der Potenzen von τ in der Entwicklung des Ausdrucks

$$\xi' \frac{dx'}{ds} + \eta' \frac{dy'}{ds} + \zeta' \frac{dz'}{ds} = 0$$

verschwinden. Setzt man den Coefficienten von τ gleich Null, so ergiebt sich die Bedingung für die Grössen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ in der Form:

$$\alpha_1\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\frac{dz}{ds}\right) + \beta_1\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\frac{dz}{ds}\right)$$
$$+ \gamma_1\left(\frac{\partial \xi}{\partial z}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \eta}{\partial z}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\frac{dz}{ds}\right) + \xi\frac{d\alpha_1}{ds} + \eta\frac{d\beta_1}{ds} + \zeta\frac{d\gamma_1}{ds} = 0,$$

oder:

$$\frac{d(\alpha_1\xi+\beta_1\eta+\gamma_1\zeta)}{ds}+2\alpha_1\left(e_3\frac{dy}{ds}-e_2\frac{dz}{ds}\right)+2\beta_1\left(e_1\frac{dz}{ds}-e_3\frac{dx}{ds}\right)$$
$$+2\gamma_1\left(e_2\frac{dx}{ds}-e_1\frac{dy}{ds}\right)=0.$$

Hier empfiehlt es sich, die Grössen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ auf die drei Richtungen zu beziehen, welche durch die Curve der Schar, die betrachtete Trajectorie und die zu beiden senkrechte Trajectorie gegeben sind und zu setzen:

$$\alpha_1=n_1\frac{dx}{ds}+n_2\left(\eta\frac{dz}{ds}-\zeta\frac{dy}{ds}\right)+n_0\xi,$$
$$\beta_1=n_1\frac{dy}{ds}+n_2\left(\zeta\frac{dx}{ds}-\xi\frac{dz}{ds}\right)+n_0\eta,$$
$$\gamma_1=n_1\frac{dz}{ds}+n_2\left(\xi\frac{dy}{ds}-\eta\frac{dx}{ds}\right)+n_0\zeta.$$

Die Grössen n_0, n_1, n_2 sind proportional den Cosinus der Winkel, welche die Tangente der den Punkt (x, y, z) durchziehenden Curve $s=$ const. mit den genannten drei Richtungen bildet.

Die fragliche Beziehung nimmt jetzt die Gestalt an:

$$\frac{dn_0}{ds}+\frac{n_0}{P_g}-2\varepsilon n_2=0. \tag{15}$$

Die Bogenlänge der Curve $\tau=$ const. zwischen den Punkten P_0 und P_1 wird gegeben durch das Integral:

$$J=\int_0^\sigma\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2}\,ds.$$

Dasselbe ist eine Function von τ. Wir fragen nach der Bedingung, unter welcher sie an der Stelle $\tau=0$ ein Minimum wird.

Man hat:

$$\sum\left(\frac{dx}{ds}\right)^2=1+2\tau\left(\frac{dx}{ds}\frac{d\alpha_1}{ds}+\frac{dy}{ds}\frac{d\beta_1}{ds}+\frac{dz}{ds}\frac{d\gamma_1}{ds}\right)+\cdots,$$
$$\sqrt{\sum\left(\frac{dx}{ds}\right)^2}=1+\tau\sum\frac{dx}{ds}\frac{d\alpha_1}{ds}+\cdots,$$

folglich:

$$\left(\frac{\partial J}{\partial\tau}\right)_{\tau=0}=\int_0^\sigma\left(\frac{dx}{ds}\frac{d\alpha_1}{ds}+\frac{dy}{ds}\frac{d\beta_1}{ds}+\frac{dz}{ds}\frac{d\gamma_1}{ds}\right)ds$$
$$=\int_0^\sigma\left\{\frac{dn_1}{ds}+n_2\sum\frac{dx}{ds}\left(\eta\frac{d^2z}{ds^2}-\zeta\frac{d^2y}{ds^2}\right)+n_0\sum\frac{dx}{ds}\frac{d\xi}{ds}\right\}ds$$
$$=\int_0^\sigma\left(\frac{dn_1}{ds}-\frac{n_2}{R_g}-\frac{n_0}{h_g}\right)ds.$$

Da aber n_1 an den Stellen $s = 0$ und $s = \sigma$ Null ist, hat man:

$$\left(\frac{\partial J}{\partial \tau}\right)_{\tau=0} = -\int_0^\sigma \left(\frac{n_2}{R_s} + \frac{n_0}{h_s}\right) ds.$$

Dies Integral soll verschwinden, während die Bedingung (15) besteht. Letztere kann, wenn ε beständig Null ist, nur durch $n_0 = 0$ befriedigt werden. Dann bleibt unter dem Integral die Function n_2 willkürlich, und wir kommen so auf das Ergebniss:

$$\frac{1}{R_s} = 0.$$

Ist aber ε im Allgemeinen von Null verschieden, so entnehmen wir der Bedingung (15) den Ausdruck von n_2 und finden:

$$\left(\frac{\partial J}{\partial \tau}\right)_{\tau=0} = -\int_0^\sigma \left\{\frac{1}{2\varepsilon R_s}\frac{dn_0}{ds} + n_0\left(\frac{1}{h_s} + \frac{1}{2\varepsilon P_s R_s}\right)\right\} ds,$$

oder nach partieller Integration, da auch n_0 an den Stellen $s = 0$ und $s = \sigma$ verschwindet:

$$\left(\frac{\partial J}{\partial \tau}\right)_{\tau=0} = -\int_0^\sigma n_0\left(-\frac{d\frac{1}{2\varepsilon R_s}}{ds} + \frac{1}{h_s} + \frac{1}{2\varepsilon P_s R_s}\right) ds.$$

Wegen der Willkürlichkeit der Function n_0, muss der Factor von n_0 unter dem Integralzeichen verschwinden, wodurch man die Gleichung (9) § 1 erhält.

§ 3.

Ueber die Integration der gefundenen Differentialgleichungen.

Die Gleichungen (8) und (9) § 1, drücken geometrische Eigenschaften der geodätischen und kürzesten Linien aus und bieten das Mittel, um zu entscheiden, ob eine gegebene orthogonale Trajectorie der Curvenschar eine geodätische oder eine kürzeste Linie oder keins von beiden ist. Wenn es sich aber um die Aufsuchung von geodätischen oder kürzesten Linien handelt, werden jene Gleichungen meistens unbrauchbar, da die Bogenlänge als unabhängige Veränderliche auftritt. Hier ersetzt man besser die Differentiation nach der Bogenlänge durch die Ableitung nach einer der drei Coordinaten x, y, z.

Nehmen wir z. B. x zur unabhängigen Veränderlichen, so besteht zunächst die Beziehung:

$$\xi + \eta\frac{dy}{dx} + \zeta\frac{dz}{dx} = 0.$$

Für die Richtungscosinus der Tangente einer orthogonalen Trajectorie der zu Grunde gelegten Curvenschar folgt dann unter Beibehaltung von $\frac{dy}{dx}$, wenn:

$$N = \sqrt{1 - \eta^2 + 2\xi\eta\frac{dy}{dx} + (1-\xi^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

gesetzt wird:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\xi}{N}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{\xi\frac{dy}{dx}}{N}, \quad \frac{ds}{ds} = \frac{-\xi - \eta\frac{dy}{dx}}{N}.$$

Geometrisch gesprochen sind hier die fraglichen Richtungscosinus ausgedrückt durch den Winkel, den die Tangente der Projection der Trajectorie auf die XY-Ebene mit der X-Axe bildet.

Ist nun $\mathfrak{F}$ eine Function von x, y, z und den ersten ν Ableitungen von y, nämlich von

$$p_1 = \frac{dy}{dx}, \; p_2 = \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots p_\nu = \frac{d^\nu y}{dx^\nu},$$

so wird:

$$\frac{d\mathfrak{F}}{ds} = \frac{1}{N}\left\{\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial x}\xi + \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial y}\xi\frac{dy}{dx} - \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial z}\left(\xi + \eta\frac{dy}{dx}\right)\right.$$
$$\left. + \xi\left(\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial p_1}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial p_2}\frac{d^3y}{dx^3} + \cdots + \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial p_\nu}\frac{d^{\nu+1}y}{dx^{\nu+1}}\right)\right\}.$$

Der Ausdruck $\frac{1}{R_g}$ enthält demnach die Unbekannten $x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$, und die geodätischen Linien werden durch ein System von der Form:

$$(15) \qquad \begin{cases} \xi + \eta\frac{dy}{dx} + \zeta\frac{dz}{dx} = 0, \\ F\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0 \end{cases}$$

festgelegt. Eliminirt man z, so ergiebt sich eine gewöhnliche Differentialgleichung dritter Ordnung zwischen y und x d. h. y und damit auch z sind Functionen von x mit drei Parametern. Eine doppelt unendliche Curvenschar besitzt also dreifach unendlich viele geodätische Linien. Die von ein und demselben Punkt ausgehenden bilden eine Fläche.

Die kürzesten Linien werden durch ein System von der Form:

$$(16) \qquad \begin{cases} \xi + \eta\frac{dy}{dx} + \zeta\frac{dz}{dx} = 0, \\ G\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}\right) = 0 \end{cases}$$

festgelegt. Die Elimination von z führt auf eine gewöhnliche Differentialgleichung vierter Ordnung zwischen y und x. In einer doppelt unendlichen Curvenschar, die keine Normalschar ist, $\left(\varepsilon \gtrless 0\right)$ giebt es

also vierfach unendlich viele kürzeste Linien. Je zwei Punkte werden durch eine kürzeste Trajectorie mit einander verbunden. Die von demselben Punkt in derselben Richtung ausgehenden kürzesten Linien bilden eine Fläche.

Die wirkliche Berechnung der Ausdrücke F und G würde sehr umständlich sein und kaum die Möglichkeiten übersehen lassen, unter denen eine Vereinfachung des Integrationsverfahrens zu erzielen wäre.

Wir schlagen daher einen anderen Weg ein und ersetzen die Systeme (15) und (16) durch Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung unter Anwendung gekrümmter Coordinatenlinien.

Man kann leicht drei Functionen u_x, u_y, u_z von x, y, z finden, die den beiden Beziehungen genügen:

$$\xi u_x + \eta u_y + \zeta u_z = 0,$$
$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1.$$

Hierzu hat man unter Annahme dreier beliebiger Functionen f_1, f_2, f_3 von x, y, z nur zu setzen:

$$u_x : u_y : u_z = \eta f_3 - \zeta f_2 : \zeta f_1 - \xi f_3 : \xi f_2 - \eta f_1.$$

Ausserdem nehmen wir:

$$v_x = \eta u_z - \zeta u_y, \quad v_y = \zeta u_x - \xi u_z, \quad v_z = \xi u_y - \eta u_x.$$

Die Differentialgleichungen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u_y}{u_x}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{u_z}{u_x}$$

einerseits und:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{v_z}{v_x}$$

andererseits bestimmen zwei doppelt unendliche, zu einander sowohl wie zur gegebenen Curvenschar senkrechte Curvenscharen. Diese drei Scharen betrachten wir als ein System von Coordinatenlinien.

Die Richtungscosinus der Tangente einer orthogonalen Trajectorie der gegebenen Schar lassen sich mit Hülfe des Winkels ausdrücken, den sie mit der Tangente derjenigen Coordinatenlinie bildet, deren Richtungscosinus wir durch u_x, u_y, u_z bezeichnet haben.

Wir nehmen:

$$\frac{dx}{ds} = u_x \cos\alpha + v_x \sin\alpha,$$
$$\frac{dy}{ds} = u_y \cos\alpha + v_y \sin\alpha,$$
$$\frac{dz}{ds} = u_z \cos\alpha + v_z \sin\alpha,$$

sodass für eine beliebige Function $\mathfrak{F}$ von x, y, z und α sich ergiebt:

$$\frac{d\mathfrak{F}}{ds} = \cos\alpha\left(\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial x}u_x + \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial y}u_y + \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial z}u_z\right)$$
$$+ \sin\alpha\left(\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial x}v_x + \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial y}v_y + \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial z}v_z\right) + \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\alpha}\frac{d\alpha}{ds}.$$

Hier sind die Coefficienten von $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ die Ableitungen von $\mathfrak{F}$ nach der Bogenlänge der betreffenden Coordinatenlinie. Wir setzen desshalb abkürzend:

$$\frac{d\mathfrak{F}}{ds_u} = \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial x}u_x + \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial y}u_y + \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial z}u_z,$$
$$\frac{d\mathfrak{F}}{ds_v} = \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial x}v_x + \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial y}v_y + \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial z}v_z.$$

Es sind nun die Grössen $\frac{1}{R_s}$, $\frac{1}{h_s}$, $\frac{1}{P_s}$ mit Hülfe von α zu berechnen, dabei gelten diese Grössen, insofern sie für die Coordinatenlinien gebildet werden, als bekannt. Ihre Bezeichnungen für diesen Fall erhellen aus den Gleichungen:

$$\frac{d^2x}{ds_u^2} = \frac{du_x}{ds_u} = \frac{1}{R_u}v_x + \frac{\xi}{h_u}, \quad \frac{d^2x}{ds_v^2} = \frac{dv_x}{ds_v} = \frac{1}{R_v}u_x + \frac{\xi}{h_v},$$
$$\frac{1}{P_u} = 2(e_1v_x + e_2v_y + e_3v_z), \quad \frac{1}{P_v} = -2(e_1u_x + e_2u_y + e_3u_z).$$

Unter Hinzunahme zweier weiterer Ausdrücke l_u und l_v, deren geometrische Bedeutung in G. S. 47 auseinandergesetzt ist, hat man ferner:

$$\frac{du_x}{ds_v} = -\frac{v_x}{R_v} - \frac{\xi}{l_v}, \quad \frac{dv_x}{ds_u} = -\frac{u_x}{R_u} - \frac{\xi}{l_u}.$$

Nun folgt:

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \cos\alpha\left(\frac{du_x}{ds_u}\cos\alpha + \frac{dv_x}{ds_u}\sin\alpha\right)$$
$$+ \sin\alpha\left(\frac{du_x}{ds_v}\cos\alpha + \frac{dv_x}{ds_u}\sin\alpha\right) + (v_x\cos\alpha - u_x\sin\alpha)\frac{d\alpha}{ds}$$
$$= (v_x\cos\alpha - u_x\sin\alpha)\left(\frac{d\alpha}{ds} + \frac{\cos\alpha}{R_u} - \frac{\sin\alpha}{R_v}\right)$$
$$+ \xi\left(\frac{\cos^2\alpha}{h_u} - \cos\alpha\sin\alpha\left(\frac{1}{l_u} + \frac{1}{l_v}\right) + \frac{\sin^2\alpha}{h_v}\right).$$

Da aber:

$$\eta\frac{dz}{ds} - \zeta\frac{dy}{ds} = v_x\cos\alpha - u_x\sin\alpha,$$

so zeigt der Vergleich mit den Formeln (6) § 1, dass:

$$\frac{1}{R_s} = \frac{d\alpha}{ds} + \frac{\cos\alpha}{R_u} - \frac{\sin\alpha}{R_v},$$
$$\frac{1}{h_s} = \frac{\cos^2\alpha}{h_u} - \cos\alpha\sin\alpha\left(\frac{1}{l_u} + \frac{1}{l_v}\right) + \frac{\sin^2\alpha}{h_v}.$$

Endlich folgt noch:

$$\frac{1}{P_s} = \frac{\cos\alpha}{P_u} + \frac{\sin\alpha}{P_v}.$$

Für die geodätischen Linien erhalten wir jetzt das System:

$$\frac{dx}{u_x\cos\alpha + v_x\sin\alpha} = \frac{dy}{u_y\cos\alpha + v_y\sin\alpha} = \frac{dz}{u_z\cos\alpha + v_z\sin\alpha} = \frac{d\alpha}{\frac{\sin\alpha}{R_v} - \frac{\cos\alpha}{R_u}}.$$

Die Gleichungen der kürzesten Linien gestalten sich umständlicher. Man hat hier noch die Veränderliche $\beta = \frac{d\alpha}{ds}$ einzuführen und erhält, wenn:

$$M = \beta\left\{\frac{d\log\varepsilon}{ds} + \frac{1}{P_s} + \frac{\sin\alpha}{R_u} + \frac{\cos\alpha}{R_v}\right\} + \frac{2\varepsilon}{h_s} - \cos\alpha\,\frac{d\frac{1}{R_u}}{ds} + \sin\alpha\,\frac{d\frac{1}{R_v}}{ds} + \left(\frac{\cos\alpha}{R_u} - \frac{\sin\alpha}{R_v}\right)\left(\frac{d\log\varepsilon}{ds} + \frac{1}{P_s}\right)$$

genommen wird, das System:

$$\frac{dx}{u_x\cos\alpha + v_x\sin\alpha} = \frac{dy}{u_y\cos\alpha + v_y\sin\alpha} = \frac{dz}{u_z\cos\alpha + v_z\sin\alpha} = \frac{d\alpha}{\beta} = \frac{d\beta}{M}.$$

§ 4.

Besondere Fälle.

1. Die Gleichungen der geodätischen Linien besitzen das Integral $\alpha = \text{const.}$, wenn es gelingt, die Coordinatenlinien so zu wählen, dass $\frac{1}{R_u}$ und $\frac{1}{R_v}$ verschwinden. In diesem Falle sind jene Curven isogonale Trajectorien der Coordinatenlinien, die ihrerseits ebenfalls geodätische Linien sind. Die Bedingung für dieses Vorkommniss ist G. S. 70 in der Weise ausgesprochen, dass die Differentialform

$$\frac{\mathfrak{S}_1}{R_1} - \frac{\mathfrak{S}_2}{R_2} + \left(\frac{1}{2\varrho_1\varrho_2\varepsilon} + \vartheta\right)T_0$$

ein Differential sein muss.

Stellt man nach G. (9) S. 56 die hierzu nöthigen Bedingungen auf und berücksichtigt die siebente und achte Gleichung unter (11) daselbst, so findet sich:

$$g_1\left(\frac{1}{2\varrho_1\varrho_2\varepsilon}\right) = -\frac{1}{h_1P_2} + \frac{1}{P_1}\left(\frac{1}{2\varrho_1\varrho_2\varepsilon} - \varepsilon\right),$$

$$g_2\left(\frac{1}{2\varrho_1\varrho_2\varepsilon}\right) = \frac{1}{h_2P_1} + \frac{1}{P_2}\left(\frac{1}{2\varrho_1\varrho_2\varepsilon} - \varepsilon\right).$$

Dies legt die Frage nahe, ob es Strahlensysteme mit der fraglichen Eigenschaft giebt, da bei ihnen $\frac{1}{P_1}$ und $\frac{1}{P_2}$ und somit auch die rechten Seiten der vorstehenden Gleichungen verschwinden. Nun ist nach G. S. 30 allgemein

$$\frac{1}{2\varrho_1\varrho_2\varepsilon} = \frac{\sqrt{H\Psi - \Phi^2}}{f - f'},$$

und für Strahlensysteme wird nach G. S. 34 die Differenz $f - f'$ gleich $f_0 - f_0'$, sodass der fragliche Ausdruck nur von p und q abhängt. Die vorstehenden beiden Bedingungen verdichten sich also hier zu der Forderung, dass der Ausdruck

$$\frac{\sqrt{H\Psi - \Phi^2}}{f_0 - f_0'}$$

constant sei. Um die Möglichkeit zu entscheiden, dieser Forderung zu genügen, nehmen wir als Ausgangsfläche der Strahlen des Systems die XY-Ebene, indem wir setzen:

$$x_0 = p, \quad y_0 = q, \quad z_0 = 0.$$

Dadurch wird:

$$f_0 - f_0' = \frac{\partial\eta}{\partial p} - \frac{\partial\xi}{\partial q}.$$

Ferner ist:

$$\sqrt{H\Psi - \Phi^2} = \frac{1}{\zeta}\left(\frac{\partial\xi}{\partial p}\frac{\partial\eta}{\partial q} - \frac{\partial\xi}{\partial q}\frac{\partial\eta}{\partial p}\right),$$

somit muss der Ausdruck

$$A = \frac{\frac{\partial\xi}{\partial p}\frac{\partial\eta}{\partial q} - \frac{\partial\xi}{\partial q}\frac{\partial\eta}{\partial p}}{\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}\cdot\left(\frac{\partial\eta}{\partial p} - \frac{\partial\xi}{\partial q}\right)}$$

constant sein. Die Aufgabe, sämmtliche Strahlensysteme mit der in Rede stehenden Eigenschaft zu finden, hängt also von der Integration der beiden partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial A}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial q} = 0$$

mit den beiden unbekannten Functionen ξ und η ab.

2. Nimmt man die Krümmungslinien erster Art zu Coordinatenlinien, so folgt aus den beiden ersten Gleichungen in (11) G. S. 56, indem man die erste mit $-\cos\alpha$, die zweite mit $\sin\alpha$ multiplicirt und sie dann addirt:

$$\frac{2\varepsilon}{P_\varepsilon} = -g_2\left(\frac{1}{h_1}\right)\cos\alpha + g_1\left(\frac{1}{h_2}\right)\sin\alpha + \frac{d\varepsilon}{ds} - \left(\frac{\cos\alpha}{R_1} - \frac{\sin\alpha}{R_2}\right)\left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right).$$

In einer isotropen Curvenschar (G. S. 24, 96) ist die Grösse $\frac{1}{h_\varepsilon}$ von α unabhängig, und jede orthogonale Trajectorie der Curvenschar kann

als eine Krümmungslinie erster Art betrachtet werden. Bezeichnen wir hier den gemeinsamen Werth von $\frac{1}{h_1}$ und $\frac{1}{h_2}$ mit $\frac{1}{h}$, so wird:

$$\frac{2\varepsilon}{P_\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{ds} - \cos\alpha \frac{d\frac{1}{h}}{ds_v} + \sin\alpha \frac{d\frac{1}{h}}{ds_u}.$$

Die bekannte isotrope Curvenschar, deren Normalen einen nicht speciellen linearen Complex bilden, hat die Eigenschaft, dass $\frac{1}{h}$ beständig Null ist. (G. S. 24, 25). Hier wird:

$$\frac{1}{P_\varepsilon} = \frac{1}{2}\frac{d\log\varepsilon}{ds},$$

und die Gleichung (9) § 1 vereinfacht sich zu:

$$\frac{3}{2}\frac{d\log\varepsilon}{ds} - \frac{d\log\frac{1}{R_\varepsilon}}{ds} = 0,$$

sie besitzt also das Integral:

$$\frac{1}{R_\varepsilon} = c\varepsilon^{\frac{3}{2}}.$$

Die weitere Integration hat sich dann noch auf ein System von drei Differentialgleichungen erster Ordnung zu erstrecken.

Münster i./W., 15. Januar 1899.

---

*) Vergl. H. Liebmann, Kürzeste und geradeste Linien im Möbius'schen Nullsystem. Mathem. Annalen Bd. 52. S. 120.

Zur Transformation der Querschnitte Riemann'scher Flächen.

Von

J. Wellstein in Strassburg i. E.

1. Wenn man von einem kanonischen Querschnittsystem

$$Q = [a_\lambda, b_\lambda, c_\lambda], \quad \lambda = 1, 2, 3, \ldots, p$$

einer Riemann'schen Fläche T des Geschlechts p zu einem anderen kanonischen Schnittsystem

$$Q' = [a'_\lambda, b'_\lambda, c'_\lambda], \quad \lambda = 1, 2, 3, \ldots, p$$

übergeht, so drücken sich bekanntlich die Periodicitätsmoduln $\mathfrak{A}'_\mu$, $\mathfrak{B}'_\mu$ jedes Integrals erster oder zweiter Gattung an den neuen Schnitten a'_μ, b'_μ linear und homogen aus durch seine Periodicitätsmoduln $\mathfrak{A}_\lambda$, $\mathfrak{B}_\lambda$ an den alten Querschnitten a_λ, b_λ, also etwa in der Form

$$\mathfrak{A}'_\mu = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} (\mathfrak{a}_{\mu\lambda}\mathfrak{A}_\lambda + \mathfrak{b}_{\mu\lambda}B_\lambda), \quad \Big| \quad B'_\mu = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} (\mathfrak{c}_{\mu\lambda}\mathfrak{A}_\lambda + \mathfrak{d}_{\mu\lambda}\mathfrak{B}_\lambda),$$

und zwar sind die Coefficienten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ ganze Zahlen, welche den Gleichungen

$$\text{I.} \begin{cases} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} (\mathfrak{a}_{\lambda\mu}\mathfrak{c}_{\lambda\nu} - \mathfrak{a}_{\lambda\nu}\mathfrak{c}_{\lambda\mu}) = 0, \\ \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} (\mathfrak{b}_{\lambda\mu}\mathfrak{b}_{\lambda\nu} - \mathfrak{b}_{\lambda\nu}\mathfrak{b}_{\lambda\mu}) = 0, \\ \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} (\mathfrak{a}_{\lambda\mu}\mathfrak{b}_{\lambda\nu} - \mathfrak{b}_{\lambda\nu}\mathfrak{c}_{\lambda\mu}) = \left[\begin{smallmatrix}\mu\\ \nu\end{smallmatrix}\right], \end{cases} \qquad \text{II.} \begin{cases} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} (\mathfrak{a}_{\mu\lambda}\mathfrak{b}_{\nu\lambda} - \mathfrak{a}_{\nu\lambda}\mathfrak{b}_{\mu\lambda}) = 0, \\ \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} (\mathfrak{c}_{\mu\lambda}\mathfrak{b}_{\nu\lambda} - \mathfrak{c}_{\nu\lambda}\mathfrak{b}_{\mu\lambda}) = 0, \\ \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} (\mathfrak{a}_{\mu\lambda}\mathfrak{b}_{\nu\lambda} - \mathfrak{c}_{\nu\lambda}\mathfrak{b}_{\mu\lambda}) = \left[\begin{smallmatrix}\mu\\ \nu\end{smallmatrix}\right], \end{cases}$$

und

III. $$D = \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_{11} \dots \mathfrak{a}_{1p}\, \mathfrak{b}_{11} \dots \mathfrak{b}_{1p} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \mathfrak{a}_{p1} \dots \mathfrak{a}_{pp}\, \mathfrak{b}_{p1} \dots \mathfrak{b}_{pp} \\ \mathfrak{c}_{11} \dots \mathfrak{c}_{1p}\, \mathfrak{d}_{11} \dots \mathfrak{d}_{1p} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \mathfrak{c}_{p1} \dots \mathfrak{c}_{pp}\, \mathfrak{d}_{p1} \dots \mathfrak{d}_{pp} \end{vmatrix} = 1, \quad \text{für } \mu, \nu = 1, 2, \dots, p$$
$$\begin{bmatrix} \mu \\ \nu \end{bmatrix} = \begin{matrix} 1, \text{ wenn } \mu = \nu \\ 0, \quad \text{„} \quad \mu \gtrless \nu \end{matrix}$$

genügen.

Man erhält die Gleichungen I. nach Thomae, Crelle's Journal Bd. 75, indem man die transformirten Periodicitätsmoduln der Integrale 1. Gattung in die bekannten Riemann'schen Relationen einsetzt und die reellen Bestandtheile von den imaginären scheidet; die Formeln II sind eine unmittelbare Folge von I und III, und D wird bis auf sein Vorzeichen aus I bestimmt, indem man in geeigneter Weise das Quadrat dieser Determinante bildet.

2. Nun sind aber die $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ ganze Zahlen, welche angeben, wie viel mal öfter man beim Integrieren über a'_μ, b'_μ die Querschnitte a_λ, b_λ vom (+) Rande nach dem (−) Rande überschreiten muss als vom (−) Rande nach dem (+) Rande, wie weiter unten noch einmal genauer nachgewiesen wird. Folglich hängen die Zahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ nur von der Natur der Schnittsysteme Q, Q' ab, und die Formeln I, II, III haben mit den Integralen 1. und 2. Gattung nichts zu thun. Es scheint daher wünschenswerth und für den systematischen Aufbau der Functionentheorie auf einer gegebenen Riemann'schen Fläche nothwendig, die Gleichungen I, II, III mit rein geometrischen, der analysis situs angehörenden Hülfsmitteln beweisen zu können. In der vorliegenden Arbeit möchte ich mir gestatten, einen solchen Beweis zu erbringen, der zudem noch den Vorzug haben dürfte, nicht schwerer zu sein als der mit transcendenten Mitteln geführte.

3. Wir legen zu diesem Zwecke jedem Schnitte a_λ, b_λ des Systems Q diejenige Richtung bei, in welcher die Periodicitätsmoduln durch Integration bestimmt werden, und versehen die Ränder dieser Schnitte so mit den Marken (+) und (−), dass man, diese Wege in ihrer Richtung durchlaufend,

den (+) Rand von a_λ zur Linken
„ (+) „ „ b_λ „ Rechten

hat, übereinstimmend mit der von Riemann getroffenen Festsetzung. Falls man die Schnitte c_λ nicht ganz vermeidet*), was wegen der Unübersichtlichkeit der Zeichnung nicht immer zu ermöglichen ist, so denken wir uns dieselben von einem Punkte Ω der Fläche strahlenförmig nach den Kreuzungsstellen der Schnittpaare a_λ, b_λ auslaufend,

*) Vergl. Klein, Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie. Math. Ann. Bd. 21, pag. 184.

und zwar, um keine Unklarheit zu lassen, jedesmal nach der Ecke, wo der (—) Rand von a_λ mit dem von b_λ zusammenstösst. An sich wäre das unwesentlich. Die Richtung, die wir auf c_λ festlegen, soll von Ω nach dieser Ecke führen und den (+) Rand von c_λ zur Linken haben, so dass also die Schnitte $a_\lambda, b_\lambda, c_\lambda$ in ihrer Kreuzungsstelle folgendermassen orientirt sind: (Fig. 1.)

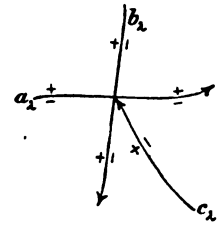


Fig. 1.

4. Ganz ebenso sei das Schnittsystem Q' mit $\pm$ Marken und Richtungssinn versehen. Ist dann s irgend ein Schnitt aus Q und s' einer aus Q', so soll das Symbol $\binom{s}{s'}$ angeben, wie viel Mal öfter man beim Durchlaufen von s' in seiner Eigenrichtung den Schnitt s von seinem (—) Rande nach dem (+) Rande hin *überschreitet* als vom (+) Rande nach dem (—) Rande. Es ist für diese Abzählung wesentlich, dass s wirklich überschritten werden muss; wenn s' an einer Stelle an s heranführt, dann etwa eine Strecke lang mit s zusammenfällt und sich darauf auf demselben Rande, also ohne Uebersprungung des Schnittspaltes von s wieder entfernt, so liefert diese Stelle zu $\binom{s}{s'}$ keinen Beitrag, doch lässt sich das Vorkommen dieses Falles durch erlaubte Deformationen stets vermeiden; denn wenn s mit s' ganz oder auf eine Strecke l hin zusammenfiele, so könnte man s durch eine kleine Verschiebung von s' entfernen, was ja auf die Werthe der Periodicitätsmoduln keinen Einfluss hat. Man überzeugt sich leicht an einem Beispiele, dass $\binom{s'}{s}$ im Allgemeinen nicht gleich $\binom{s}{s'}$ ist. Lassen wir vorläufig die Schnitte c_λ, c_λ' bei Seite, so sind, da

$$s = a_\mu, b_\mu; \quad s' = a'_\nu, b'_\nu; \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, \ldots, p$$

sein kann, im Wesentlichen vier Combinationen möglich:

$s = a_\mu$	b_μ	a_μ	b_μ,	
$s' = a'_\nu$	a'_ν	b'_ν	b'_ν,	
die durch Fig. 2a	2b	2c	2d	veranschaulicht werden:

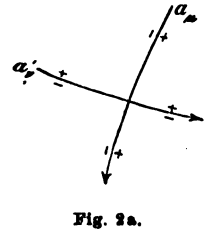


Fig. 2a.

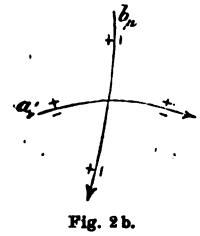


Fig. 2b.

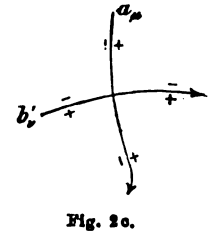


Fig. 2c.

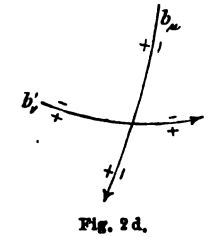


Fig. 2d.

In Fig. 2a überschreitet a'_ν den Schnitt a_μ vom (—) Rand nach dem (+) Rand; dagegen führt a_μ vom (+) Rand des Schnittes a'_ν nach dem (—) Rand. Würde a'_ν an einer anderen Stelle den Schnitt a_μ von (+) nach (—) hin überspringen, so würde dort a_μ den Schnitt a'_ν von (—) nach (+) kreuzen; also ist $\left(\begin{smallmatrix} a_\mu \\ a'_\nu \end{smallmatrix}\right) = -\left(\begin{smallmatrix} a'_\nu \\ a_\mu \end{smallmatrix}\right)$. Stellt man in allen vier Fällen 2a, 2b, 2c, 2d dieselbe Betrachtung an, so erhält man die Formeln:

$$(1)\qquad \begin{aligned} \left(\begin{smallmatrix} a_\mu \\ a'_\nu \end{smallmatrix}\right) &= -\left(\begin{smallmatrix} a'_\nu \\ a_\mu \end{smallmatrix}\right), \quad \left(\begin{smallmatrix} b_\mu \\ a'_\nu \end{smallmatrix}\right) = +\left(\begin{smallmatrix} a'_\nu \\ b_\mu \end{smallmatrix}\right), \\ \left(\begin{smallmatrix} a_\mu \\ b'_\nu \end{smallmatrix}\right) &= +\left(\begin{smallmatrix} b'_\nu \\ a_\mu \end{smallmatrix}\right), \quad \left(\begin{smallmatrix} b_\mu \\ b'_\nu \end{smallmatrix}\right) = -\left(\begin{smallmatrix} b'_\nu \\ b_\mu \end{smallmatrix}\right). \end{aligned}$$

5. Wir denken uns nun das Querschnittsystem Q wirklich ausgeführt, dagegen die Schnitte Q' nur in die Fläche T eingezeichnet; die Fläche T mit dem Schnittsystem Q heisse ausführlicher T_Q. Anstatt die Querschnitte a'_μ, b'_μ zu durchlaufen und dabei fortgesetzt die Schnitte Q zu überschreiten, führen wir andere, in T_Q „zulässige" Bahnen A'_μ, B'_μ ein, welche nirgends in T_Q eine Schnittspalte überspringen, und zwar seien dieselben folgendermassen definirt.

Man folgt a'_μ (bzw. b'_μ) in seiner Richtung, bis $a'_\mu(b'_\mu)$ an den (+) oder (—) Rand eines Schnittes aus Q stösst, und folgt nun, anfangs in der Richtung dieses Schnittes, der Berandung von T_Q so lange, bis man zu der Stelle kommt, wo der Weg $a'_\mu(b'_\mu)$ weiter führt; dann folgt man $a'_\mu(b'_\mu)$ so lange, bis man wieder zu einem Rande von T_Q kommt und verfährt dann ebenso wie vorher. Des Genaueren liegt die Sache so:

1) wenn $a'_\mu(b'_\mu)$ einen Schnitt c_λ trifft, so folgt man c_λ bis zu dem Knotenpunkt von a_λ, b_λ (vergl. Fig. 1). Hatte $a'_\mu(b'_\mu)$ den Schnitt c_λ auf der $\left\{\begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix}\right.$ Seite getroffen, so folgt man von dem Schnittpunkt der Linien a_λ, b_λ, c_λ aus dem Rande von $\left\{\begin{smallmatrix} -b_\lambda \\ -a_\lambda \end{smallmatrix}\right.$, bis man wieder nach dem Punkt $(a_\lambda, b_\lambda, c_\lambda)$ kommt, dann dem Rande von $\left\{\begin{smallmatrix} +a_\lambda \\ +b_\lambda \end{smallmatrix}\right.$ nach $(a_\lambda, b_\lambda, c_\lambda)$, dann dem Rande von $\left\{\begin{smallmatrix} +b_\lambda \\ +a_\lambda \end{smallmatrix}\right.$ bis $(a_\lambda, b_\lambda, c_\lambda)$, dann dem Rande von $\left\{\begin{smallmatrix} -a_\lambda \\ -b_\lambda \end{smallmatrix}\right.$ bis a_λ, b_λ, c_λ, und schliesslich dem $\left\{\begin{smallmatrix} - \\ + \end{smallmatrix}\right.$ Rande von c_λ bis gegenüber der Ausgangsstelle. Wie man sieht, ist a_λ, b_λ und der in Betracht kommende Theil von c_λ je einmal *in* seiner Richtung und *entgegen* seiner Richtung durchlaufen worden; die algebraische Summe der in

$a'_\mu (b'_\mu)$ anlässlich des Schnittes mit c_λ eingeschalteten Umwege ist also gleich Null.

2) wenn $a'_\mu (b'_\mu)$ den Schnitt $\begin{Bmatrix} a_\lambda \\ b_\lambda \end{Bmatrix}$ trifft, so folgt man $\begin{Bmatrix} a_\lambda \\ b_\lambda \end{Bmatrix}$ in seiner Richtung bis zum Kreuzungspunkt (a_λ, b_λ), darauf dem Schnitte $\begin{Bmatrix} a_\lambda \\ b_\lambda \end{Bmatrix}$ wieder bis zum Kreuzungspunkt, und von da dem Wege $\begin{Bmatrix} a_\lambda \\ b_\lambda \end{Bmatrix}$ rückwärts bis gegenüber der Ausgangsstelle. Hatte man sich anfangs dem Schnitte $\begin{Bmatrix} a_\lambda \\ b_\lambda \end{Bmatrix}$ von der (—) Seite her genähert, so musste man die Curven $\begin{Bmatrix} b_\lambda \\ a_\lambda \end{Bmatrix}$ *in* ihrer Richtung durchlaufen, im anderen Falle *entgegen* ihrer Richtung, und es ist somit, seiner algebraischen Länge nach,

$$(2) \qquad \begin{cases} A'_\mu = a'_\mu + \sum\limits_\lambda \binom{a_\lambda}{a'_\mu} b_\lambda + \sum\limits_\lambda \binom{b_\lambda}{a'_\mu} a_\lambda, \\ B'_\mu = b'_\mu + \sum\limits_\lambda \binom{a_\lambda}{b'_\mu} b_\lambda + \sum\limits_\lambda \binom{b_\lambda}{b'_\mu} a_\lambda. \end{cases}$$

6. Ist σ irgend eine geschlossene, mit (+) und (—) Rand versehene Curve in T, und will man abzählen, wie viel mal öfter man, $A'_\mu (B'_\mu)$ in seiner Richtung durchlaufend, σ von seiner (—) Seite nach der (+) Seite überschreitet, als umgekehrt, so kann man $A'_\mu (B'_\mu)$ offenbar in seine in (2) angegebenen Bestandtheile auflösen, indem eine *in* ihrer und *gegen* ihre Richtung durchlaufene Schnittcurve aus Q zu $\binom{\sigma}{A'_\mu}$ bezw. $\binom{\sigma}{B'_\mu}$ keinen Beitrag liefert. Nimmt man für σ insbesondere die Curven a'_ν, b'_ν, so folgt aus (2):

$$(3) \qquad \begin{cases} \binom{a'_\nu}{A'_\mu} = \binom{a'_\nu}{a'_\mu} + \sum\limits_\lambda \binom{a_\lambda}{a'_\mu}\binom{a'_\nu}{b_\lambda} + \sum\limits_\lambda \binom{b_\lambda}{a'_\mu}\binom{a'_\nu}{a_\lambda}, \\ \binom{a'_\nu}{B'_\mu} = \binom{a'_\nu}{b'_\mu} + \sum\limits_\lambda \binom{a_\lambda}{b'_\mu}\binom{a'_\nu}{b_\lambda} + \sum\limits_\lambda \binom{b_\lambda}{b'_\mu}\binom{a'_\nu}{a_\lambda}, \\ \binom{b'_\nu}{A'_\mu} = \binom{b'_\nu}{a'_\mu} + \sum\limits_\lambda \binom{a_\lambda}{a'_\mu}\binom{b'_\nu}{b_\lambda} + \sum\limits_\lambda \binom{b_\lambda}{a'_\mu}\binom{b'_\nu}{a_\lambda}, \\ \binom{b'_\nu}{B'_\mu} = \binom{b'_\nu}{b'_\mu} + \sum\limits_\lambda \binom{a_\lambda}{b'_\mu}\binom{b'_\nu}{b_\lambda} + \sum\limits_\lambda \binom{b_\lambda}{b'_\mu}\binom{a'_\nu}{a_\lambda}, \end{cases}$$

Da a'_ν, a'_μ einander nicht überschreiten, so ist $\binom{a'_\nu}{a'_\mu} = 0$; ebenso

$\left(\begin{smallmatrix} b'_\nu \\ b'_\mu \end{smallmatrix}\right) = 0$, und auch $\left(\begin{smallmatrix} a'_\nu \\ b'_\mu \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} b'_\nu \\ a'_\mu \end{smallmatrix}\right)$ verschwinden, wenn $\nu \gtrless \mu$ ist. Für $\mu = \nu$ dagegen haben beide Symbole den Werth -1, wie aus Fig. 1 zu entnehmen ist. Mit Rücksicht auf (1) folgt daher aus (3):

$$(4)\quad \begin{cases} \left(\begin{smallmatrix} a'_\nu \\ A'_\mu \end{smallmatrix}\right) = \sum_\lambda \left(\begin{smallmatrix} a_\lambda \\ a'_\mu \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} b_\lambda \\ a'_\nu \end{smallmatrix}\right) - \sum_\lambda \left(\begin{smallmatrix} b_\lambda \\ a'_\mu \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a_\lambda \\ a'_\nu \end{smallmatrix}\right), \\ \left(\begin{smallmatrix} a'_\nu \\ B'_\mu \end{smallmatrix}\right) = -\left[\begin{smallmatrix} \mu \\ \nu \end{smallmatrix}\right] + \sum_\lambda \left(\begin{smallmatrix} a_\lambda \\ b'_\mu \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} b_\lambda \\ a'_\nu \end{smallmatrix}\right) - \sum_\lambda \left(\begin{smallmatrix} b_\lambda \\ b'_\mu \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a_\lambda \\ a'_\nu \end{smallmatrix}\right), \\ \left(\begin{smallmatrix} b'_\nu \\ A'_\mu \end{smallmatrix}\right) = -\left[\begin{smallmatrix} \mu \\ \nu \end{smallmatrix}\right] - \sum_\lambda \left(\begin{smallmatrix} a_\lambda \\ a'_\mu \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} b_\lambda \\ b'_\nu \end{smallmatrix}\right) + \sum_\lambda \left(\begin{smallmatrix} b_\lambda \\ b'_\mu \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a_\lambda \\ a'_\nu \end{smallmatrix}\right), \\ \left(\begin{smallmatrix} b'_\nu \\ B'_\mu \end{smallmatrix}\right) = -\sum_\lambda \left(\begin{smallmatrix} a_\lambda \\ b'_\mu \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} b_\lambda \\ b'_\nu \end{smallmatrix}\right) + \sum_\lambda \left(\begin{smallmatrix} b_\lambda \\ b'_\mu \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a_\lambda \\ b'_\nu \end{smallmatrix}\right), \end{cases}$$

wo

$$\left[\begin{smallmatrix} \mu \\ \nu \end{smallmatrix}\right] = \begin{matrix} 1 \text{ für } \mu = \nu \\ 0 \quad \text{„} \quad \mu \gtrless \nu. \end{matrix}$$

7. Da T_Q einfach zusammenhängend ist, so würde T_Q durch den Schnitt a'_ν, wenn man denselben wirklich ausführte, in Stücke zerfallen, wobei wir also, was nach Art. 4 erlaubt ist, voraussetzen, dass a'_ν nicht mit einem Schnitte a_λ oder b_λ des Systems Q ganz oder theilweise zusammenfällt. Folglich kann man nur dadurch vom (—) Rand von a'_ν zum (+) Rand gelangen, dass man a'_ν irgendwo überschreitet. So oft also A'_μ den Schnitt a'_ν von (—) nach (+) überschreitet, so oft muss A'_μ, um aus dem (+) a'_ν-Gebiete herauszukommen, den Schnitt a'_ν von seiner (+) Seite nach der (—) Seite überspringen, da a'_ν ja eine geschlossene Curve ist; daher ist $\left(\begin{smallmatrix} a'_\nu \\ A'_\mu \end{smallmatrix}\right) = 0$, und ebenso $\left(\begin{smallmatrix} a'_\nu \\ B'_\mu \end{smallmatrix}\right) = 0$, $\left(\begin{smallmatrix} b'_\nu \\ A'_\mu \end{smallmatrix}\right) = 0$, $\left(\begin{smallmatrix} b'_\nu \\ B'_\mu \end{smallmatrix}\right) = 0$. Schreibt man nun noch:

$$(5)\quad \left(\begin{smallmatrix} a_\lambda \\ b'_\mu \end{smallmatrix}\right) = -\mathfrak{a}_{\mu\lambda},\ \left(\begin{smallmatrix} b_\lambda \\ b'_\mu \end{smallmatrix}\right) = -\mathfrak{b}_{\mu\lambda},\ \left(\begin{smallmatrix} a_\lambda \\ a'_\mu \end{smallmatrix}\right) = -\mathfrak{c}_{\mu\lambda},\ \left(\begin{smallmatrix} b_\lambda \\ a'_\mu \end{smallmatrix}\right) = -\mathfrak{d}_{\mu\lambda},$$

so ergiebt sich aus (4), indem die beiden mittleren Gleichungen nach Vertauschung von μ und ν in einander übergehen, das Gleichungssystem II des Art. 1.

Betrachtet man umgekehrt das Schnittsystem Q' als das zuerst gegebene, während Q neu eingeführt und die Wege a_λ, b_λ durch „zulässige" Wege A_λ, B_λ ersetzt werden, so erhält man statt der Gleichungen (4) ganz entsprechend gebildete, deren linke Seiten wiederum Null sind, während die rechten Seiten aus denen von (4) durch Ver-

tauschung der a, b mit a', b' hervorgehen. Wendet man dann auf die Symbole $\binom{a'_\lambda}{a_\mu}$, $\binom{a'_\lambda}{b_\mu}$, $\binom{b'_\lambda}{a_\mu}$, $\binom{b'_\lambda}{b_\mu}$ die Formeln (1) an, so erhält man nach Einführung der in (5) angegebenen Bezeichnungsweise das Gleichungensystem I des Art. 1. Bildet man schliesslich in geeigneter Weise*) das Quadrat der in Art. 1, III angeschriebenen Determinante D, so findet man $D = \pm 1$.

Uebrigens sind ja die Gleichungen II und III eine unmittelbare Folge von I, oder I und III eine Folge von II, so dass wir also den versprochenen Beweis hiermit erbracht haben. Die Bestimmung des Vorzeichens in $D = \pm 1$, das bekanntlich das positive sein muss, ist Sache der Determinantentheorie.

Strassburg i. E., 30. Dezember 1898.

---

*) Vergl. Krazer u. Prym, Neue Grundl. einer Theorie der allgemeinen Thetafunctionen, Leipzig 1892, Seite 63 u. 64.

Zur Theorie der Functionenclasse
$$s^3 = (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_6).$$

Von

J. Wellstein in Strassburg i. E.

Zur Theorie der wie

$$s = \sqrt[3]{(z-\alpha_1)\ldots(z-\alpha_6)} \tag{1}$$

verzweigten algebraischen Functionen, betreffs deren ich hier auf die Arbeit des Herrn F. W. Osgood*) verweise, welcher dieselbe durch Erledigung des Problems der speciellen Periodenzweitheilung gefördert hat, erlaube ich mir zwei kleine Beiträge folgenden Inhaltes zu liefern:

I. Einführung eines nach gruppentheoretischen Gesichtspunkten normirten Querschnittsystems.

II. Darstelllung der Periodicitätsmoduln der Integrale 1. Gattung durch drei absolute Invarianten, die drei „Moduln" des algebraischen Gebildes.

Den ersten Theil möchte ich etwas ausführlicher darstellen, als unbedingt nothwendig wäre, um bei einer späteren Arbeit, die alle regulären Flächen umfassen soll, über ein instructives Beispiel verfügen zu können.

I.

1. Wir denken uns s in der Zahlenebene durch sechs von einem schlichten Punkte O nach den sechs Punkten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_6$ verlaufende Sperrschnitte eindeutig gemacht und die so zerschnittene Ebene in drei Exemplaren E_1, E_2, E_3 angefertigt. Jedem Punkte von E_1 denken wir uns den Werth zugeordnet, den dort $s_1 = \varrho s$, $\varrho = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ annimmt. Ebenso denken wir uns $s_2 = \varrho^2 s$, $s_3 = \varrho^3 s$ auf E_2 bezw. E_3 eindeutig bezogen und versinnlichen dann den Zusammenhang zwischen den drei Wurzeln s_1, s_2, s_3, indem wir die drei Blätter E_1, E_2, E_3

*) F. W. Osgood: Zur Theorie der zum algebraischen Gebilde $y^m = R(x)$ gehörigen Abel'schen Functionen. Erlangen, 1890. Diss. Wegen weiterer Literatur vergl. meine neuerdings in den Nova Acta Leopoldina LXXIV, 2 erschienene Abhandlung: Zur Functionen- und Invariantentheorie der binomischen Gebilde.

längs der Schnitte $O\alpha_1, O\alpha_2, \ldots, O\alpha_6$ so aneinanderheften, dass man durch positive Umkreisung des Punktes α_i an der Verzweigungslinie $O\alpha_i$ vom Blatte E_1 nach E_2, von E_2 nach E_3, von E_3 nach E_1 gelangt, für $i = 1, 2, \ldots, 6$.

2. Die so entstandene Fläche T vom Geschlechte $p = 4$ geht dann durch die Substitution

$$S: \quad s' = s, \quad s' = \varrho s \tag{2}$$

in sich selbst über, und S liefert zu jedem Punkte P im cyklisch folgenden Blatte genau über oder unter P einen Punkt P', zu diesem bei nochmaliger Anwendung von S im folgenden Blatte einen Punkt P'' und zu diesem schliesslich wieder P. Beschreibt P eine Curve, so durchlaufen P' und P'' dazu congruente Curven. Insbesondere entspricht also jedem Querschnittsysteme $Q = a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3; a_4, b_4$ durch einmalige Anwendung von S ein dazu congruentes Querschnittsystem $Q' = a_1', b_1'; a_2', b_2'; a_3', b_3'; a_4', b_4'$, das man sich aus Q durch verticale Verschiebung entstanden denken kann. Die cyklische Gruppe $S, S^2, S^3 = 1$ von Transformationen der Fläche in sich hat demnach eine cyklische Gruppe von Verschiebungen des Querschnittsystems Q zur Folge, und dieser entspricht eine cyklische Gruppe von linearen Substitutionen der Periodicitätsmoduln der Integrale 1. und 2. Gattung, indem die „neuen" Periodicitätsmoduln A_μ', B_μ' sich durch die „alten" A_λ, B_λ, ausdrücken lassen in der Form:

$$A_\mu' = \sum_\lambda \mathfrak{a}_{\mu\lambda} A_\lambda + \sum_\lambda \mathfrak{b}_{\mu\lambda} B_\lambda \;\Big|\; B_\mu' = \sum_\lambda \mathfrak{c}_{\mu\lambda} A_\lambda + \sum_\lambda \mathfrak{d}_{\mu\lambda} B_\lambda, \tag{3}$$

wo die ganzen Zahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ bekanntlich den Gleichungen

$$\begin{cases} \sum_\lambda (\mathfrak{a}_{\mu\lambda}\mathfrak{b}_{\nu\lambda} - \mathfrak{a}_{\nu\lambda}\mathfrak{b}_{\mu\lambda}) = 0 \;\Big|\; \sum_\lambda (\mathfrak{c}_{\mu\lambda}\mathfrak{d}_{\nu\lambda} - \mathfrak{c}_{\nu\lambda}\mathfrak{d}_{\mu\lambda}) = 0, \\ \sum_\lambda (\mathfrak{a}_{\mu\lambda}\mathfrak{d}_{\nu\lambda} - \mathfrak{b}_{\mu\lambda}\mathfrak{c}_{\nu\lambda}) = \begin{matrix} 1, \text{ wenn } \nu = \mu, \\ 0, \quad \text{„} \quad \nu \gtrless \mu \end{matrix} \end{cases} \tag{4}$$

genügen*).

3. Nun kann man bekanntlich jede, einer endlichen Gruppe angehörige linearen Substitution $x_i' = \sum_\nu a_{\nu i} x_i$ in die Normalform $x_i' = \varrho_i x_i$ transformiren**). Diese Normalform kann jedoch für die Substitution (3) nicht etwa durch geeignete Anlage des Querschnittsystems Q

*) Eine für alle Riemann'sche Flächen gültige rein geometrische Ableitung dieser Gleichungen habe ich in der vorangehenden Abhandlung (Bd. 52, Seite 433) veröffentlicht.

**) Dieser Satz ist neuerdings wieder von Moore und Maschke, Math. Ann. Bd. 50, bewiesen worden.

erreicht werden, da die ϱ_i in diesem Falle dritte Einheitswurzeln sein würden. Wir kommen jedoch dieser Normalform möglichst nahe, wenn wir uns das Schnittsystem Q so gewählt denken, dass bei der cyklischen Verschiebung von Q das $2p$-dimensionale System der Grössen $A_1, \ldots, A_p, B_1, \ldots, B_p$ in die grösstmögliche Zahl von Untersystemen niedriger Dimension zerfällt, dergestalt, dass die Elemente jedes Untersystems unter sich eine lineare Substitution erfahren. *In diesem Falle soll das Querschnittsystem ein „reducirtes" heissen.* Es ist leicht einzusehen, dass jedes dieser Untersysteme, wenn es die Grösse A_i enthält, auch B_i enthalten muss und umgekehrt. Der günstigste Fall wird also der sein, dass jedes Untersystem nur aus *einem* Paar A_i, B_i besteht. Dieser Fall tritt wirklich ein*). Es giebt überaus viele Typen von Schnittsystemen, welche diesen Fall realisiren, und zwar ist noch eine grosse Zahl derselben dadurch ausgezeichnet, dass die Schnitte

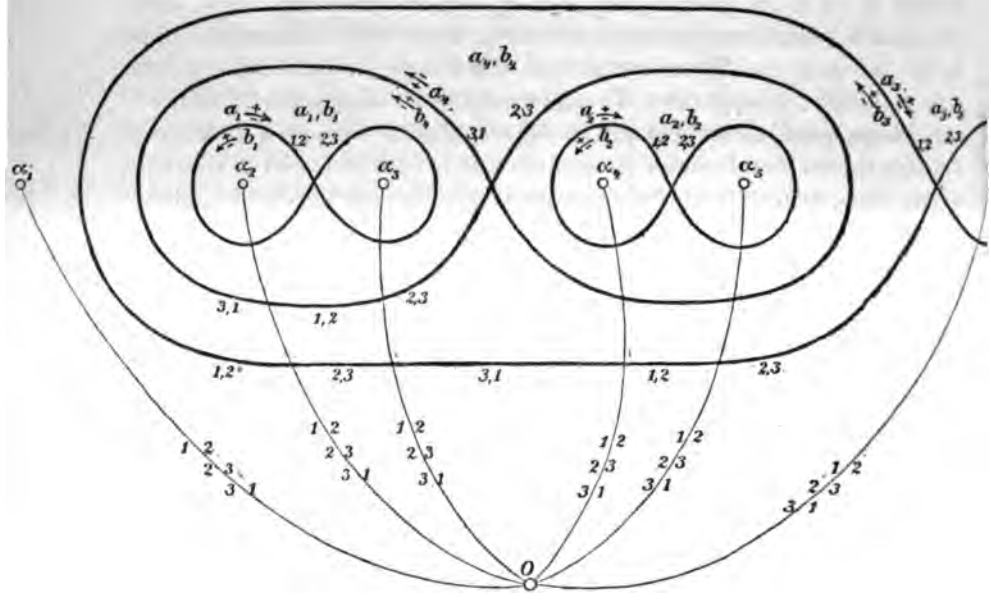


Fig. 1.

a_i, b_i eines jeden Querschnittpaares zu einander congruent liegen, und folglich durch eine der zu (S, S^2, S^3) isomorphen Verschiebungen in einander übergehen. Diese Schnittsysteme sind sehr bequem zu zeichnen, wie ein Vergleich von Figur 1 mit dem von Osgood**)

*) Jedoch nicht bei allen regulären Riemann'schen Flächen; von den Flächen mit cyklischer Monodromiegruppe zeigen nur die dreiblättrigen dieses ausgezeichnete Verhalten; sie werden im Art. 2 vollständig erledigt.

**) a. a. O.

angegebenen nicht „reducirten" Schnittsysteme ergiebt. In Figur 1 sind die Querschnitte jedes Paares a_i, b_i zu einander congruent gelegen, daher nur durch *eine* Curve mit beigefügten Ziffern wiedergegeben, von denen sich die erste immer auf a_i, die zweite auf b_i bezieht und die Nummer des Blattes E_1, E_2, E_3 angiebt, in welchem an dieser Stelle a_i, bezw. b_i verläuft. Die Theilfigur 2 macht dieses Verhältniss für das Schnittpaar a_1, b_1 und a_4, b_4 ersichtlich.

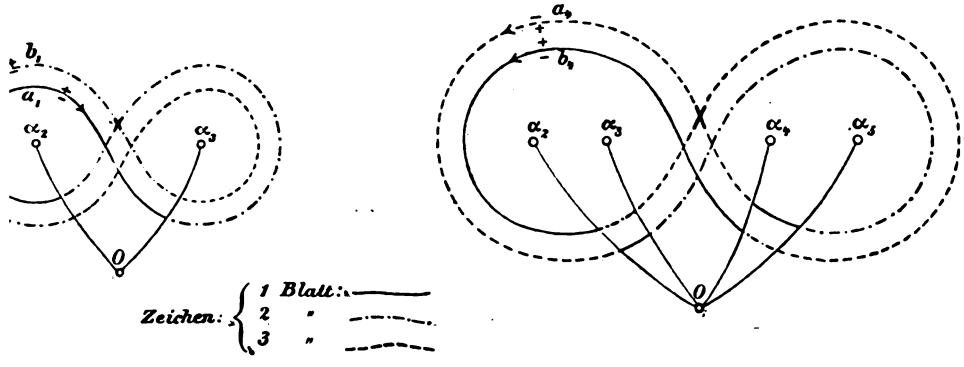


Fig. 2.

Auf jedem Querschnitte a_i, b_i denken wir uns die Richtung angegeben, in welcher die Periodicitätsmoduln durch Integration ermittelt werden sollen, so zwar, dass der (+) Rand von a_i zur Linken, der (+) Rand von b_i zur Rechten dieser Richtung liegt.

4. Wie aus dem Querschnittsystem der zweiblättrigen Fläche T der elliptischen Functionen dasjenige der hyperelliptischen hervorgegangen ist, ergiebt sich aus Figur 1 sofort das Bildungsgesetz eines „reducirten" Schnittsystems derjenigen Riemann'schen Fläche, welche verzweigt ist wie

$$(5) \qquad s = \sqrt[3]{\prod_{\nu=0}^{\nu=n} (z-\alpha_{3\nu+1})(z-\alpha_{3\nu+2})(z-\alpha_{3\nu+3})}.$$

Ihr Geschlecht ist $p = 3n+1$. Das reducirte, wiederum aus paarweise congruent liegenden Schnitten gebildete Querschnittsystem ist in Figur 3 dargestellt. Die ganz unwesentlichen Schnitte c_λ sind daselbst punktirt. In Figur 1 sind sie weggelassen.

II.

5. Wir führen jetzt homogene Variabeln $s = \frac{x_1}{x_2}$ ein und schreiben

$$(6) \quad s(x_1|x_2)^3 = \sum_{\nu=0}^{\nu=6} \binom{6}{\nu} a_\nu x_1^{6-\nu} x_2^\nu = a_0(x_1-\alpha_1 x_2)\cdots(x_1-\alpha_6 x_2) = f(x_1|x_2).$$

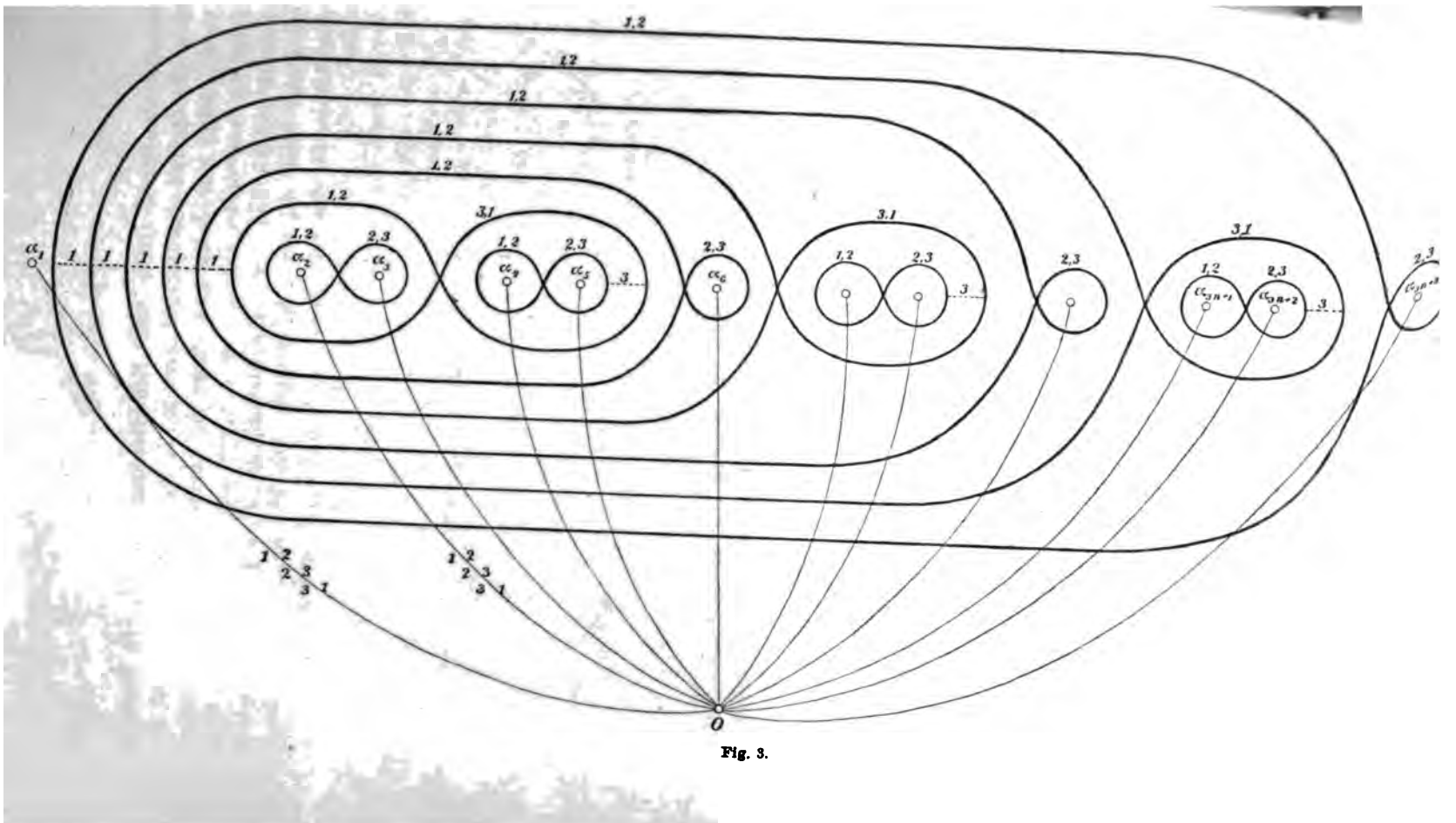

1,2
1,2
1,2
1,2
1,2
1,2
1,2
2,3
3,1
1,2
2,3
3
2,3
3,1
1,2
2,3
3
2,3
3,1
1,2
2,3
3
2,3
1
1
1
1
1
1
1
2
2
3
3
1
1
2
2
3
3
1
O

Fig. 3.

Als Fundamentalintegrale 1. Gattung benutzen wir:

$$(7)\qquad \omega = -\int \frac{(x\,dx)}{s(x_1|x_2)}, \qquad w_\gamma = \int \frac{\varphi_\gamma(x_1|x_2)}{s(x_1|x_2)}\,d\omega, \quad \gamma = 1,2,3,$$

wo φ_1, φ_2, φ_3 drei linear unabhängige quadratische Linearformen sind, für die man passend drei quadratische Covarianten von $f(x_1|x_2)$ wählen wird, während ω schon ohnehin eine Covariante vom Gewichte -1 der Form sechster Ordnung $f(x_1|x_2)$ ist. Die Bezeichnung der Periodicitätsmoduln dieser vier Integrale ist aus der folgenden Tabelle zu ersehen:

(8)

an	$+\ -$ $\omega - \omega$	$+\ -$ $w_\gamma - w_\gamma$
a_ν	Γ_ν	$C_{\gamma\nu}$
b_ν	Γ'_ν	$C'_{\gamma\nu}$

$\nu = 1, 2, 3, 4,$
$\gamma = 1, 2, 3.$

Beachtet man nun, dass nach Art. 1 die Werthe von s in drei congruent übereinander liegenden Punkten der Fläche T sich verhalten wie $\varrho : \varrho^2 : \varrho^3$, so liest man aus Figur 1 sofort folgende Relationen ab:

$$(9)\qquad \Gamma'_\nu = \varepsilon_\nu \varrho \Gamma_\nu, \qquad C'_{\gamma\nu} = \varepsilon_\nu \varrho^2 C_{\mu\nu},$$

wo

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1, \quad \varepsilon_4 = +1,$$

zu denen wir noch andere fügen werden.

6. Wir zerlegen ω und seine Periodicitätsmoduln in die reellen und imaginären Bestandtheile:

$$(10)\qquad \omega = \xi + i\eta, \quad \Gamma_\nu = p_\nu + iq_\nu, \quad \Gamma'_\nu = p'_\nu + iq'_\nu.$$

Dann ist nach (9):

$$p'_\nu + iq'_\nu = \left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{i}{2}\underset{+}{\sqrt{3}}\right)(p_\nu + iq_\nu)\,\varepsilon_\nu,$$

also:

$$(11)\qquad p'_\nu = -\tfrac{1}{2}\varepsilon_\nu\left[p_\nu + \underset{+}{\sqrt{3}}\,q_\nu\right], \quad q'_\nu = -\tfrac{1}{2}\varepsilon_\nu\left[q_\nu - \underset{+}{\sqrt{3}}\,p_\nu\right].$$

Integrirt man positiv um die gesammte Berandung, so ist

$$\int_{(T)} \xi\,d\eta = \sum_\nu \begin{vmatrix} p_\nu, & p'_\nu \\ q_\nu, & q'_\nu \end{vmatrix} = -\tfrac{1}{2}\sum_\nu \varepsilon_\nu \begin{vmatrix} p_\nu, & p_\nu + q_\nu\sqrt{3} \\ q_\nu, & q_\nu - p_\nu\sqrt{3} \end{vmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{2}\underset{+}{\sqrt{3}}\sum \varepsilon_\nu (p_\nu^2 + q_\nu^2),$$

also:

$$(12)\qquad \int_{(T)} \xi\,d\eta = \tfrac{1}{2}\underset{+}{\sqrt{3}}\sum_\nu \varepsilon_\nu\,(\text{Mod. }\Gamma_\nu)^2.$$

Bildet man die einfach zusammenhängende Fläche T mittels $\omega = \xi + i\eta$

über eine (ξ, η)-Ebene ab, so stellt das soeben berechnete Integral offenbar den Flächeninhalt dieses Bildes dar und ist, da ω als Integral 1. Gattung nicht ∞ wird, eine endliche, von Null verschiedene positive Zahl; also nach (12):

$$\frac{1}{2}\sqrt{3}\sum_{\nu}\varepsilon_\nu\,(\text{Mod. }\Gamma_\nu)^2 > 0,$$

und wegen (12):

(13) $$(\text{Mod. }\Gamma_4)^2 > (\text{Mod. }\Gamma_1)^2 + (\text{Mod. }\Gamma_2)^2 + (\text{Mod. }\Gamma_3)^2.$$

Dieselbe Ueberlegung ergiebt, auf w_γ angewandt,

(14) $$(\text{Mod. } C_{\gamma 4})^2 < (\text{Mod. } C_{\gamma 1})^2 + (\text{Mod. } C_{\gamma 2})^2 + (\text{Mod. } C_{\gamma 3})^2, \quad \gamma = 1, 2, 3,$$

wovon wir jedoch weiter keinen Gebrauch machen werden. Dagegen schliessen wir aus (13), dass die weiter unten zu verwerthende Grösse

(15) $$\Delta = \sum_{\nu}\varepsilon_\nu\Gamma_\nu^2 = -(\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + \Gamma_3^2 - \Gamma_4^2)$$

von Null verschieden ist, denn aus $\Delta = 0$ würde im Widerspruch zu (13) folgen:

$$(\text{Mod. }\Gamma_4)^2 \leq (\text{Mod. }\Gamma_1)^2 + (\text{Mod. }\Gamma_2)^2 + (\text{Mod. }\Gamma_3)^2.$$

7. Nach einer bekannten Schlussweise ist, wenn man wiederum über die ganze Berandung von T integrirt,

$$\int_{(T)} w_\gamma\, d\omega$$

einerseits gleich

$$\sum_{\nu}\begin{vmatrix}\Gamma_\nu, & C_{\gamma\nu}\\ \Gamma'_\nu, & C'_{\gamma\nu}\end{vmatrix} = \sum_{\nu}\varepsilon_\nu\Gamma_\nu C_{\gamma\nu}(\varrho^2 - \varrho),$$

andererseits gleich Null, daher:

(16) $$\sum_{\nu}\varepsilon_\nu\Gamma_\nu C_{\gamma\nu} = 0, \qquad \gamma = 1, 2, 3.$$

Da die vier Integrale ω, w_1, w_2, w_3 linear unabhängig sind, so ist die Determinante

(17) $$D = |\, C_{1\nu},\ C_{2\nu},\ C_{3\nu},\ \Gamma_\nu\,|$$

ihrer Periodicitätsmoduln an den Querschnitten a_1, a_2, a_3, a_4 von Null verschieden. Sie ist aber auch die Auflösungsdeterminante der vier Gleichungen (15), (16), nämlich:

(18) $$\begin{cases} C_{11}\cdot\varepsilon_1\Gamma_1 + C_{12}\cdot\varepsilon_2\Gamma_2 + C_{13}\cdot\varepsilon_3\Gamma_3 + C_{14}\cdot\varepsilon_4\Gamma_4 = 0,\\ C_{21}\cdot\ \ " + C_{22}\cdot\ \ " + C_{23}\cdot\ \ " + C_{24}\cdot\ \ " = 0,\\ C_{31}\cdot\ \ " + C_{32}\cdot\ \ " + C_{33}\cdot\ \ " + C_{34}\cdot\ \ " = 0,\\ \Gamma_1\cdot\ \ " + \Gamma_2\cdot\ \ " + \Gamma_3\cdot\ \ " + \Gamma_4\cdot\ \ " = \Delta, \end{cases}$$

nach $\varepsilon_1\Gamma_1$, $\varepsilon_2\Gamma_2$, $\varepsilon_3\Gamma_3$, $\varepsilon_4\Gamma_4$, Daher:

$$D\cdot\varepsilon_\nu\Gamma_\nu = \Delta\cdot\frac{\partial D}{\partial\Gamma_\nu}, \tag{19}$$

und nun können wir zur Berechnung der Normalintegrale 1. Gattung übergehen, indem wir das Integral

$$u_\mu = a_1^{(\mu)}w_1 + a_2^{(\mu)}w_2 + a_3^{(\mu)}w_3 + a^{(\mu)}\omega = \sum_\gamma a_\gamma^{(\mu)}w_\gamma + a^{(\mu)}\omega \tag{20}$$

bilden und die Coefficienten a so zu bestimmen suchen, dass seine Periodicitätsmoduln

$$\text{an } a_\nu\text{:}\quad \overset{+}{u}_\mu - \overset{-}{u}_\mu = \sum_\gamma a_\gamma^{(\mu)}C_{\gamma\nu} + a^{(\mu)}\Gamma_\nu = \begin{bmatrix}\mu\\ \nu\end{bmatrix}\pi i \tag{21}$$

sind; wir schreiben:

$$\text{an } b_\nu\text{:}\quad \overset{+}{u}_\mu - \overset{-}{u}_\mu = \varepsilon_\nu\left\{\varrho^2\sum_\gamma a_\gamma^{(\mu)}C_{\gamma\nu} + \varrho a^{(\mu)}\Gamma_\nu\right\} = a_{\mu\nu}.$$

Dann ist:

$$a_{\mu\nu} = \varepsilon_\nu\left\{\varrho^2\begin{bmatrix}\mu\\ \nu\end{bmatrix}\pi i + (\varrho-\varrho^2)\,a^{(\mu)}\Gamma_\nu\right\},$$

worin wir noch den Coefficient $a^{(\mu)}$ zu bestimmen haben. Nach (21) ist:

$$a^{(\mu)}\Gamma_\nu + \sum_\gamma a_\gamma^{(\mu)}C_{\gamma\nu} = \begin{bmatrix}\mu\\ \nu\end{bmatrix}\pi i,$$

daher mit Rücksicht auf (17) und (19)

$$D\,.\,a^{(\mu)} = \sum_\nu\begin{bmatrix}\mu\\ \nu\end{bmatrix}\pi i\cdot\frac{\partial D}{\partial\Gamma_\nu} = \frac{D}{\Delta}\pi i\sum_\nu\begin{bmatrix}\mu\\ \nu\end{bmatrix}\varepsilon_\nu\Gamma_\nu.$$

Geben wir jetzt dem Symbol $\begin{bmatrix}\mu\\ \nu\end{bmatrix}$ die Bedeutung 1 für $\mu=\nu$ und den Werth 0 für $\mu\gtrless\nu$, so ist

$$a^{(\mu)} = \frac{\pi i\,\varepsilon_\mu\Gamma_\mu}{\Delta},$$

und

$$a_{\mu\nu} = \varepsilon_\nu\varrho^2\begin{bmatrix}\mu\\ \nu\end{bmatrix}\pi i + (\varrho-\varrho^2)\pi i\cdot\frac{\varepsilon_\mu\varepsilon_\nu\Gamma_\mu\Gamma_\nu}{\Delta} = \frac{1}{2}(\varepsilon_\mu+\varepsilon_\nu)\varrho^2\begin{bmatrix}\mu\\ \nu\end{bmatrix}\pi i$$
$$+ (\varrho-\varrho^2)\pi i\,\frac{\varepsilon_\mu\varepsilon_\nu\Gamma_\mu\Gamma_\nu}{\Delta},$$

indem $\varepsilon_\nu\begin{bmatrix}\mu\\ \nu\end{bmatrix}$ wegen der angegebenen Bedeutung von $\begin{bmatrix}\mu\\ \nu\end{bmatrix}$ durch den in μ und ν symmetrischen Ausdruck $\frac{1}{2}(\varepsilon_\mu+\varepsilon_\nu)\begin{bmatrix}\mu\\ \nu\end{bmatrix}$ ersetzt werden kann, und somit haben wir das schöne Resultat:

$$a_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\varepsilon_\mu+\varepsilon_\nu)\varrho^2\begin{bmatrix}\mu\\ \nu\end{bmatrix}\pi i + (\varrho-\varrho^2)\pi i\cdot\frac{\varepsilon_\mu\varepsilon_\nu\Gamma_\mu\Gamma_\nu}{\Delta} \tag{22}$$

worin die Periodicitätsmoduln der Normalintegrale 1. Gattung als homogene Functionen der Dimension Null von $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ dargestellt sind.

Als absolute Invarianten unseres algebraischen Gebildes können somit die drei Quotienten

$$\omega_1 = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_4}, \quad \omega_2 = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_4}, \quad \omega_3 = \frac{\Gamma_3}{\Gamma_4} \tag{23}$$

dienen, während die Γ nach Art. 5 relative Invarianten sind. Dann haben wir die versprochene Darstellung der $a_{\mu\nu}$ durch die drei „Moduln“:

$$a_{\mu\nu} = \frac{\varepsilon_\mu + \varepsilon_\nu}{2}\varrho^2\begin{bmatrix}\mu\\ \nu\end{bmatrix}\pi i + (\varrho-\varrho^2)\pi i \cdot \frac{\varepsilon_\mu\varepsilon_\nu\omega_\mu\omega_\nu}{1-\omega_1^2-\omega_2^2-\omega_3^2}, \quad \omega_4 = 1 \tag{24}$$

die auch die bekannte Beziehung $a_{\nu\mu} = a_{\mu\nu}$ erkennen lässt. Nach (13) ist:

$$|\omega_1^2| + |\omega_2^2| + |\omega_3^2| < 1. \tag{25}$$

Aus (24) folgt noch:

$$a_{\nu\nu} = \varepsilon_\nu\varrho^2\pi i + (\varrho-\varrho^2)\pi i\frac{\omega_\nu^2}{1-\omega_1^2-\omega_2^2-\omega_3^2},$$

also:

$$a_{44} - a_{33} - a_{22} - a_{11} = 4\varrho^2\pi i + (\varrho-\varrho^2)\pi i = (\varrho+3\varrho^2)\pi i,$$

folglich:

$$a_{44} = a_{11} + a_{22} + a_{33} + (\varrho+3\varrho^2)\pi i. \tag{26}$$

Auch findet man leicht:

$$\text{für} \quad \mu \gtrless \nu: \quad a_{\mu\nu}^2\,[a_{\mu\mu} - \varepsilon_\mu\varrho^2\pi i]\cdot[a_{\nu\nu} - \varepsilon_\nu\varrho^2\pi i] \tag{27}$$

Mit den $a_{\mu\nu}$ wird auch die ϑ-Function von den $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ abhängig; die quadratische Form im Exponenten des allgemeinen Gliedes der ϑ-Reihe ist:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=4}\sum_{\nu=1}^{\nu=4} a_{\mu\nu}n_\mu n_\nu = -\varrho^2\pi i(n_1^2+n_2^2+n_3^2-n_4^2) + (\varrho-\varrho^2)\pi i\,\frac{(\omega_1 n_1+\omega_2 n_2+\omega_3 n_3-n_4)^2}{1-\omega_1^2-\omega_2^2-\omega_3^2}, \tag{28}$$

und legt die Frage nahe, ob nicht die ϑ-Function im vorliegenden Falle einer Modification bedürftig und fähig ist, welche sie mehr der Natur unseres algebraischen Gebildes anpasst.

Strassburg i. E., 5. December 1898.

Sopra le superficie algebriche che contengono un fascio di curve razionali.

Di

Federigo Enriques a Bologna.*)

Una serie (algebrica) di curve (algebriche) sopra una superficie algebrica

$$f(x\,y\,z) = 0$$

dicesi costituire un *fascio* allorchè ogni punto generico della superficie appartiene ad *una* curva della serie.

Facendo astrazione dalle eventuali componenti fisse, un fascio di curve C sopra la superficie $f = 0$, può essere definito mediante due funzioni razionali

$$X(xyz), \quad Y(xyz),$$

legate fra loro da una relazione algebrica

$$\varphi(X\,Y) = 0,$$

le quali assumono lo stesso valore nei punti di una curva C.

Il genere p della relazione $\varphi = 0$ è il *genere del fascio;* se $p = 0$ il fascio è razionale o *lineare,* e le due funzioni X, Y possono venir sostituite da una sola.

Si abbia sopra la superficie $f = 0$ un fascio di curve C, irriducibili, razionali; vale a dire, rappresentato il fascio nel modo anzidetto, supponiamo che la curva generica C data dalle equazioni

$$f = 0, \quad X = X(xyz), \quad Y = Y(xyz), \tag{1}$$

sia irriducibile, razionale. Allora le coordinate dei punti di essa si possono esprimere razionalmente per un parametro Z, colle formule

$$x = \Phi_1(Z), \quad y = \Phi_2(Z), \quad z = \Phi_3(Z); \tag{2}$$

e così ogni curva C del fascio (corrispondente ad una coppia generica $X\,Y$) si può pensare riferita punto per punto ad una retta, generatrice

*) Questo articolo è un rifacimento, con alcune semplificazioni, di due note pubblicate nei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei; Novembre, Decembre 1898.

del cilindro $\varphi(XY) = 0$. Dopo ciò sembra, a prima vista, che la superficie $f = 0$ risulti trasformata birazionalmente nel cilindro nominato. Ma questa deduzione non è affatto legittima, perchè la rappresentazione di una curva $C \equiv (XY)$ sopra la retta omologa, dipenderà in generale da alcune *irrazionalità aritmetiche*, che entreranno nei coefficienti delle funzioni Φ, e queste irrazionalità potranno variare colla C, dipendendo *algebricamente* da X, Y.

Si presentano pertanto due questioni che il sig^r Noether ha studiate nella memoria „Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen"*):

1) Assegnare le irrazionalità aritmetiche da cui può farsi dipendere la rappresentazione parametrica di una curva razionale C, con funzioni razionali di un parametro.

Il sig^r Noether ha risposto completamente a tale questione, facendo vedere che ogni curva razionale può sempre essere trasformata, con una sostituzione razionale a coefficienti razionali, in una conica; e quindi l'irrazionalità di cui si tratta è, tutt' al più, un radicale quadratico. Da ciò segue, in particolare, che una superficie contenente un fascio di curve razionali può essere trasformata birazionalmente in una superficie contenente un fascio di coniche.

2) Vedere se, e come, le irrazionalità aritmetiche che entrano nella rappresentazione razionale di una curva C, possono scegliersi in guisa che risultino indipendenti dalla curva (o conica) C, considerata nel fascio, ossia da X, Y.

Il sig^r Noether ha dimostrato che a tal fine occorre determinare una curva unisecante le C; ed ha determinato effettivamente una tale unisecante pel caso $(p = 0)$ in cui il fascio delle C sia lineare, dimostrando pertanto che, in questo caso, la superficie $f = 0$ è razionale. La determinazione di una curva unisecante le (coniche) C, nel caso $p > 0$, curva di cui l'esistenza restava dubbia**), viene stabilita in questo lavoro. Così rimane dimostrato in generale il teorema:

Ogni superficie algebrica $f(xyz) = 0$ *contenente un fascio di curve*

*) Cfr. questi Annalen, Bd. III.

**) Posteriormente al lavoro citato del sig^r Noether, la questione non ha ricevuto alcun contributo notevole, all' infuori di quello portato dal sig^r Painlevé nelle sue belle „Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles", relativo al caso in cui le curve (razionali) C sieno le traiettorie di un gruppo semplicemente infinito di trasformazioni birazionali della superficie $f = 0$, in sè stessa. Ma la dimostrazione del sig^r Painlevé si appoggia in sostanza sul fatto, che sopra ogni curva C si hanno allora due punti *uniti*, i quali descrivono due curve separate, unisecanti le C. E, viceversa, per costruire il gruppo nominato, occorre conoscere le due curve (unisecanti) di punti uniti. Così, per quanto riguarda la questione generale qui trattata, non si poteva trarre aiuto dal resultato del sig^r Painlevé.

razionali, si può trasformare birazionalmente in una rigata (p. e *in un cilindro* $\varphi(XY) = 0$), avente il genere p del fascio.

1. Sia F una superficie contenente un fascio di coniche C, avente un certo genere p.

Questa superficie si può rappresentare sopra una rigata doppia φ, giacchè ogni conica C del fascio può essere riferita ad una retta doppia per proiezione da un punto esterno, e tale operazione si può compiere in modo razionale dati i coefficienti dell' equazione della conica, ossia razionalmente per tutte le coniche del fascio.

La rigata doppia φ possederà una curva di diramazione costituita da una curva K bisecante le generatrici, e da un certo numero di generatrici $a_1 a_2 \ldots a_\varrho$. Si può supporre che la K sia irriducibile, giacchè se essa fosse spezzata in due curve, unisecanti le generatrici di φ, a ciascuna di esse corrisponderebbe sopra F una curva unisecante le C, la quale permetterebbe di rappresentare la F sopra una rigata (semplice).

Supposto che la curva K possieda dei punti singolari, ci si può sempre ridurre al caso in cui siffatte singolarità non esistono. Infatti si trasformi la K in una curva K' priva di singolarità, in uno spazio S_r; unendo le coppie di punti di K' che corrispondono alle coppie di K poste sulle generatrici di φ, si può costruire una nuova rigata φ' in corrispondenza birazionale con φ*), sopra cui la F risulta rappresentata doppiamente; e la curva K' insième a qualche generatrice di φ' costituirà la curva di diramazione della nuova rigata doppia φ'.

Supporremo dunque addirittura che la curva K (curva di diramazione di φ) sia priva di punti singolari. La curva K, il cui genere denoteremo con π, apparterrà ad un certo spazio S_r, ed avrà, in esso, un certo ordine n. Essa può sempre trasformarsi in un' altra curva (normale) K' avente un certo ordine n', arbitrariamente grande, ed appartenente ad uno spazio $S_{r'}$ la cui dimensione $r' = n' - \pi$. Allora, come è stato indicato, si trasforma anche la rigata φ in una nuova rigata doppia φ' (normale in $S_{r'}$). Le generatrici di φ' che vengono a far parte delle nuova curva di diramazione sono in generale quelle che corrispondono ad $a_1 \ldots a_\varrho$, più quelle che corrispondono a punti (fondamentali) della curva K; si può dunque evitare l'esistenza di queste ultime generatrici di diramazione, operando opportunamente la trasformazione di K in K', p. e. scegliendo come sistema trasformante (da riferirsi proiettivamente al sistema degli iperpiani di $S_{r'}$) il sistema di tutte le varietà V^m_{r-1} dello S_r, aventi un certo ordine m abbastanza alto.

La possibilità della indicata trasformazione ci permette di attribuire

*) Per tale costruzione cfr. Segre „Courbes et surfaces réglées algébriques" II. pag. 4. Questi Annalen, Bd. XXXIV.

senz' altro alla curva di diramazione della rigata doppia φ la proprietà di essere composta

a) di un certo numero ϱ di generatrici $a_1 \ldots a_\varrho$;

b) di una curva K di genere π, irriducibile, senza singolarità, bisecante le generatrici di φ, avente un ordine n arbitrariamente grande, in confronto ai valori indipendentemente fissati di π e ϱ, ed appartenente ad uno spazio S_r di dimensione $r = n - \pi$.

Siccome $n + \varrho$ è l'ordine della totale curva di diramazione per la rigata doppia φ, i numeri n e ϱ avranno la stessa parità.

2. Si considerino ora gli $\infty^{r-\varrho}$ iperpiani di S_r che passano per ϱ punti scelti fra le intersezioni di K colle generatrici $a_1 \ldots a_\varrho$, una sopra ciascuna generatrice. Gli iperpiani nominati segheranno sopra K una serie lineare $g^{r-\varrho}_{n-\varrho}$. Fra i detti iperpiani ve ne saranno alcuni tangenti in $\frac{n-\varrho}{2}$ punti alla K (fuori dei punti fissati sopra $a_1 \ldots a_\varrho$), purchè si abbia

$$r - \varrho \geq \frac{n-\varrho}{2}.$$

Questa disuguaglianza supposta soddisfatta (come può farsi prendendo $n \geq 2\pi + \varrho$), la effettiva determinazione degli iperpiani voluti dipende, come è noto, da un problema di bisezione, delle funzioni abeliane inerenti alla curva K.

Ora alla sezione di φ con uno degli iperpiani costruiti (tangente, ovunque la incontra, alla curva di diramazione della rigata doppia φ), corrisponde sopra F una curva Θ, bisecante le coniche C del fascio (di genere p) dato su F, ed avente il genere (minimo per le bisecanti)

$$P = 2p - 1;$$

ciò risulta dalla nota formula di corrispondenza del sig^r Zeuthen, poichè la curva stessa possiede una involuzione di genere p di coppie di punti, priva di elementi di coincidenza.

La curva Θ può spezzarsi in due curve di genere p, unisecanti le coniche C; anzi ciò accade sempre se $p = 0$; in questo caso si ottiene subito la rappresentazione della superficie F, punto per punto, sopra una rigata.

3. La curva Θ incontra una conica C generica in due punti A, B; le tangenti in A, B s'incontrano in un certo punto O; da O la conica stessa può essere proiettata sopra una retta doppia. Siccome tale operazione si compie razionalmente per ogni C, essa conduce a rappresentare la superficie F sopra una rigata doppia Φ, in modo che la curva di diramazione di Φ sia composta mediante una curva Θ' corrispondente alla Θ, più qualche generatrice.

Allora applicando alla Φ, in relazione alla Θ', i ragionamenti svolti innanzi per la φ, si può costruire sopra F una nuova curva

bisecante λ, di genere minimo $P = 2p - 1$, corrispondente ad una curva unisecante le generatrici di Φ. Questa curva λ è con Θ in una semplice relazione: le coppie di punti segate da Θ e da λ sopra una conica C (del fascio dato su F) si separano armonicamente. Tale relazione può essere espressa dicendo che le curve Θ e λ sono due *bisecanti armoniche* del fascio di coniche C.

Concludiamo pertanto che „sopra una superficie F possedente un fascio, di genere p, di coniche, si possono costruire due bisecanti armoniche aventi il genere minimo

$$P = 2p - 1".$$

Se una di queste è spezzata in due unisecanti, la F può riferirsi ad una rigata. Supporremo dunque che ambedue le curve sieno irriducibili ($p > 0$).

4. Le due curve si possono rappresentare doppiamente sopra uno stesso ente algebrico ∞^1 γ, di genere p, privo di elementi di diramazione; basta infatti considerare come ente γ il fascio delle coniche C, e far corrispondere ad ogni C (che è un elemento di γ) la coppia dei punti, della Θ o della λ, che si trovano su di essa.

Ad ogni serie lineare g'_n, presa su γ, corrisponde su Θ (e su λ) una serie lineare g'_{2n} composta colle coppie che corrispondono agli elementi di γ (coppie formanti un' involuzione che denoteremo collo stesso nome „γ"). In particolare può darsi che la detta g'_{2n} sia composta mediante una g'_n autoconiugata rispetto all' involuzione γ, ossia può darsi che ogni gruppo della g'_{2n} sia composto di due gruppi G_n, appartenenti ad una medesima g'_n, coniugati nell' involuzione nominata.

Come dimostreremo più tardi, è sempre possibile di scegliere sull' ente γ una g'_n cui corrisponda tanto sulla curva Θ come sulla λ una g'_{2n} composta mediante una g'_n autoconiugata. Poniamo di avere scelto una g'_n siffatta. Alla g'_n di γ corrisponde sulla superficie F un fascio *lineare* $|L|$ di curve riducibili L, ogni curva del fascio essendo composta di n coniche C; indichiamo con $C_1 C_2 \ldots C_n$ le coniche costituenti insième una curva generica L del detto fascio lineare.

Ci proponiamo di costruire sopra la superficie F una involuzione I_n, di gruppi di n punti, alla quale il nominato fascio $|L|$ appartenga, vale a dire una involuzione I_n siffatta che il gruppo G_n individuato da un punto di C_1, abbia un punto sopra C_2, uno sopra $C_3 \ldots$ uno sopra C_n.

La costruzione di una tale I_n esige che le curve $C_1 C_2 \ldots C_n$ vengano riferite l'una all' altra in un riferimento proiettivo, che sia razionalmente determinato allorchè è dato il gruppo di coniche $C_1 C_2 \ldots C_n$. Si può stabilire un riferimento siffatto per mezzo delle curve Θ e λ. Consideriamo infatti ad es. le due coniche C_1 e C_2. Indichiamo con

A, B le intersezioni di C_1 con Θ, e con E, F le intersezioni della stessa C_1 con λ. Per ipotesi le coppie di punti segate da Θ su $C_1 C_2 \ldots C_n$ si distribuiscono in *due* gruppi G_n, di una g'_n, coniugati rispetto alla involuzione γ; il punto A apparterrà ad *uno* di questi gruppi, il punto B all' altro. Allora si possono distinguere razionalmente le due intersezioni di C_2 con Θ, e chiamare A' il punto appartenente al gruppo G_n che contiene A, e B' il punto appartenente al G_n che contiene B. Similmente si possono distinguere le due intersezioni di C_2 con λ, coordinandole, in modo razionale, ai punti E, F, e chiamandole risp E', F'.

Ora esiste fra le due coniche C_1, C_2 un riferimento proiettivo determinato dalla corrispondenza delle coppie AA', BB', EE', FF', e ciò stante l'armonicità delle quaterne $ABEF$, $A'B'E'F'$.

In modo del tutto analogo vengono riferite proiettivamente, l'una all' altra, le n coniche del gruppo $C_1 C_2 \ldots C_n$, sicchè un punto, preso ad. es. sulla C_1, appartiene ad *un* gruppo G_n costituito dai punti omologhi ad esso su $C_2 \ldots C_n$. E al variare del gruppo $C_1 \ldots C_n$, ossia al variare della curva composta $L \equiv C_1 + \cdots + C_n$ entro il fascio lineare $|L|$, i nominati gruppi G_n formeramo una involuzione I_n, cui $|L|$ *appartiene* nel senso detto innanzi.

5. Ciò posto costruiamo una nuova superficie F', i punti della quale sieno in corrispondenza birazionale coi gruppi G_n dell' involuzione I_n definita sopra F. Ad ogni curva $L \equiv C_1 + \cdots + C_n$ di F, corrisponderà su F' una curva razionale L', irriducibile, in corrispondenza biunivoca con ciascuna delle coniche $C_1 \ldots C_n$; e le L' formeranno sopra F' un fascio lineare, come le L sopra F.

Ora, poichè appunto le curve razionali L' formano su F' un fascio lineare, si può costruire, nel modo indicato dal sig^r Noether o come al n^0 2, una curva χ' unisecante le L'. A questa curva corrisponderà sopra F una curva χ secante in n punti ciascuna L; ma la L essendo composta di n coniche $C_1 \ldots C_n$, le n intersezioni cadranno una su ciascuna conica, per modo che la χ sarà una curva unisecante per le coniche C del fascio, dato sopra F.

Per mezzo della χ la F può essere riferita punto per punto ad una rigata, di cui le generatrici corrispondono alle coniche C.

Pertanto la dimostrazione del teorema emenciato è compiuta.

6. Resta per altro da giustificare il lemma di cui abbiamo fatto uso:

Date due curve Θ e λ, di genere $P = 2p - 1$, contenenti una stessa involuzione γ di genere $p(>0)$, cioè riferite ad una medesima curva doppia o ente doppio γ, senza elementi di diramazione; si può determinare su γ una g'_n cui corrisponda, su ciascuna delle due curve Θ e λ, una g'_{2n} ciascun gruppo della quale sia composto con due gruppi (coniugati) di una g'_n, autoconiugata rispetto all' involuzione γ.

Questo enunciato sarebbe press' a poco evidente se le curve Θ e λ

potessero supporsi birazionalmente identiche; ma ciò non accadrà in generale, poichè esistono, secondo il sig^r Hurwitz*), $2^{2p} - 1$ curve di genere $P = 2p - 1$, birazionalmente distinte, rappresentate da una stessa curva doppia γ di genere p, senza elementi di diramazione.

Tuttavia la dimostrazione dell' enunciato si compie assai semplicemente, prendendo $n = 2P = 4p - 2$, nel modo seguente.

Si assuma sopra γ un arbitrario gruppo G_{2p-1}, di $2p - 1$ punti; esso appartiene ad una serie lineare completa g^{p-1}_{2p-1} (la cui dimensione è nulla nel caso $p = 1$); indichiamo la detta serie con s. Ad essa corrisponde su Θ una serie $s_1 \equiv g^{p-1}_{4p-2}$, di cui ciascun gruppo è composto con $2p - 1$ coppie dell' involuzione γ; la serie stessa è contenuta in una serie completa g^{2p-1}_{4p-1}. Ora mediante la serie g^{2p-1}_{4p-2} si trasformi la curva Θ in una curva Θ' d' ordine $4p - 2$ di un S_{2p-1}, riferendo proiettivamente gli elementi, gruppi, della serie agli iperpiani di questo spazio (per $p = 1$ la Θ' si riduce ad una retta doppia). Avremo una curva (Θ') trasformata in sè stessa da un' involuzione proiettiva, la γ; per questa involuzione si avrà un primo spazio S_{p-1} di punti uniti (non secante la curva), base pel sistema ∞^{p-1} degli iperpiani che segano sulla Θ' la serie s_1; esisterà dunque un secondo spazio S_{p-1} di punti uniti, e gli iperpiani per esso determineranno su Θ', e quindi su Θ, una seconda serie s_1', contenuta nella g^{2p-1}_{4p-2} completa, di cui ciascun gruppo sarà composto con $2p - 1$ coppie dell' involuzione γ.

Ora alla serie s_1' corrisponde su γ una serie completa $s \equiv g^{p-1}_{2p-1}$, diversa dalla s, e quindi non avente con essa alcun gruppo comune. Alla serie $'g^{2p-1}_{4p-2}$ di Θ corrisponde invece su γ una serie non lineare di gruppi di $4p - 2$ punti, la quale comprende entro di sè i gruppi della s e della s' contati due volte; questa serie non lineare è però contenuta in una serie lineare (completa) g^{3p-2}_{4p-2}, contenente le serie doppie della s e della s'.

Un gruppo G_{2p-1} di s, ed un gruppo G'_{2p-1} di s', contati due volte, appartengono dunque ad una serie lineare g'_{4p-2}. A questa g'_{4p-2} di γ, corrisponde sopra Θ una g'_{8p-4} ciascun gruppo della quale è composto con due gruppi coniugati (in γ) di una g'_{4p-2}, precisamente della g'_{4p-2} individuata dai gruppi G_{4p-2} e G'_{4p-2} corrispondenti a G_{2p-1} e G'_{2p-1}; infatti questi gruppi G_{4p-2} e G'_{4p-2}, appartenendo risp alle serie s_1 ed s_1', sono equivalenti; e poichè sono composti ciascuno di $2p - 1$ coppie di γ, determinano, su Θ, una g'_{4p-2} trasformata in sè stessa dall' involuzione γ, cui corrisponde sull' ente (doppio) γ la g'_{4p-2} innanzi nominata.

---

*) „Ueber Riemann'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten". Questi Annalen Bd. XXXIX.

Ripetendo gli stessi ragionamenti in relazione alla curva λ, otterremo ancora sull' ente doppio γ un' altra serie completa $s'' \equiv g^{p-1}_{2p-1}$, diversa da s, tale che un qualsiasi gruppo G di s ed un qualsiasi gruppo G'' di s'', contati due volte, determineranno su γ una g'_{4p-2}, cui corrisponderà su λ una g'_{8p-4}, ciascun gruppo della quale sarà composto con due gruppi (coniugati) di una g'_{4p-2} autoconiugata rispetto all' involuzione γ.

Ora le serie complete s' ed s'', di γ, non hanno gruppi comuni oppure coincidono. Nel secondo caso (che si presenta se Θ e λ sono curve birazionalmente identiche), la g'_{4p-2} di γ cui corrisponde tanto su Θ come su λ una g'_{8p-4} composta con una g'_{4p-2} autoconiugata, è determinata senz' altro da due gruppi G, G', presi risp in s, s', contati due volte. Nel caso generale avremo invece su γ, tre serie complete g^{p-1}_{2p-1}: s, s', s'', senza gruppi comuni, che contate due volte saranno contenute in una stessa g^{3p-2}_{4p-2} (serie completa doppia di s). E pel nostro scopo basterà costruire, entro la detta g^{3p-2}_{4p-2} di γ, una g'_{4p-2} la quale contenga tre gruppi di $2p-1$ punti ciascuno, contati due volte, ed appartenenti risp alle serie s, s', s''; infatti ad una tale g'_{4p-2} corrisponderà tanto sopra Θ come sopra λ, una g'_{8p-2}, composta colle coppie di gruppi di una g'_{4p-2} autoconiugata.

Ora si riferiscano proiettivamente gli elementi (gruppi) della g^{3p-2}_{4p-2} di γ, ai punti di un S_{3p-2}; entro questo spazio si avranno tre varietà V_{p-1}, di dimensione $p-1$, i cui punti corrispondono ai gruppi delle serie s, s', s'', contati due volte; e le tre V_{p-1} non avranno punti comuni. Una retta di S_{3p-2} la quale si appoggi in 3 punti (necessariamente distinti) alle tre varietà V_{p-1}, darà entro la g^{3p-2}_{4p-2}, la serie g'_{4p-2} domandata; e di rette siffatte, incidenti alle tre V_{p-1}, ve ne sarà certo un numero finito, anzi un numero uguale al prodotto degli ordini delle tre varietà.

Nel caso $p = 1$ il ragionamento svolto è ancora applicabile con lievi modificazioni di parole. Ma, poichè in questo caso Θ e λ sono curve ellitiche, come l'involuzione (o l'ente doppio) γ, il ragionamento si può presentare più semplicemente nella forma seguente: Ad ogni g_2' presa sull' ente γ, corrisponde tanto su Θ come su λ una g_4', la quale (in due modi) si può riguardare come composta colle coppie (coniugate in γ) di una g_2'; e ciò stante la ben nota permutabilità di un' involuzione ellittica (γ) e di un' involuzione razionale (g_2') sopra una curva ellittica.

Bologna, Gennaio 1899.

Un nuovo teorema sopra le quartiche piane generali,

di

G. Scorza a Pisa.

Data una quartica piana generale, vi sono infiniti punti che hanno per cubica polare rispetto ad essa una cubica equianarmonica, ed è ben noto che il loro luogo costituisce una nuova quartica detta *covariante S* della primitiva*). Ora qui si vuol dimostrare che:

Ogni quartica piana generale può pensarsi come covariante S di altre 36 (*soltanto*), *corrispondentemente ai suoi* 36 *sistemi di cubiche seitangenti* (*di* 2^a *specie*) *i cui punti di contatto non giacciono mai sopra una medesima conica.*

1. Si riferiscano proiettivamente i punti di un piano alle quadriche di una rete alla maniera di Hesse**): i punti del piano cui corrispondono coni della rete costituiranno una quartica generale C^4, mentre i vertici dei coni medesimi saranno situati sopra una curva gobba del sesto ordine, Γ^6; quindi fra le due curve C^4 e Γ^6 verrà per tal modo stabilita spontaneamente una corrispondenza biunivoca. A proposito della quale, ricordiamo che ai sei punti ove Γ^6 è tagliata da un piano qualunque dello spazio corrispondono i sei punti di contatto di C^4 con una sua cubica seitangente di 2^a specie appartenente a un determinato sistema Σ (che è poi uno qualunque dei 36 sistemi di cubiche seitangenti di 2^a specie).

2. Allora sia A' un punto qualunque di Γ^6 ed A il punto corrispondente di C^4. I piani polari di A' rispetto alle quadriche della rete costituiscono un fascio, e l'asse di questo fascio è una trisecante di Γ^6***); quindi se A'_1, A'_2, A'_3 sono i punti ove questa trisecante taglia Γ^6 ed A_1, A_2, A_3 sono i punti corrispondenti di C^4, ad ogni punto A di C^4 si viene a far corrispondere un triangolo $A_1A_2A_3$ inscritto nella curva medesima. Diciamo $A_1A_2A_3$ il *triangolo relativo*

*) Cfr. Clebsch, Ueber Curven vierter Ordnung. Crelle's Journal Bd. 59.

**) Hesse, Ueber die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung. Crelle's Journal Bd. 49.

***) Cfr. Reye, Die Geometrie der Lage. III. Abtheilung, pag. 138.

al punto A: poichè ogni piano per la detta trisecante è polare di A' rispetto a un fascio di quadriche della rete e quindi insieme a certi altri tre piani passanti per A' dà un tetraedro autopolare per quel fascio, è chiaro che i punti $A_1A_2A_3$ insieme ad altri tre punti qualunque della quartica C^4 allineati con A danno i sei punti di contatto di una cubica seitangente del sistema Σ. Ond' è che la relazione fra un punto A e il triangolo relativo $A_1A_2A_3$ può anche esprimersi dicendo che $A_1A_2A_3$ sono i tre ulteriori punti ove una cubica del sistema Σ che tocca C^4 in tre punti qualunque allineati con A tocca ulteriormente la quartica medesima*).

Orbene, dico che esiste una quartica ed una sola, tale che C^4 è il suo covariante S e che ogni punto A di C^4 ha per trilatero polohessiano rispetto ad essa il trilatero relativo $A_1A_2A_3$.

3. Consideriamo dapprima un caso particolare e supponiamo che la quartica C^4 sia una quartica di Lüroth**): allora può supporsi, avendo riguardo a un sistema di cubiche seitangenti di 2ª specie ben determinato, che la sestica gobba Γ^6, cui C^4 vien riferita biunivocamente, sia circoscritta a ∞^1 pentaedri completi, polari per le quadriche della rete di cui Γ^6 è la Jacobiana***).

Sia $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5$ uno di questi pentaedri completi e consideriamo il tetraedro $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$. Rispetto al cono della rete, che ha il vertice in $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, il punto $\alpha_1\alpha_2\alpha_4$ ha per piano polare un piano che deve passare per il punto $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ e per la retta $\alpha_3\alpha_5$ (poichè il pentaedro $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5$ è polare per un tal cono), e che quindi coincide col piano α_3. Così, rispetto al cono medesimo, i punti $\alpha_1\alpha_3\alpha_4$, $\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ hanno per piani polari i piani α_2 ed α_1. Segue che il triedro $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ è autoconiugato rispetto a quel cono: e ripetendo il ragionamento per i coni della rete che hanno i vertici in $\alpha_1\alpha_2\alpha_4$, $\alpha_1\alpha_3\alpha_4$, $\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ si conclude che il tetraedro $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ è autopolare per i quattro coni della rete che hanno i vertici nei vertici del tetraedro medesimo.

---

*) Cfr. ad es., Pascal, Sulla teoria delle funzioni σ abeliane pari a tre argomenti, Mem. IV, § 5 (Annali di Matematica, serie II, Tomo XVIII) [secondo Lezioni di F. Klein].

**) Per brevità di discorso chiamo *quartica di Lüroth* una quartica nella quale sia inscritto un pentalatero completo, dopo di che ve ne sono inscritti infiniti altri, e *quartica di Clebsch* una quartica dotata di pentalateri polari. — Ogni quartica di Clebsch ha per covariante S una quartica di Lüroth, ed inversamente (Lüroth, Einige Eigenschaften einer gewissen Gattung von Curven vierter Ordnung. Math. Ann. Bd. 1; e, Neuer Beweis des Satzes, dass nicht jeder Curve vierter Ordnung ein Fünfseit eingeschrieben werden kann. Ibid. Bd. 13).

***) Cfr. Frahm, Bemerkung über das Flächennetz zweiter Ordnung. Math. Ann. Bd. 7. Donde risulta l'inesattezza di una asserzione del Reye contenuta nel nº 23 della sua Memoria intitolata: Ueber Polfünfecke und Polsechsecke räumlicher Polarsysteme, e inserita nel vol. 77 del giornale di Crelle.

D'altra parte il tetraedro $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ non può essere autopolare per tutte le quadriche della rete (altrimenti questa conterrebbe quattro fasci di coni coi vertici nei quattro vertici del tetraedro e quindi C^4 si spezzerebbe in quattro rette), dunque quei quattro coni formano un fascio, e i dieci punti di C^4, che corrispondono ai dieci punti di Γ^6 vertici di un pentaedro completo, costituiscono i vertici di un pentalatero completo inscritto in C^4. Allora, poichè C^4 è covariante S di una quartica di Clebsch C_1^4, e rispetto a C_1^4 ogni punto di C^4 ha per trilatero polohessiano il trilatero costituito dai tre lati rimanenti del pentalatero completo inscritto in C^4 di cui due lati passano pel punto considerato, segue immediatamente in questo caso particolare la verità della nostra asserzione, quando si osservi che in tal caso la trisecante, asse del fascio di piani polari di un punto di Γ^6, è precisamente lo spigolo opposto a quel punto nel (solo) pentaedro completo inscritto in Γ^6 che abbia un vertice in esso.

Ciò posto, se A e B sono due punti qualunque di C^4, dicansi rispettivamente $A_1A_2A_3$ e $B_1B_2B_3$ i loro *triangoli relativi* o i loro trilateri polohessiani rispetto a C_1^4: per una osservazione precedente, se C e D sono i due punti ove la retta AB taglia ulteriormente C^4, vi sono due cubiche seitangenti di C^4 appartenente allo stesso sistema che la toccano rispettivamente nei punti $A_1A_2A_3BCD$ e $B_1B_2B_3ACD$; e quindi per il noto teorema che i 12 punti di contatto di due cubiche seitangenti di uno stesso sistema di 2^a specie sono la completa intersezione della quartica con una terza cubica, segue senz' altro che i sei punti $A_1A_2A_3B_1B_2B_3$ sono sopra una conica passante per C e D. Abbiamo adunque il teorema:

*I due trilateri polohessiani di due punti qualunque A e B del covariante S di una quartica di Clebsch sono inscritti in una conica che passa anche pei due punti ove la retta AB taglia ulteriormente quel covariante**).

Esso può estendersi, come ora vedremo, al covariante S di una quartica qualunque.

Infatti se A, B, C, D sono i quattro punti ove una retta r taglia il covariante S di una quartica qualsivoglia, rispetto alle quartiche (costituenti un fascio), che hanno quattro contatti quadripunti colla quartica data sulla retta r, i quattro punti A, B, C, D hanno gli stessi trilateri polohessiani che rispetto a C^4, onde i covarianti S di quelle quartiche costituiscono ancora un fascio avente per punti-base i punti A, B, C, D e i dodici vertici dei loro quattro trilateri polohessiani. Di più il fascio di quartiche e il fascio dei loro covarianti S

*) Questo teorema, coi suoi casi particolari, è stato dimostrato direttamente dal Lüroth (l. cit). La dimostrazione che qui ne abbiano data ci pare che ponga il teorema medesimo nella sua vera luce.

sono proiettivi, e a quello appartiene una (sola) quartica di Clebsch, mentre a questo una (sola) quartica di Lüroth*), dunque applicando il teorema or ora dimostrato si ha che:

I trilateri polohessiani di due punti qualunque A e B del covariante S di una quartica qualunque sono inscritti in una conica che passa anche pei due punti ove la retta AB taglia ulteriormente quel covariante.

Facendo avvicinare infinitamente il punto B al punto A, si ha il teorema:

Se $A_1A_2A_3$ è il trilatero polohessiano di un punto A del covariante S di una quartica qualunque, vi è una conica che tocca quel covariante nei punti A_1, A_2, A_3 e che passa pei due punti ove esso è tagliato ulteriormente dalla sua tangente in A;

ed osservando che la conica di cui qui si parla insieme alla tangente al covariante S in A dà una cubica ad esso seitangente di 2ª specie, si ottiene facilmente il risultato di cui ci serviremo nel seguito:

I tre vertici del trilatero polohessiano di un punto A del covariante S di una quartica qualunque e tre punti del covariante medesimo allineati con A, danno i 6 punti di contatto di una sua cubica seitangente.

Infine se in un teorema precedente si prendono per A e B due vertici di un trilatero polohessiano qualunque si ha il notevole enunciato:

I sei punti ove il covariante S di una quartica qualunque è tagliato dai tre lati di un trilatero polohessiano fuori dei suoi vertici sono sopra una conica che tocca il covariante suddetto nel polo del trilatero considerato.

4. Adesso riprendiamo il caso generale e le notazioni del n° 2, e detti A, B, C, D i quattro punti ove una retta qualunque taglia la quartica considerata C^4, siano $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$, $D_1D_2D_3$ i *triangoli ad essi relativi* nel senso più sopra stabilito. Poichè i punti $A_1A_2A_3BCD$ e $B_1B_2B_3ACD$ sono punti di contatto di C^4 con due cubiche di 2ª specie appartenenti ad uno stesso sistema, i sei punti $A_1A_2A_3B_1B_2B_3$ apparterranno ad una conica passante per C e D e quindi i due triangoli $A_1A_2A_3$ e $B_1B_2B_3$ saranno circoscritti a un' altra conica K^2.

Allora se si considerano i due pentalateri completi costituiti dai trilateri $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ e dalle tangenti condotte a K^2 dai due punti A e B rispettivamente, essi sono polari per una quartica di Clebsch**) C_1^4, quindi sono inscritti in una quartica di Lüroth C_2^4,

---

*) Ho stabilito questo teorema in un mio lavoro dal titolo: *Sopra la teoria delle figure polari delle curve piane del 4° ordine*, pubblicato nel vol. 2° della 3ª serie degli Annali di Matematica.

**) Infatti fra le quarte potenze di 10 forme lineari che uguagliate a zero rappresentino dieci tangenti di una conica passa una relazione lineare omogenea

covariante S di C_1^4; di più i due punti A e B hanno per trilateri polohessiani rispetto a C_1^4 appunto i trilateri $A_1A_2A_3$ e $B_1B_2B_3$.

Ciò significa per un teorema precedente che la quartica C_2^4 passa anche pei due punti C e D; poi siccome il trilatero polohessiano di C (o D) rispetto a C_1^3 deve trovarsi con $A_1A_2A_3$ sopra una conica passante per B e D (o B e C) e con $B_1B_2B_3$ sopra una conica passante per A e D (o A e C), segue che tale trilatero è appunto $C_1C_2C_3$ (o $D_1D_2D_3$), perchè esso per una ragione già detta soddisfa appunto a questa condizione.

Dopo ciò è chiaro che la quartica considerata C^4 è covariante S di una determinata quartica C_3^4 avente quattro contatti quadripunti con C_1^4 sulla retta $ABCD$, e che rispetto a C_3^4 ogni punto di C^4 ha per trilatero polohessiano il *triangolo relativo*.

Quest' ultima proprietà è evidente pei quattro punti A, B, C, D e risulta subito per un quinto punto qualunque E di C^4 osservando che se F e G sono i due punti ove la retta AE taglia ulteriormente C^4, tanto il triangolo relativo ad E quanto il suo trilatero polohessiano debbono trovarsi sulla conica determinata dai cinque punti $A_1A_2A_3FG$.

5. Tenendo conto del penultimo teorema dimostrato al n° 3, e ricordando che il metodo di Hesse può applicarsi ad una quartica in 36 modi distinti corrispondentemente ai suoi 36 sistemi di cubiche seitangenti si ha senz' altro il teorema oggetto di questa Nota.

Pisa, li 17 gennaio 1899.

---

a coefficienti costanti. Cfr. Rosanes, Ueber ein Princip der Zuordnung algebraischer Formen, Crelle's Journal Bd. 76.

Note über analytische Functionen mehrerer Veränderlichen.

Von

W. F. Osgood in Cambridge (Mass.).

Satz: *Es möge $F(x, y)$ eine Function der unabhängigen Veränderlichen x, y sein, die für jedes Werthepaar (x, y) des Bereiches* (T): $|x| < R$, $|y| < S$ *eindeutig erklärt und, wie folgt, beschaffen ist:*

a) für jeden festen im Kreise $|x| = R$ (resp. $|y| = S$) gelegenen Werth von x (resp. y) soll $F(x, y)$ eine im Kreise $|y| = S$ (resp. $|x| = R$) analytische Function von y (resp. x) sein;

b) $F(x, y)$ soll im Bereich (T) *endlich bleiben; d. h. es soll*

$$|F(x, y)| < G$$

bleiben, wobei G eine von x, y unabhängige positive Grösse bedeutet und das Werthepaar (x, y) im Bereich (T) *beliebig angenommen wird. Dann ist $F(x, y)$ eine analytische Function der unabhängigen Veränderlichen x, y**).

Der Beweis stützt sich auf einen allgemeinen Satz, den man für den vorliegenden Zweck in folgender Weise aussprechen kann: *Ist $s(x, \alpha)$ für jeden Werth α, welcher einer (reellen oder complexen) Wertheменge mit Häufungsstelle $\bar{\alpha}$ angehört, eine im Innern des Kreises $|x| = R$ analytische Function von x, und convergirt $s(x, \alpha)$ gleichmässig gegen einen Grenzwerth, $\varphi(x)$, wenn α dem Werth $\bar{\alpha}$ zustrebt, so ist $\varphi(x)$ eine in diesem Kreise analytische Function von x.*

---

*) Die Frage, ob die Bedingung b) nicht von selbst erfüllt ist, ist noch nicht entschieden.

In der That lässt sich $F(x, y)$ zunächst in eine Potenzreihe nach y entwickeln:

$$F(x, y) = f_0(x) + f_1(x)y + f_2(x)y^2 + \cdots, \tag{1}$$

wobei $f_0(x) = F(x, 0)$ eine im Kreise $|x| = R$ analytische Function von x ist und

$$|f_n(x)| < GS_1^{-n}, \qquad (0 < S_1 < S).$$

Aber auch alle weiteren Coefficienten $f_n(x)$ sind in demselben Kreise analytische Functionen von x. Man nehme an, dies gälte für die ersten m Coefficienten und setze dann $(0 < |y| < S)$

$$\frac{F(x,y) - f_0(x) - f_1(x)y - \cdots - f_{m-1}(x)y^{m-1}}{y^m} = f_m(x) + f_{m+1}(x)y + \cdots.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist für jeden solchen Werth von y eine im Kreise $|x| = R$ analytische Function von x, während die rechte Seite, $\psi(x, y)$, gleichmässig gegen den Werth $f_m(x)$ convergirt, wenn y dem Werth Null zustrebt. Beschränkt man nämlich y, y' auf das Innere des Kreises $|y| = s$, $(0 < s < S_1)$, so erhält man die Relation:

$$\psi(x, y') - \psi(x, y)$$

$$= (y' - y)\left\{f_{m+1}(x) + \sum_{i=2}^{\infty} f_{m+i}(x)\,(y'^{i-1} + y'^{i-2}y + \cdots + y^{i-1})\right\},$$

$$|\psi(x, y') - \psi(x, y)| \leqq |y' - y| \sum_{i=1}^{\infty} i\,|f_{m+i}(x)|\,s^{i-1}$$

$$< |y' - y_i| \frac{G}{S_1^{m+1}}\left(1 - \frac{s}{S_1}\right)^{-2}.$$

Daraus ergiebt sich die gleichmässige Convergenz und der Grenzwerth, $f_m(x)$, erweist sich somit als eine analytische Function von x.

Endlich convergirt die Reihe (1), deren Glieder analytische Functionen der unabhängigen Veränderlichen x, y sind, im Bereich $|x| < R$, $|y| < s$ gleichmässig, denn

$$|f_n(x)y^n| < G\left(\frac{s}{S_1}\right)^n.$$

Daraus schliesst man, dass $F(x, y)$ im Bereich (T) eine analytische Function der unabhängigen Veränderlichen x, y ist. Denn zur Cauchy'schen Definition genügt, ausser den Voraussetzungen des Satzes, die nun vorhandene Stetigkeit der Function $F(x, y)$ im Bereich (T),

während andererseits die zur Weierstrass'schen Definition nothwendige Reihenentwicklung durch einen bekannten Weierstrass'schen Satz direct constatirt wird.

Der Verallgemeinerung des Satzes nebst Beweise auf den Fall, dass die Function $F(x_1, \ldots, x_k)$ von $k > 2$ Argumenten abhängt, stehen keine Schwierigkeiten im Wege.

Cambridge (Mass., U. S. A.), November 1898.

The Elastic Curve, under uniform normal pressure.

By

A. G. Greenhill of Woolwich (England).

The mathematical discussion of this problem, due originally to Maurice Lévy (*Comptes Rendus*, XCVII), is given by Halphen in his *Fonctions elliptiques* (F. E.) t. II, Chap. V, as affording an interesting application of Elliptic Functions to a mechanical problem.

The subject is of practical importance to the engineer, in the consideration of the stability of boiler tubes and flues, with the high pressure and temperature now employed, and also in its bearing on the buckling tendency of the steel plates of a ship, when required to be very thin, as in a torpedo boat.

In the present article the mathematical treatment of Halphen is resumed, as an exercise on the theory of the Elliptic Integral of the Third Kind; and some cases are worked out in which this integral is of the simplest *pseudo-elliptic* character, so that the form of this Elastic Curve can be calculated numerically by means of existing mathematical tables, including those given by Legendre of the Elliptic Integrals.

The reader is referred to articles in the *Proceedings of the London Mathematical Society* vol. XXV and XXVII (designated in the sequel by the abbreviations L. M. S. XXV, XXVII) for the development of the analysis of the results quoted in this article, which is intended to provide an additional mechanical application, in which the results are reduced to a shape in which numbers can be substituted immediately, as illustrated by the diagrams.

1. We start with Halphen's notation and formulas for Lévy's Elastic Curve (F. E. II, Chap. V)

$$\frac{1}{\varrho} = 4Ar^2 + 2B, \tag{1}$$

connecting ϱ the radius of curvature, and r the central distance; and denoting the length of the perpendicular from the origin on the tangent by p,

$$\frac{1}{r}\frac{dp}{dr} = 4Ar^2 + 2B, \tag{2}$$

so that, integrating,

$$p = Ar^4 + Br^2 + C. \tag{3}$$

Then

$$\frac{1}{4}\left(\frac{dr^2}{ds}\right)^2 = r^2 - p^2 = r^2 - (Ar^4 + Br^2 + C)^2 = R, \tag{4}$$

suppose; so that

$$s = \frac{1}{2}\int \frac{dr^2}{\sqrt{R}}, \tag{5}$$

an elliptic integral, of the first kind.

Again

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{p}{r^2} = \frac{Ar^4 + Br^2 + C}{r^2}, \tag{6}$$

so that

$$\theta = \frac{1}{2}\int \frac{Ar^4 + Br^2 + C}{r^2\sqrt{R}}\, dr^2, \tag{7}$$

introducing Elliptic Integrals of the Third Kind.

2. But now, in the inversion of these elliptic integrals, we shall follow a different procedure from Halphen, and employ as our Standard Elliptic Integral of the Third Kind the form (circular)

$$I = \frac{1}{2}\int_{\sigma}^{\infty} \frac{P(s-\sigma) - \sqrt{\Sigma}}{s-\sigma}\,\frac{ds}{\sqrt{S}}, \tag{1}$$

where s is a new variable (which must, not be confounded with the s employed above to denote the arc of the curve, distinguished in the sequel by an accent).

Also

$$S = 4s(s+x)^2 - \{(1+y)s + xy\}^2, = 4(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3), \tag{2}$$

where x and y are the quantities defined by Halphen (F. E. I, p. 103); Σ is the value of S when s is replaced by σ; and P is a certain constant at our disposal, so chosen as to cancel the secular term depending on the elliptic integral of the first kind, when (1) is made *pseudo-elliptic* by selecting as a parameter a fraction $f\omega'$ of the imaginary period ω'.

The elliptic argument u is given by

$$u = \int^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{S}}, \tag{3}$$

so that s is a one-valued elliptic function of u.

This may be distinguished as $s(u)$, and then $\sigma = s(v)$, v denoting the parameter of I the elliptic integral of the third kind in (1); and now, in Weierstrass' notation,

$$(4) \qquad V - \Sigma = + i\wp' v, \text{ when } v = f\omega'.$$

Replacing I and P in (1) by $I(v)$ and $P(v)$,

$$(5) \qquad iI(v) = \log \sqrt{\frac{\Theta(u-v)}{\Theta(u+v)}}\, e^{\left[\frac{1}{2} iP(v) + \zeta v\right] u}$$

$$(6) \qquad e^{2iI(v)} = \frac{\Theta(u-v)}{\Theta(u+v)}\, e^{[iP(v)+2\zeta v]u}$$

$$= \frac{\Theta(u-v)}{\Theta(u+v)}\, e^{2\frac{\eta}{\omega} vu},$$

(Halphen, F. E. I, p. 224), on taking

$$(7) \qquad \frac{1}{2} iP(v) = \frac{\eta}{\omega} v - \zeta v.$$

3. Changing Halphen's u into $u - v$, and his v into $2v$ (F. E. II, p. 197),

$$(1) \qquad \frac{r^2}{\alpha^2} = [\wp(u+v) - \wp 2v][\wp(u-v) - \wp 2v],$$

$$(2) \qquad \frac{p}{\alpha} = \wp(u+v) + \wp(u-v) - 2\wp 2v,$$

$$(3) \qquad \frac{VR}{\alpha} = \frac{1}{2}\wp(u-v) - \frac{1}{2}\wp(u+v)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\wp' u \wp' v}{(\wp u - \wp v)^2},$$

$$(4) \qquad \frac{\alpha}{\varrho} = -\frac{1}{\wp' 2v}\frac{\wp'(u-v) - \wp'(u+v)}{\wp(u-v) - \wp(u+v)}.$$

This shows that $r = \infty$ for $u = v$, and $r = 0$ for $u = 3v$, thus suggesting the new substitution

$$(5) \qquad \frac{r^2}{a^2} = \frac{\wp u - \wp 3v}{\wp u - \wp v}.$$

In the notation of L. M. S. XXV, we write

$$(6)\ \wp u - \wp v = M^2(s+x), \qquad i\wp' v = M^3 x;$$
$$(7)\ \wp u - \wp 2v = M^2 s, \qquad i\wp' 2v = M^3 xy;$$
$$(8)\ \wp u - \wp 3v = M^2(s+x-y), \qquad i\wp' 3v = M^3(-x+y-y^2);$$
$$(9)\ \wp u - \wp 4v = M^2\left(s + x\frac{x-y+y^2}{y}\right), \quad i\wp' 4v = M^3 x\frac{x(x-y+y^2)+(x-y)^2}{y^3};$$

. . . . . .

Now to reduce the integrals in (7) § 1 to the standard form (1) § 2, substitute

(10) $$\frac{r^2}{a^2} = \frac{s+x-y}{s+x},$$

and

(11) $$\frac{R}{a^2} = \frac{\frac{1}{4}S}{(s+x)^4};$$

and writing t for $s+x$, and T for the corresponding value of S,

(12) $$T = 4t^2(t-x) - \{(1+y)t - x\}^2,$$

this makes

(13) $$\frac{p^2}{a^2} = \frac{r^2-R}{a^2} = \frac{t-y}{t} - \frac{\frac{1}{4}T}{t^4} = \frac{\{2t^2-(1+y)t+x\}^2}{4t^4},$$

(14) $$\frac{p}{a} = 1 - \frac{1+y}{2t} + \frac{x}{2t^2}.$$

As

(15) $$\frac{1}{t} = \frac{1}{y}\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right),$$

therefore

(16) $$\frac{p}{a} = Aa^3\left(\frac{r}{a}\right)^4 + Ba\left(\frac{r}{a}\right)^2 + \frac{C}{a} = 1 - \frac{1+y}{2y}\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) + \frac{x}{2y^2}\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^2,$$

so that

(17) $$Aa^3 = \frac{x}{2y^2}, \quad Ba = -\frac{2x-y-y^2}{2y^2}, \quad \frac{C}{a} = \frac{x-y+y^2}{2y^2};$$

and

(18) $$\frac{p}{a} = \frac{x}{2y^2}\left(\frac{r^4}{a^4} - \frac{2x-y-y^2}{x}\frac{r^2}{a^2} + \frac{x-y+y^2}{x}\right),$$

(19) $$\frac{R}{a^2} = \frac{x^2}{4y^4}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)\left[\frac{r^6}{a^6} - \frac{3x-2y-2y^2}{x}\frac{r^4}{a^4} + \frac{(x-y-y^2)(3x-y-y^2)}{x^2}\frac{r^2}{a^2} - \frac{(x-y+y^2)^2}{x^2}\right]$$

$$= \frac{x^2}{4y^4}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)\left[\frac{r^2}{a^2}\left(\frac{r^2}{a^2} - \frac{x-y-y^2}{x}\right)^2 - \left(\frac{r^2}{a^2} - \frac{x-y+y^2}{x}\right)^2\right].$$

Thus $p = 0$, when

(20) $$\frac{r^2}{a^2} = \frac{2x-y-y^2 \pm y\sqrt{\{(1+y)^2-8x\}}}{2x}$$

and then $R = r^2$.

At a point of inflexion, $\rho = \infty$, and

(21) $$\frac{r^2}{a^2} = -\frac{Ba}{2Aa^3} = \frac{2x-y-y^2}{2x},$$

(22) $$t = s + x = \frac{2x}{1+y}.$$

Now, from (10),

$$\frac{dr^2}{a^2} = \frac{y\,ds}{(s+x)^2}, \tag{23}$$

so that dr^2 and ds are of the same sign if y is positive;

$$\frac{dr^2}{\sqrt{R}} = 2ay\,\frac{ds}{\sqrt{S}}, \tag{24}$$

$$\frac{s'}{a} = \frac{1}{2a}\int_0^s \frac{dr^2}{\sqrt{R}} = y\int_\infty^s \frac{ds}{\sqrt{S}} = yu, \tag{25}$$

$$\theta = \frac{1}{2}\int_\infty^s \frac{2t^2-(1+y)t+x}{t(t-y)}\,\frac{y\,ds}{\sqrt{S}} \tag{26}$$

$$= \int_\infty^s \left(y - \frac{1}{2}\,\frac{x}{s+x} - \frac{1}{2}\,\frac{-x+y-y^2}{s+x-y}\right)\frac{ds}{\sqrt{S}},$$

and now θ has been resolved into three elliptic integrals, one of the first kind proportional to the arc s', and two of the third kind, with parameters v and $3v$.

4. Written in the standard form (1) § 2,

$$I(v) = \frac{1}{2}\int_\infty^s \frac{P(v)(s+x)-x}{s+x}\,\frac{ds}{\sqrt{S}}, \tag{1}$$

$$I(2v) = \frac{1}{2}\int \frac{P(2v)s-xy}{s}\,\frac{ds}{\sqrt{S}}, \tag{2}$$

$$I(3v) = \frac{1}{2}\int \frac{P(3v)(s+x-y)-(-x+y-y^2)}{s+x-y}\,\frac{ds}{\sqrt{S}}, \tag{3}$$

. . . . . .

so that, in (26) § 3,

$$\theta = I(v) + I(3v) + \left[y - \frac{1}{2}P(v) - \frac{1}{2}P(3v)\right]u \tag{4}$$

$$= I(v) + I(3v) - uP(2v),$$

in consequence of the formula

$$P(v) - 2P(2v) + P(3v) \tag{5}$$

$$= 2i(\zeta v - 2\zeta 2v + \zeta 3v)$$

$$= \frac{2i\wp' 2v}{\wp 2v - \wp v} = \frac{2xy}{x} = 2y.$$

The formula for the addition of the parameters of two elliptic integrals of the third kind may now be employed for the simplification of $I(v) + I(3v)$ in the expression for θ in (4).

5. In the first place it is easily verified by a differentiation that

$$(1)\qquad I(3v) - 3I(v) = \sin^{-1}\frac{\sqrt{S}}{2(s+x)^{\frac{3}{2}}(s+x-y)^{\frac{1}{2}}}$$
$$= \cos^{-1}\frac{2(s+x)^2-(1+y)(s+x)+x}{2(s+x)^{\frac{3}{2}}(s+x-y)^{\frac{1}{2}}}$$
$$= \cos^{-1}\frac{p}{r} = \lambda,$$

in Halphen's notation (F. E. II, p. 196); so that

$$(2)\qquad \omega = \theta - \lambda = 4I(v) - uP(2v)$$
$$= 4I(v) - \frac{P(2v)}{y}\frac{s'}{a}.$$

This is otherwise evident from the intrinsic equation of the curve in (1) § 1, which gives

$$(3)\qquad \frac{d\omega}{ds} = \frac{1}{\varrho} = 4Ar^2 + 2B,$$

$$(4)\qquad d\omega = (2Ar^2 + B)\frac{dr^2}{\sqrt{R}}$$
$$= \left(1 + y - \frac{2x}{s+x}\right)\frac{ds}{\sqrt{S}},$$

so that

$$(5)\qquad \omega = 4I(v) - uP(2v),$$

because

$$(6)\qquad P(2v) - 2P(v) = 2i(\zeta 2v - 2\zeta v)$$
$$= i\frac{\varphi'' v}{\varphi' v} = i\frac{x(1+y)}{-ix} = -1-y.$$

6. By another method of addition of the parameters, we find

$$(1)\qquad I(v) + I(3v) = I(4v) + \Phi,$$

where

$$(2)\qquad \Phi = \sin^{-1}\frac{\sqrt{S}}{2\sqrt{\left\{(s+x)(s+x-y)\left(s+x\,\frac{x-y+y^2}{y}\right)\right\}}}$$
$$= \cos^{-1}\frac{\frac{2x-y+y^2}{y}(s+x)-x}{2\sqrt{\left\{(s+x)(s+x-y)\left(s+x\,\frac{x-y+y^2}{y}\right)\right\}}},$$

which can be verified by a differentiation.

In fact, the general formula for the addition of parameters can be written

$$(3)\qquad I(mv) + I(nv) = I(m+n)v + \Phi$$

where

(4) $$\Phi = \sin^{-1}\frac{\sqrt{s}}{2\sqrt{\{s-s(mv)\,.\,s-s(nv)\,.\,s-s(m+n)v\}}}$$

$$= \cos^{-1}\frac{\sqrt{-\Sigma_m}\,\frac{s-s_n}{s_m-s_n}+\sqrt{-\Sigma_n}\,\frac{s_m-s}{s_m-s_n}}{2\sqrt{\{s-s_m\,.\,s-s_n\,.\,s-s_{m+n}\}}},$$

to be verified by differentiation.

7. But it is difficult to combine $I(4v)$ and Φ into a single term; so that, for practical purposes, it is preferable to calculate $I(v)$ and $I(3v)$ separately, and then to combine them into a single term, which we shall denote by θ', with

(1) $$\theta = \theta' - uP(2v).$$

In general, with a parameter

(2) $$v = \frac{2\omega'}{n}, \quad n \text{ odd},$$

(3) $$I(v) = \frac{1}{n}\sin^{-1}\frac{t^{\frac{1}{2}(n-3)}+qt^{\frac{1}{2}(n-5)}+\cdots}{2t^{\frac{1}{2}n}}\sqrt{T}$$

$$= \frac{1}{n}\cos^{-1}\frac{nP(v)t^{\frac{1}{2}(n-1)}+\cdots}{2t^{\frac{1}{2}n}},$$

(4) $$I(3v) = \frac{1}{n}\sin^{-1}\frac{t^{\frac{1}{2}(n-3)}+\cdots}{2(t-y)^{\frac{1}{2}n}}\sqrt{T}$$

$$= \frac{1}{n}\cos^{-1}\frac{nP(3v)t^{\frac{1}{2}(n-1)}+\cdots}{2(t-y)^{\frac{1}{2}n}},$$

so that

(5) $$\theta' = \frac{1}{n}\sin^{-1}\frac{\frac{1}{2}n(Pv+P3v)t^{n-2}+P_1t^{n-3}+\cdots+P_{n-2}}{2(t^2-yt)^{\frac{1}{2}n}}\sqrt{T}$$

$$= \frac{1}{n}\cos^{-1}\frac{2t^n+Q_1t^{n-1}+\cdots+Q_n}{2(t^2-yt)^{\frac{1}{2}n}}.$$

With a parameter

(6) $$v = \frac{\omega'}{n}, \quad n \text{ odd},$$

(7) $$I(v) = \frac{1}{n}\sin^{-1}\frac{nP(v)t^{\frac{1}{2}(n-3)}+\cdots}{t^{\frac{1}{2}n}}\sqrt{(t-t_1\,.\,t-t_2)}$$

$$= \frac{1}{n}\cos^{-1}\frac{t^{\frac{1}{2}(n-1)}+\cdots}{t^{\frac{1}{2}n}}\sqrt{(t-t_3)},$$

with a corresponding expression for $I(3v)$, so that θ' assumes the same form as in (5).

With a parameter

$$v = \frac{\omega'}{2n}, \quad n \text{ odd}, \tag{8}$$

$$I(v) = \frac{1}{2n}\cos^{-1}\frac{t^{n-1}+\cdots}{t^n}\sqrt{(t-t_1.t-t_2)} \tag{9}$$

$$= \frac{1}{2n}\sin^{-1}\frac{2nP(v)t^{n-1}+\cdots}{t^n}\sqrt{(t-t_3)},$$

with a corresponding expression for $I(3v)$; but θ' again assumes the same form as in (5).

8. Writing ϱ for $\frac{r^2}{a^2}$ (again a different use of the letter ϱ to that employed in (1) § 1, which must now be distinguished in the sequel by an accent when used to denote the radius of curvature), and replacing t by $\frac{y}{1-\varrho}$, then (5) § 7 will assume the form

$$\theta' = \frac{1}{n}\sin^{-1}\frac{\varrho^{n-2}+H_1\varrho^{n-3}+\cdots+H_{n-2}}{Q\varrho^{\frac{1}{2}n}}\sqrt{P} \tag{1}$$

$$= \frac{1}{n}\cos^{-1}\frac{\varrho^n+L_1\varrho^{n-1}+\cdots+L_n}{Q\varrho^{\frac{1}{2}n}}, \tag{2}$$

where

$$P = -\left(\varrho^2 - \frac{2x-y-y^2}{x}\varrho + \frac{x-y+y^2}{x}\right)^2 + 4\frac{y^4}{x^2}\varrho. \tag{3}$$

From (7) § 1,

$$\theta = \frac{1}{2}\int_{\varrho}^{1}\frac{\varrho^2 - \frac{2x-y-y^2}{x}\varrho + \frac{x-y+y^2}{x}}{\varrho\sqrt{P}}d\varrho, \tag{4}$$

so that, from (1) § 7,

$$\theta' = \theta + \frac{P(2v)}{2ay}\int^{a^2}\frac{dr^2}{\sqrt{R}} \tag{5}$$

$$= \theta + \frac{y}{x}P(2v)\int^{1}\frac{d\varrho}{\sqrt{P}}$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{\varrho^2+\left(2\frac{y}{x}P2v - \frac{2x-y-y^2}{x}\right)\varrho + \frac{x-y+y^2}{x}}{\varrho\sqrt{P}}d\varrho$$

in which

$$2\frac{y}{x}P(2v) - \frac{2x-y-y^2}{x} = \frac{y}{x}P(4v). \tag{6}$$

The comparison of the differentiations of θ' in (1) and (2) will lead to sufficient equations, and even superfluous equations to serve

as verifications, for the determination of the coefficients H and L, when n, x, y, and $P(2v)$ are assigned.

Omitting the algebraical details, it will be found in this way that the leading coefficients are given by

$$(7)\qquad H_1 = \frac{2x-y-y^2}{x} - n\,\frac{y}{x}\,P(2v),$$

$$(8)\qquad L_1 = \qquad\qquad - n\,\frac{y}{x}\,P(2v),$$

$$(9)\qquad H_2 = \Big[\frac{2x-y-y^2}{x} - n\,\frac{y}{x}\,P(2v)\Big]\Big[\frac{2x-y-y^2}{x} - \frac{1}{2}\,n\,\frac{y}{x}\,P(2v)\Big] - \frac{x-y+y^2}{x},$$

$$(10)\qquad L_2 = -\frac{1}{2}\,n\,\frac{y}{x}\,P(2v)\Big[\frac{2x-y-y^2}{x} - n\,\frac{y}{x}\,P(2v)\Big] - \frac{1}{2}\,L_1 H_1,$$

. . . . . .

$$(11)\qquad L_n = -\frac{x-y+y^2}{x}\,H_{n-2}.$$

9. It will also be found that, if P is split up into the two factors P_1 and P_2, where

$$(1)\qquad P_1 = -\frac{r^4}{a^4} + \frac{2x-y-y^2}{x}\,\frac{r^2}{a^2} + 2\,\frac{y^2}{x}\,\frac{r}{a} - \frac{x-y+y^2}{x} - \Big(1-\frac{r}{a}\Big)\Big(\frac{r^2}{a^2} + \frac{r^2}{a^2} - \frac{x-y-y^2}{x}\,\frac{r}{a} - \frac{x-y+y^2}{x}\Big),$$

$$(2)\qquad P_2 = \frac{r^4}{a^4} - \frac{2x-y-y^2}{x}\,\frac{r^2}{a^2} + 2\,\frac{y^2}{x}\,\frac{r}{a} + \frac{x-y+y^2}{x} - \Big(1+\frac{r}{a}\Big)\Big(\frac{r^2}{a^2} - \frac{r^2}{a^2} - \frac{x-y-y^2}{x}\,\frac{r}{a} + \frac{x-y+y^2}{x}\Big),$$

we can generally, when n is odd, replace the expressions for θ' in (1) and (2), § 8 by (writing r for $\frac{r}{a}$)

$$(3)\qquad \theta' = \frac{2}{n}\sin^{-1}\frac{r^{n-2}+h_1 r^{n-3}+h_2 r^{n-4}+\cdots}{q r^{\frac{1}{2}n}}\sqrt{P_1}$$

$$(4)\qquad = \frac{2}{n}\cos^{-1}\frac{r^{n-2}-h_1 r^{n-3}+h_2 r^{n-4}-\cdots}{q r^{\frac{1}{2}n}}\sqrt{P_2}$$

leading to the differential relation

$$(5)\qquad \frac{d\theta'}{dr} = -\frac{r^4 + \frac{y}{x}\,P(4v)r^2 + \frac{x-y+y^2}{x}}{r\sqrt{P}};$$

and now we find

$$h_1 = 0, \quad H_1 = 2h_2, \quad H_2 = h_2^2 + 2h_4, \ldots \tag{6}$$

and the number of coefficients h required is now only half that required in the previous method.

10. The curve becomes an algebraical curve by making

$$P(2v) = 0, \tag{1}$$

and now

$$H_1 = \frac{2x-y-y^2}{x}, \quad L_1 = 0, \quad H_2 = \left(\frac{2x-y-y^2}{x}\right)^2 - \frac{x-y+y^2}{x}, \tag{2}$$

$$L_2 = 0;$$

and further

$$H_3 = \left(\frac{2x-y-y^2}{x}\right)^3 - 2\,\frac{2x-y-y^2}{x}\cdot\frac{x-y+y^2}{x} - \frac{n-6}{3}\,\frac{y^4}{x^2}, \tag{3}$$

$$L_3 = -\frac{1}{3}\,n\,\frac{y^4}{x^2}, \ldots.$$

But, in the general case, a secular term $uP(2v)$ is associated with θ, and this is expressed in terms of Legendre's $F\varphi$ by

$$\frac{P(2v)}{\sqrt{(s_1-s_2)}}\,F\varphi, \tag{4}$$

where

$$\sin^2\varphi = \frac{s_1-s_3}{s-s_3}, \quad \varkappa^2 = \frac{s_2-s_3}{s_1-s_3}, \quad \varkappa'^2 = \frac{s_1-s_2}{s_1-s_3}; \tag{5}$$

or by

$$\frac{\frac{1}{2}\,P(2v)}{\sqrt{(s_1-s_2\,.\,s_3-s_2)}}\,F\varphi, \tag{6}$$

where

$$\cot^2\frac{1}{2}\varphi = \frac{s-s_2}{\sqrt{(s_1-s_2\,.\,s_3-s_2)}}, \quad \varkappa^2, \varkappa'^2 = \frac{1}{2}\left[1 \mp \frac{s_2-\frac{1}{2}(s_1+s_3)}{\sqrt{(s_1-s_2\,.\,s_3-s_2)}}\right], \tag{7}$$

according as the discriminant of S in (2) § 2 is positive or negative.

11. As a first application of the preceding analysis, take the parameter

$$v = \frac{2}{3}\,\omega', \tag{1}$$

and the associated integral (L. M. S. XXV, p. 210)

$$I = \frac{1}{2}\int^{\infty} \frac{\frac{1}{3}s+m}{s\sqrt{S}}\,ds \tag{2}$$

$$= \frac{1}{3}\sin^{-1}\frac{s+m}{2s^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{3}\cos^{-1}\frac{\sqrt{S}}{2s^{\frac{3}{2}}},$$

where

$$S = 4s^3 - (s+m)^2. \tag{3}$$

We now substitute

$$\frac{r^2}{a^2} = \frac{1}{s}, \tag{4}$$

$$\frac{R}{a^2} = \frac{\frac{1}{4}S}{s^4}, \tag{5}$$

so that

$$\frac{p}{a} = \frac{s+m}{2s^2} \tag{6}$$

and

$$Aa^3 = \tfrac{1}{2}m, \quad Ba = \tfrac{1}{2}, \quad C = 0. \tag{7}$$

Now

$$s' = \tfrac{1}{2}\int_0 \frac{dr^2}{\sqrt{R}} = a\int^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{S}} = au; \tag{8}$$

and

$$\theta = \tfrac{1}{2}\int_0 \frac{\frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{2}}{\sqrt{R}}\, dr^2 \tag{9}$$

$$= \tfrac{1}{2}\int^{\infty} \frac{s+m}{s\sqrt{S}}\, ds$$

$$= I + \tfrac{1}{3}u$$

$$= \tfrac{1}{3}\sin^{-1}\left[\tfrac{1}{2}\,\frac{r}{a}\left(m\,\frac{r^2}{a^2}+1\right)\right] + \tfrac{1}{3}\,\frac{s'}{a},$$

or

$$\frac{r}{a}\left(m\,\frac{r^2}{a^2}+1\right) = 2\sin\left(3\theta - \frac{s'}{a}\right), \tag{10}$$

where m is an arbitrary number.

The discriminant of S is $-m^3(1+27m)$, which is positive in the region $0 > m > -\frac{1}{27}$.

To obtain a closed curve, the real period ω of the elliptic integral u must be made an aliquot part of π, by an appropriate choice of m.

12. The next case of a parameter

$$v = \tfrac{1}{2}\omega',$$

is obtained by putting $y = 0$ (L. M. S. XXV, p. 211); but this makes $r^2 = a^2$, so that the curve is circular, and the case is devoid of interest.

13. With a parameter

$$v = \tfrac{1}{3}\,\omega', \tag{1}$$

$$\gamma_6 = 0, \quad \text{or} \quad x = y - y^2 \quad \text{(L. M. S. XXV, p. 216);} \tag{2}$$

and now

$$Aa^2 = \frac{1-y}{2y}, \quad Ba = -\frac{1-3y}{2y}, \quad C = 0; \tag{3}$$

$$\varrho = \frac{r^2}{a^2} = 1 - \frac{y}{s+x}. \tag{4}$$

$$t = s + x = y\,\frac{a^2}{a^2 - r^2} \tag{5}$$

$$s - y^2 = y\,\frac{r^2}{a^2 - r^2} \tag{6}$$

$$p = r^2(Ar^2 + B) \tag{7}$$

$$\frac{p}{a} = \frac{1}{2y}\,\frac{r^2}{a^2}\left[(1-y)\,\frac{r^2}{a^2} - 1 + 3y\right] \tag{8}$$

$$Ar^2 + B = \frac{2(s+x) - 1 + y}{2a(s+x)} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \theta &= \tfrac{1}{2}\int^{a^2} \frac{Ar^2+B}{\sqrt{R}}\,dr^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\int^{\infty} \frac{2y(s+x) - x}{s+x}\,\frac{ds}{\sqrt{S}} \\ &= \left(y - \tfrac{1}{2}\,Pv\right)u + I(v), \end{aligned} \tag{10}$$

where

$$P(v) = \tfrac{2}{3}, \tag{11}$$

$$\begin{aligned} I(v) &= \tfrac{1}{2}\int^{\infty} \frac{\frac{2}{3}(s+y-y^2) - y(1-y)}{s+y-y^2}\,\frac{ds}{\sqrt{S}} \\ &= \tfrac{1}{3}\sin^{-1}\frac{\sqrt{\left\{s^2 - \frac{1}{4}(1-y)(1-5y)s + \frac{1}{4}y^2(1-y)^2\right\}}}{(s+y-y^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \tfrac{1}{3}\cos^{-1}\frac{s - \frac{1}{2}(1-y)(1-2y)}{(s+y-y^2)^{\frac{1}{2}}}\,\sqrt{(s-y^2)} \end{aligned} \tag{12}$$

so that

$$\theta + \left(\frac{1}{3} - y\right)u \tag{13}$$

$$= \frac{1}{3}\sin^{-1}\frac{\sqrt{[(a^2-r^2)\{4y^2a^4-(1-y)(1-5y)a^2r^2+(1-y)^2r^4\}]}}{2ya^3}$$

$$= \frac{1}{3}\cos^{-1}\frac{(1-y)r^3-(1-3y)a^2r}{2ya^3}$$

$$= \frac{1}{3}\cos^{-1}\frac{p}{r} = \frac{1}{3}\lambda.$$

By putting $y = \frac{1}{3}$, we obtain the algebraical curve

$$r^3 = a^3\cos 3\theta, \quad \text{with} \quad \frac{p}{a} = \left(\frac{r}{a}\right)^4. \tag{14}$$

As y diminishes from $\frac{1}{3}$, points of inflexion come into existence, where

$$\frac{r^2}{a^2} = \frac{1-3y}{2-2y}; \tag{15}$$

also $p = 0$, when

$$\frac{r^2}{a^2} = \frac{1-3y}{1-y}. \tag{16}$$

The discriminant of S is negative in this region of

$$1 > y > \frac{1}{9}, \tag{17}$$

and

$$u = \frac{F\varphi}{2y^{\frac{3}{4}}}, \quad \cot^2\frac{1}{2}\varphi = \frac{s-y^2}{y^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{y}}\frac{r^2}{a^2-r^2}, \tag{18}$$

$$x^2 = \frac{(1-y^{\frac{1}{2}})^2(1+3y^{\frac{1}{2}})}{16y^{\frac{3}{2}}}, \quad x'^2 = \frac{(1+y^{\frac{1}{2}})^2(-1+3y^{\frac{1}{2}})}{16y^{\frac{3}{2}}}; \tag{19}$$

and the apsidal angle

$$\Theta = \frac{\pi}{6} - \frac{\frac{1}{3}-y}{y^{\frac{3}{4}}}K. \tag{20}$$

In Fig. 1 the apsidal angle $\Theta = -\frac{1}{4}\pi$, corresponding, by trial, to $y = 0.156$, nearly.

We can write (13) in the form

$$\theta' = \frac{2}{3}\sin^{-1}\frac{\sqrt{[(a-r)\{2ya^2-(1-y)ar-(1-y)r^2\}]}}{2\sqrt{(ya^2)}} \tag{21}$$

$$= \frac{2}{3}\cos^{-1}\frac{\sqrt{[(a+r)\{2ya^2+(1-y)ar-(1-y)r^2\}]}}{2\sqrt{(ya^2)}}.$$

In the region where the discriminant of S is positive we c
put (L. M. S. XXV, p. 217)

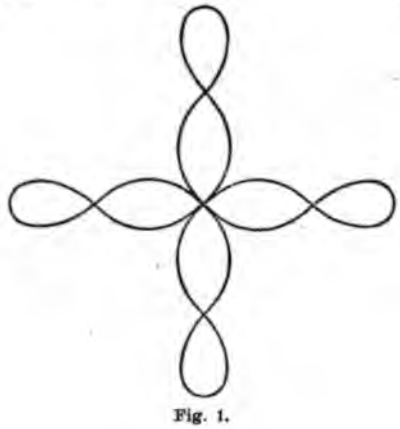


Fig. 1.

$$(22) \qquad y = \frac{-c}{2-5c+2c^2},$$

and now write (21) in the form

$$(23) \quad \theta' = \frac{2}{3}\sin^{-1}\sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{r}{a}\right)\left(1-\frac{1-c}{c}\frac{r}{a}\right)\left\{1+(1-c)\frac{r}{a}\right\}\right]}$$

$$= \frac{2}{3}\cos^{-1}\sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{r}{a}\right)\left(1+\frac{1-c}{c}\frac{r}{a}\right)\left\{1-(1-c)\frac{r}{a}\right\}\right]}.$$

Arranged in descending order

$$(24) \quad s_1 = \left(\frac{c-c^2}{2-5c+2c^2}\right)^2, \quad s_2 = \left(\frac{1-c}{2-5c+2c^2}\right)^2, \quad s_3 = \left(\frac{c}{2-5c+2c^2}\right)^2;$$

with c negative, $c < -1$.

In the outer branch $\left(1 > \frac{r}{a} > \frac{-c}{1-c}\right)$

$$(25) \qquad \theta = \theta' - \frac{2}{3}\cdot\frac{1-c+c^2}{\sqrt{(-2c^3+c^4)}}F\varphi,$$

with

$$(26) \qquad \sin^2\varphi = \frac{c^2}{1-2c}\frac{a^2-r^2}{r^2}, \quad \varkappa^2 = \frac{1-2c}{-2c^3+c^4};$$

and the apsidal angle

$$(27) \qquad \Theta = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1-c+c^2}{\sqrt{(-2c^3+c^4)}}K.$$

Inflexions come into existence when $-1 > c > -\sqrt{2}-1$ and then

$$(28) \qquad \frac{r^2}{a^2} = \frac{1-c+c^2}{2(1-c)^2};$$

while $p = 0$, when

(29) $$\frac{r^2}{a^2} = \frac{1 - c + c^2}{(1-c)^2}.$$

In the inner branch $\left(\frac{1}{1-c} > \frac{r}{a} > 0\right)$.

(30) $$\theta = \theta' + \frac{2}{3}\frac{1 - c + c^2}{\sqrt{(-2c^3 + c^4)}} F\varphi,$$

with

(31) $$\sin^2 \varphi = (c^2 - 2c)\frac{r^2}{a^2 - r^2},$$

and an apsidal angle

(32) $$\Theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\frac{1 - c + c^2}{\sqrt{(-2c^3 + c^4)}} K.$$

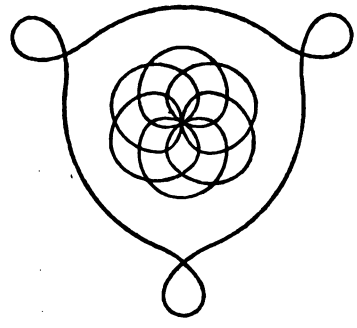


Fig. 2.

In Fig. 2 the apsidal angles are made -60^0 and 120^0, by taking $c = -1.5$, about.

We can also make use of a quadric substitution

(33) $$z = \frac{s^2 - \frac{1}{4}(1-y)(1-5y)s + \frac{1}{4}y^2(1-y)^2}{s - y^2}$$
$$= s - \frac{1}{4}(1 - 6y + y^2) + \frac{y^3}{s - y^2},$$

for the reduction of the secular term u; this will lead to the same modulus as before for a negative discriminant of S, changing to its reciprocal for a positive discriminant.

In the separating case, when $y = \frac{1}{9}$,

(34) $$\frac{p}{a} = \frac{r^2}{a^2}\left(4\frac{r^2}{a^2} - 3\right),$$

(35) $$\frac{R}{a^2} = \frac{r^2}{a^2}\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)\left(1 - 4\frac{r^2}{a^2}\right)^2;$$

and the curve has an asymptotic circle, of radius $\frac{1}{2}a$; the outer and inner branches being given by

(36) $$\theta = \sin^{-1}\sqrt{\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)} - \frac{2}{3}\sqrt{3}\,\mathrm{sh}^{-1}\sqrt{\frac{a^2 - r^2}{4r^2 - a^2}},$$
$$= \cos^{-1}\frac{r}{a} \qquad - \frac{2}{3}\sqrt{3}\,\mathrm{ch}^{-1}\sqrt{\frac{3r^2}{4r^2 - a^2}},$$

and

(37) $$\theta = \sin^{-1}\frac{r}{a} \qquad + \frac{2}{3}\sqrt{3}\,\mathrm{sh}^{-1}\sqrt{\frac{3r^2}{a^2 - 4r^2}}.$$

14. With a parameter

(1) $$v = \frac{2}{5}\omega',$$

(2) $\gamma_5 = 0$, when $x = y$ (L. M. S. XXV, p. 213);

(3) $$Aa^3 = \frac{1}{2x}, \quad Ba = -\frac{1-x}{2x}, \quad \frac{C}{a} = \frac{1}{2};$$

and

(4) $$\theta' = \frac{1}{5}\sin^{-1}\frac{\varrho^2 + H_1\varrho^2 + H_2\varrho + H_3}{Q\varrho^{\frac{5}{2}}}\sqrt{P}$$

$$= \frac{1}{5}\cos^{-1}\frac{\varrho^5 + L_1\varrho^4 + \cdots + L_5}{Q\varrho^{\frac{5}{2}}}$$

where

(5) $$P = -\{\varrho^2 - (1-x)\varrho + x\}^2 + 4x^2\varrho;$$

also

(6) $$P(2v) = \frac{1-3x}{5}, \quad P(4v) = -\frac{3+x}{5};$$

so that

(7) $$\frac{d\theta'}{d\varrho} = -\frac{1}{2}\frac{\varrho^2 - \frac{3+x}{5}\varrho + x}{\varrho\sqrt{P}}$$

and we find, as in equations (7)...(11), § 8,

(8) $$H_1 = 2x, \quad H_2 = x^2, \quad H_3 = -x^2,$$

$L_1 = -1+3x$, $L_2 = -x+3x^2$, $L_3 = -2x^2+3x^3$, $L_4 = -x^2-$
$L_5 = x^3$; also $Q = 2x$.

Written in the form of (3), (4) § 9,

(9) $$\theta' = \frac{2}{5}\sin^{-1}\frac{\frac{r^3}{a^3} + x\frac{r}{a} + x}{2\sqrt{x}\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{5}{2}}}\sqrt{P_1},$$

(10) $$= \frac{2}{5}\cos^{-1}\frac{\frac{r^3}{a^3} + x\frac{r}{a} - x}{2\sqrt{x}\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{5}{2}}}\sqrt{P_2},$$

and

(11) $$P_1 = -\frac{r^4}{a^4} + (1-x)\frac{r^2}{a^2} + 2x\frac{r}{a} - x$$

$$= \left(1-\frac{r}{a}\right)\left(\frac{r^3}{a^3} + \frac{r^2}{a^2} + x\frac{r}{a} - x\right),$$

(12) $$P_2 = \left(1+\frac{r}{a}\right)\left(\frac{r^3}{a^3} - \frac{r^2}{a^2} + x\frac{r}{a} + x\right).$$

The algebraical case is obtained by putting

$$x = \frac{1}{3}, \tag{13}$$

and $\frac{r}{a}$ now oscillates between 1 and $\frac{1}{3}(\sqrt{10}-1)$, the real root of

$$\frac{r^3}{a^3} + \frac{r^2}{a^2} + \frac{1}{3}\frac{r}{a} - \frac{1}{3} = 0. \tag{14}$$

Now in this algebraical curve,

$$\frac{p}{a} = \frac{3}{2}\frac{r^4}{a^4} - \frac{r^2}{a^2} + \frac{1}{2}, \tag{15}$$

so that p never vanishes; and at the inflexions

$$\frac{r}{a} = \frac{1}{3}\sqrt{3}, \qquad \frac{p}{a} = \frac{1}{3}. \tag{16}$$

The curve is shown in the annexed figure 3.

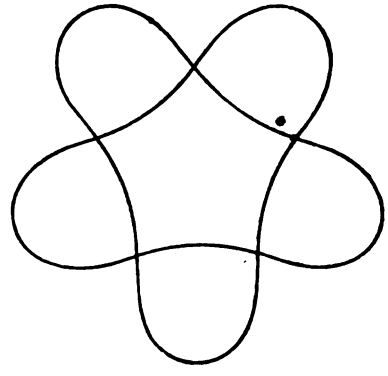


Fig. 3.

15. With a parameter

$$v = \frac{2}{7}\omega', \tag{1}$$

(2) $\gamma_7 = 0$, when $x = s(1-s)^2$, $y = s(1-s)$ (L. M. S. XXV, p. 222),

$$Aa^3 = \frac{1}{2s}, \quad Ba = -\frac{1-3s+s^2}{2s(1-s)}, \quad \frac{C}{a} = -\frac{s}{2(1-s)}, \tag{3}$$

$$P(2v) = \frac{3-9s+5s^2}{7}, \quad P(4v) = \frac{-1+3s+3s^2}{7}. \tag{4}$$

Writing r for $\frac{r}{a}$, the differential relations

$$\frac{d\theta}{dr} = -\frac{r^4 - \frac{1-3s+s^2}{1-s}r^2 - \frac{s^2}{1-s}}{r\sqrt{P}}, \tag{5}$$

$$\frac{d\theta'}{dr} = -\frac{r^4 - \frac{1-3s+3s^2}{7(1-s)}r^2 - \frac{s^2}{1-s}}{r\sqrt{P}}, \tag{6}$$

are satisfied by

$$\theta = \theta' - \frac{3-9s+5s^2}{7(1-s)}\int_{\varrho}^{1}\frac{d\varrho}{\sqrt{P}} \tag{7}$$

$$= \theta' - \frac{3-9s+5s^2}{7}\int_{\sqrt{S}}^{\infty}\frac{ds}{\sqrt{S}},$$

where

$$\theta' = \frac{2}{7}\sin^{-1}\frac{r^5 + h_1 r^4 + h_2 r^3 + \cdots + h_5}{q r^{\frac{7}{2}}}\sqrt{P_1}, \tag{8}$$

$$= \frac{2}{7}\cos^{-1}\frac{r^5 - h_1 r^4 + h_2 r^3 - \cdots - h_5}{q r^{\frac{7}{2}}}\sqrt{P_2}, \tag{9}$$

$$(10)\qquad P_1 = -r^4 + \frac{1-3s+s^2}{1-s}r^2 + 2sr + \frac{s^2}{1-s}$$
$$= (1-r)\left(r^3 + r^2 + \frac{2s-s^2}{1-s}r + \frac{s^2}{1-s}\right).$$

and now we find

$$(11)\quad h_1 = 0,\ h_2 = -1+2s,\ h_3 = s,\ h_4 = s^2,\ h_5 = -\frac{s^3}{1-s};\qquad q^2 = \frac{4s^3}{(1-s)^2}.$$

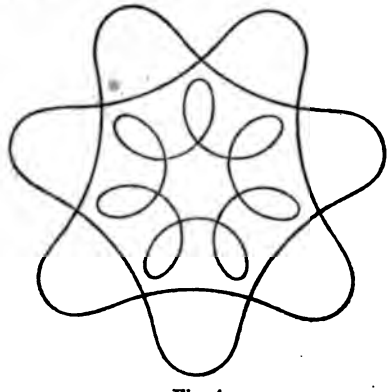


Fig. 4.

Putting

$$(12)\quad P(2v) = 0,\quad s = \frac{9 \pm \sqrt{21}}{10},$$

we obtain two algebraical cases represented in figure 4.

16. With a parameter

$$(1)\qquad v = \frac{2}{9}\omega',$$

$$(2)\qquad \gamma_0 = 0$$

when

$$x = c^2(1-c)(1-c+c^2),\quad y = c^2(1-c)\quad \text{(L. M. S. XXV, p. 232)},$$

$$(3)\quad Aa^3 = \frac{1-c+c^2}{2c^2(1-c)},\quad Ba = -\frac{1-2c+c^2+c^3}{2c^2(1-c)},\quad \frac{C}{a} = -\frac{1-c}{2c};$$

$$(4)\qquad P(2v) = \frac{1-3c^2+7c^3}{9},\quad P(4v) = \frac{-7+18c-15c^2+5c^3}{9};$$

and, writing r for $\frac{r}{a}$,

$$(5)\qquad \theta' = \frac{2}{9}\sin^{-1}\frac{r^7 + h_1 r^6 + h_2 r^5 + \cdots + h_7}{q r^{\frac{9}{2}}}\sqrt{P_1},$$

$$(6)\qquad = \frac{2}{9}\cos^{-1}\frac{r^7 - h_1 r^6 + h_2 r^5 - \cdots - h_7}{q r^{\frac{9}{2}}}\sqrt{P_2},$$

$$(7)\quad P_1 = -r^4 + \frac{1-2c+c^2+c^3}{1-c+c^2}r^2 + 2\frac{c^2-c^3}{1-c+c^2}r + \frac{c(1-c)^2}{1-c+c^2}$$
$$= (1-r)\left[r^3 + r^2 + \frac{c-c^3}{1-c+c^2}r + \frac{c(1-c)^2}{1-c+c^2}\right],$$

$$(8)\qquad h_1 = 0,\quad h_2 = -\frac{c(1-2c+3c^2)}{1-c+c^2},\quad h_3 = \frac{c^2(1-c)}{1-c+c^2},$$

$$h_4 = c^2\frac{1-3c+3c^2}{1-c+c^2},\quad h_5 = \frac{c^2(1-c)(1-2c)}{1-c+c^2},\quad h_6 = -\frac{c^3(1-c)^2}{1-c+c^2},$$

$$h_7 = \frac{c^2(1-c)^3}{1-c+c^2}.$$

In the algebraical case

(9) $P(2v) = 0,\ 1 - 3c^2 + 7c^3 = 0,\ c = -\frac{1}{f^{\frac{1}{2}} + f^{-\frac{1}{2}}},\ f = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$

and the curve is shown in fig. 5.

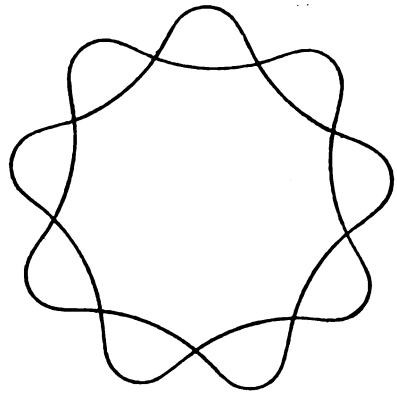


Fig. 5.

17. With a parameter

(1) $$v = \frac{1}{5}\omega',$$

we must employ the Transformation of the Tenth Order, and put (L. M. S. XXV, p. 235)

(2) $$x = -\frac{(c+1)(c-1)^3}{c(c^2-4c-1)^2},\quad y = -\frac{(c+1)(c-1)}{c(c^2-4c-1)},$$

(3) $$Aa^3 = -\frac{c(c-1)}{c+1},\quad Ba = \frac{c^3+c^2+3c-1}{c^3-1},\quad \frac{C}{a} = -\frac{c+1}{c-1},$$

(4) $$P(v) = \frac{3c-1}{5c},\quad P(2v) = \frac{c^3-c^2+7c-3}{5a(c^2-4c-1)},$$

$$P(4v) = -\frac{3c^3+7c^2+c+1}{5c(c^2-4c-1)}$$

and now we find

(5) $$\theta' = \frac{2}{5}\sin^{-1}\frac{r^3+\frac{r}{c}-\frac{c+1}{c(c-1)}}{qr^{\frac{3}{2}}}\sqrt{P_1},$$

(6) $$= \frac{2}{5}\cos^{-1}\frac{r^3+\frac{r}{a}+\frac{c+1}{c(c-1)}}{qr^{\frac{3}{2}}}\sqrt{P_2},$$

where

(7) $$P_1 = (1-r)\left(r+\frac{c+1}{c-1}\right)\left[\left(r-\frac{1}{c-1}\right)^2 - \frac{c^2+c-1}{c(c-1)^2}\right],$$

(8) $$P_2 = (1+r)\left(r-\frac{c+1}{c-1}\right)\left[\left(r+\frac{1}{c-1}\right)^2 - \frac{c^2+c-1}{c(c-1)^2}\right],$$

(9) $$q^2 = -4\frac{(c+1)^3}{c(c-1)^3}.$$

In the algebraical case

(10) $P(2v) = 0,\ c^3 - c^2 + 7c - 3 = 0,\ c = \frac{1}{3}(\sqrt[3]{10} - 1)^2 = 0.352$

so that q^2 is positive, and $\frac{r}{a}$ oscillates between 1 and $\frac{c+1}{c-1} = 3.83$

giving a curve of the same character as fig. 3.

18. To construct the curve for a parameter

(1) $$v = \frac{2\omega'}{11},$$

in the form

(2) $$\theta' = \frac{2}{11}\sin^{-1}\frac{r^9 + h_2 r^7 + \cdots + h_9}{q r^{\frac{9}{2}}}\sqrt{P_1}$$

(3) $$= \frac{2}{11}\cos^{-1}\frac{r^9 + h_2 r^7 - \cdots - h_9}{q r^{\frac{9}{2}}}\sqrt{P_2},$$

we must take (L. M. S. XXV, p 242)

(4) $$x = -\frac{1}{2}c(1+c)(1+2c+\sqrt{C}),\quad y = -c\frac{1+4c+2c^2+\sqrt{C}}{2(1+c)},$$

where

(5) $$C = 1 + 4c + 8c^2 + 4c^3,$$

(6) $$P(2v) = \frac{6+27c+44c^2+18c^3+(8+13c)\sqrt{C}}{22(1+c)},$$

(7) $$P(4v) = \frac{12+43c+44c^2+14c^3-(6+9c)\sqrt{C}}{22(1+c)}.$$

With $\gamma_{13} = 0$, (L. M. S. XXV, § 50)

(8) $$v = \frac{2\omega'}{13},$$

(9) $$x = \frac{c^2}{2(1+c)}\{1+2c-2c^2+2c^3+6c^4+c^5+0+2c^7+c^8 + (1-2c-c^2+c^3-c^4-c^5)\sqrt{C}\}$$

(10) $$y = \frac{c^2}{2(1+c)^2}\{1+3c+0+0+2c^4+c^5+(1-c-c^2)\sqrt{C}\},$$

(11) $$C = 1 + 4c + 6c^2 + 2c^3 + c^4 + 2c^5 + c^6,$$

(12) $$13P(2v) = \frac{6+12c-9c^2-33c^3+4c^4+8c^5-18c^6-11c^7+(4+0-15c^2+7c^3+11c^4)\sqrt{C}}{2(1+c)^2},$$

(13) $$13P(4v) = \frac{-14-54c-83c^2-79c^3-70c^4-62c^5-36c^6-9c^7+(8-26c-69c^2-25c^3+9c^4)\sqrt{C}}{2(1+c)^2},$$

(14) $$\theta' = \frac{2}{13}\sin^{-1}\frac{r^{11}+h_2r^9+h_3r^8+\cdots+h_{11}}{qr^{\frac{13}{2}}}\sqrt{P_1},$$

(15) $$= \frac{2}{13}\cos^{-1}\frac{r^{11}+h_2r^9-h_3r^8+\cdots-h_{11}}{qr^{\frac{13}{2}}}\sqrt{P_2}.$$

With $\gamma_{15} = 0$, (L. M. S. XXV, § 56)

(16) $$v = \frac{2\omega'}{15},$$

(17) $$x = \frac{c(c+1)}{2(c^2+3c+3)}\{(c^9+2c^8-2c^7-8c^6-3c^5+6c^4+6c^3+2c^2+0-1)(c^2+3c+3) + (c^9+4c^8+4c^7-6c^6-15c^5-8c^4+4c^3+6c^2+4c+1)\sqrt{C}\},$$

(18) $$y = -\frac{c(c+1)}{2(c^2+3c+3)}\{c^4+0-2c^2-c+1)(c^2+3c+3) + (c^4+2c^3+0-3c-1)\sqrt{C}\},$$

(19) $$C = (c^2-c-1)(c^2+3c+3),$$

(20) $$15P(2v)$$
$$\frac{(13c^6+9c^5-30c^4-35c^3+12c^2+9c+6)(c^2+3c+3)+(13c^5+35c^4+14c^3-51c^2-48c-9)c\sqrt{C}}{2(c^2+3c+3)},$$

(21) $$15P(4v)$$
$$\frac{(11c^6+33c^5+30c^4-25c^3-66c^2-57c-18)(c^2+3c+3)+(11c^5+55c^4+118c^3+123c^2+54c-3)c\sqrt{C}}{2(c^2+3c+3)},$$

(22) $$\theta' = \frac{2}{15}\sin^{-1}\frac{r^{13}+h_2r^{11}+h_3r^{10}+\cdots+h_{13}}{qr^{\frac{15}{2}}}\sqrt{P_1},$$

(23) $$= \frac{2}{15}\cos^{-1}\frac{r^{13}+h_2r^{11}-h_3r^{10}+\cdots-h_{13}}{qr^{\frac{15}{2}}}\sqrt{P_2}.$$

This is as far as we can go at present with these Elliptic Functions of the First Stage, and their Division-Values (Theilwerthe); the next cases of $\gamma_{17} = 0$, and $\gamma_{19} = 0$ have proved intractable by this method.

19. With a parameter

(1) $$v = \frac{1}{6}\omega',$$

(2) $$\theta' = \frac{1}{3}\sin^{-1}\frac{\varrho+H_1}{Q\varrho^{\frac{3}{2}}}\sqrt{P},$$

(3) $$= \frac{1}{3}\cos^{-1}\frac{\varrho^3+L_1\varrho^2+L_2\varrho+L_3}{Q\varrho^{\frac{3}{2}}}$$

and, turning to the Transformation of the Twelfth Order (L. M. S. XXV, p. 248)

(4) $$x = \frac{-c(1+c)(1+c+c^2)(1+c^3)}{(1-c)^2}, \quad y = \frac{-c(1+c)(1+c+c^2)}{1-c};$$

$$(5)\qquad Aa^3 = -\frac{1+c^2}{2c(1+c)(1+c+c^2)},$$

$$(6)\qquad Ba = \frac{1+2c+4c^2+2c^3+c^4}{2c(1+c)(1+c+c^2)},$$

$$(7)\qquad \frac{C}{a} = \frac{c(1+c)}{2(1+c+c^2)}$$

and we shall find

$$(8)\qquad H_1 = -(1+c)^2,$$

$$L_1 = -\frac{2(1+c+c^2)^2}{1+c^2},$$

$$L_2 = \frac{(1+c)^2(1+c+c^2)^2}{1+c^2},$$

$$L_3 = -\frac{c^2(1+c)^4}{1+c^2},$$

$$Q = \frac{2c^2(1+c)}{1+c^2};$$

$$(9)\qquad P = \left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)\left(\frac{r^2}{a^2}-c^2\right)\left[\left\{\frac{r^2}{a^2}-\frac{c(1+c)^2}{1+c^2}\right\}^2-(1+c)^2\frac{r^2}{a^2}\right],$$

leading on differentiation to

$$(10)\qquad \frac{d\theta'}{d\varrho} = -\frac{1}{2}\,\frac{\varrho^2+\frac{1+2c+2c^3+c^4}{3(1+c^2)}\varrho-\frac{c^2(1+c)^2}{1+c^2}}{\varrho\sqrt{P}},$$

$$(11)\qquad \frac{d\theta}{d\varrho} = -\frac{1}{2}\,\frac{\varrho^2-\frac{1+2c+4c^2+2c^3+c^4}{1+c^2}\varrho-\frac{c^2(1+c)^2}{1+c^2}}{\varrho\sqrt{P}};$$

so that

$$(12)\qquad \theta'-\theta = \frac{2}{3}\,\frac{(1+c+c^2)^2}{1+c^2}\int_{\varrho}^{1}\frac{d\varrho}{\sqrt{P}};$$

and the secular term cannot be cancelled, so as to obtain an algebraical curve.

Equations (2) and (3) can also be written in the form

$$(13)\qquad \theta' = \frac{2}{3}\sin^{-1}\frac{\left(\frac{r}{a}+1+c\right)\sqrt{\left[\left(1-\frac{r}{a}\right)\left(\frac{r}{a}-c\right)\left\{\frac{r^2}{a^2}-(1+c)\frac{r}{a}-\frac{c(1+c)^2}{1+c^2}\right\}\right]}}{2c\sqrt{\frac{1+c}{1+c^2}}\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$(14)\qquad = \frac{2}{3}\cos^{-1}\frac{\left(\frac{r}{a}-1-c\right)\sqrt{\left[\left(1+\frac{r}{a}\right)\left(\frac{r}{a}+c\right)\left\{\frac{r^2}{a^2}+(1+c)\frac{r}{a}-\frac{c(1+c)^2}{1+c^2}\right\}\right]}}{2c\sqrt{\frac{1+c}{1+c^2}}\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

20. With the parameter

(1) $$v = \frac{\omega'}{4n},$$

where n is an integer, we must proceed to transformations of the order $8n$; and it is convenient to employ the Elliptic Functions of the Second Stage, explained in the *Transformation and Division of Elliptic Functions* Proc. L. M. S. XXVII, p. 449, where we put

(2) $$x = -\frac{m^2\alpha}{(\alpha-m)^2}, \quad y = -\frac{(1-2m)\alpha}{\alpha-m};$$

so that S has the factor

(3) $$s - s_\gamma = \frac{m^2\alpha^2}{(\alpha-m)^2} - \frac{m^2\alpha}{\alpha-m}\frac{\frac{r^2}{a^2} - \left(\frac{1-m}{m}\right)^2}{1-\frac{r^2}{a^2}},$$

on putting, as in (10) § 3,

(4) $$s + x = \frac{y}{1-\frac{r^2}{a^2}},$$

(5) $$s = \frac{m^2\alpha}{(\alpha-m)^2}\frac{\frac{r^2}{a^2} + \frac{(1-2m)\alpha - m(1-m)^2}{m^2}}{\frac{r^2}{a^2} - 1}.$$

The other factors of S being denoted by $s - s_\alpha$ and $s - s_\beta$, (L. M. S. XXVII, p. 452) we find, after reduction,

(6) $$4(s-s_\alpha)(s-s_\beta) = 4s^2 + \frac{4(1-2m)\alpha - 1}{(\alpha-m)^2}m^2 s + \frac{m^4(1-2m)^2\alpha^2}{(\alpha-m)^4}$$
$$- \frac{\alpha}{(\alpha-m)^3}\frac{m^4\frac{r^4}{a^4} + \left\{4(1-2m)\alpha - 1 + 2m - 2m^2\right\}m^2\frac{r^2}{a^2} + \left\{2(1-2m)\alpha - m + m^2\right\}^2}{\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)^2}.$$

It is convenient in the sequel to put

(7) $$(1-2m)\alpha = (m-m^2)\beta = \frac{\beta}{4\gamma+4},$$

(8) $$(2m-1)^2 = \frac{\gamma}{\gamma+1};$$

and to change the scale of the figure by putting

(9) $$\frac{r^2}{b^2} = \varrho, \quad \text{where} \quad \frac{b^2}{a^2} = \frac{1-m}{m};$$

(10) $$s - s_\gamma = \frac{m^2\alpha}{\alpha-m}\frac{\varrho - \frac{1-m}{m}}{\frac{m}{1-m} - \varrho}.$$

$$(11)\quad A\alpha^3 = -\frac{m^3}{2(1-2m)^2\alpha} = -\frac{m^2}{2(1-2m)(1-m)\beta},$$

$$(12)\quad Ba = -m\frac{2(1-2m)\alpha-1+2m-2m^2}{2(1-2m)^2\alpha} = -m\frac{\beta-2\gamma-1}{(1-2m)\beta},$$

$$(13)\quad \frac{C}{a} = (1-m)\frac{2(1-2m)\alpha-m+m^2}{2(1-2m)^2\alpha} = (1-m\frac{2\beta-1}{2(1-2m)\beta};$$

$$(14)\quad \frac{p}{a} = -\frac{m^2}{2(1-2m)(1-m)\beta}\Big[\frac{r^4}{a^4}+2(\beta-2\gamma+1)\frac{1-m}{m}\frac{r^2}{a^2} - (2\beta-1)\Big(\frac{1-m}{m}\Big)^2$$

$$= -\frac{1-m}{2(1-2m)\beta}\Big\{\frac{r^4}{b^4}+2(\beta-2\gamma-1)\frac{r^2}{b^2}-2\beta+1\Big\}$$

or

$$(15)\quad \frac{p}{b} = \frac{V(m-m^2)}{2(2m-1)\beta}\{\varrho^2+2(\beta-2\gamma-1)\varrho-2\beta+1\}$$

$$= \frac{\varrho^2+2(\beta-2\gamma-1)\varrho-2\beta+1}{4\beta V\gamma}.$$

When $m - m^2$ in negative, we put

$$(16)\quad \frac{r^2}{b^2} = -\varrho, \quad \text{where} \quad \frac{b^2}{a^2} = \frac{m-1}{m};$$

and now γ is negative, and

$$(17)\quad \frac{p}{b} = \frac{\varrho^2+2(\beta-2\gamma-1)\varrho-2\beta+1}{4\beta V(-\gamma)}.$$

Also

$$(18)\quad 4(s-s_\alpha)(s-s_\beta) = \frac{m^4\alpha}{(\alpha-m)^3}\frac{\varrho^2+2(2\beta-2\gamma-1)\varrho+(2\beta-1)^2}{\Big(\frac{m}{1-m}-\varrho\Big)^2},$$

$$(19)\quad s+x = -\frac{m(1-2m)\alpha}{(1-m)(\alpha-m)}\frac{1}{\frac{m}{1-m}-\varrho}.$$

$$(20)\quad \frac{R}{b^2} = \frac{m}{1-m}\frac{\frac{1}{4}S}{(s+x)^4}$$

$$= \frac{P_1P_2}{16\beta^2\gamma\Big(\frac{m}{1-m}-\varrho\Big)^4}$$

where

$$(21)\quad P_1 = \Big(\frac{m}{1-m}-\varrho\Big)\Big(\varrho-\frac{1-m}{m}\Big)$$

$$= -\varrho^2+2(2\gamma+1)\varrho-1$$

$$(22)\quad P_2 = \varrho^2+2(2\beta-2\gamma-1)\varrho+(2\beta-1)^2,$$

$$(23)\quad P = P_1P_2$$

$$= -\{\varrho^2+2(\beta-2\gamma-1)\varrho-2\beta+1\}^2+16\beta^2\gamma\varrho;$$

and

$$(24)\qquad \theta = \frac{1}{2}\int_{\varrho}^{\infty} \frac{\varrho^{\frac{m}{1-m}}}{\varrho\sqrt{P}}\, d\varrho,$$

$$(25)\qquad \theta' = \frac{1}{2}\int_{\varrho}^{\infty} \frac{\varrho^{\frac{m}{1-m}} + \frac{y}{x} P(4v)\frac{m}{1-m}\varrho - 2\beta + 1}{\varrho\sqrt{P}}\, d\varrho,$$

$$(26)\qquad \theta' - \theta = \frac{y}{x} P(2v)\frac{m}{1-m}\int_{\varrho}^{\infty} \frac{\varrho^{\frac{m}{1-m}}\, d\varrho}{\sqrt{P}}.$$

21. As the effective parameter in the expression of the curve is $4v$, and now

$$(1)\qquad 4v = \frac{\omega'}{n},$$

we find that θ' can be reduced to either of the equivalent forms

$$(2)\qquad \theta' = \frac{1}{n}\sin^{-1}\frac{\varrho^{n-1} + H_1\varrho^{n-2} + \cdots + H_{n-1}}{Q\varrho^{\frac{1}{2}n}}\sqrt{P_1},$$

$$(3)\qquad = \frac{1}{n}\cos^{-1}\frac{\varrho^{n-1} + L_1\varrho^{n-2} + \cdots + L_{n-1}}{Q\varrho^{\frac{1}{2}n}}\sqrt{P_2}.$$

This implies the identical relation

$$(4)\quad Q^2\varrho^n = (\varrho^{n-1} + H_1\varrho^{n-2} + \cdots + H_{n-1})^2\{-\varrho^2 + 2(2\gamma+1)\varrho - 1\} + (\varrho^{n-1} + L_1\varrho^{n-2} + \cdots + L_{n-1})^2\{\varrho^2 + 2(2\beta - 2\gamma - 1)\varrho + (2\beta-1)^2\}$$

leading to the relations

$$(5)\qquad \begin{aligned} H_1 - L_1 &= 2\beta,\\ &\cdots\cdots\cdots\\ H_{n-1}^2 &= (2\beta-1)^2 L_{n-1}^2, \end{aligned}$$

useful for the determination or verification of the coefficients H and L.

The comparison of the differentiations of (2) and (3) will serve better for the determination of these coefficients; and in this manner we find

$$(6)\qquad \begin{aligned} H_1 &= 2\gamma + 1 - n\frac{y}{x}P(2v)\frac{m}{1-m},\\ L_1 &= -2\beta + 2\gamma + 1 - n\frac{y}{x}P(2v)\frac{m}{1-m},\\ H_2 &= \\ L_2 &= \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ H_{n-1} &= (2\beta-1)L_{n-1}. \end{aligned}$$

The curve is algebraical when $P(2v) = 0$, and then

(7) $H_1 = 2\gamma + 1, \qquad L_1 = -2\beta + 2\gamma + 1,$

(8) $H_2 = \frac{3}{2}(2\gamma+1)^2 - \frac{1}{2}, \quad L_2 = 2\beta^2 - 6\beta\gamma + 3\gamma^2 - 4\beta + 6\gamma +$

. . . . . .

the roots of $P_2 = 0$ are now imaginary, and ϱ oscillates betwe $\frac{m}{1-m}$ and $\frac{1-m}{m}$, or $[\sqrt{(\gamma+1)} \pm \sqrt{\gamma}]^2$.

22. In the simplest of these cases, when

$$n = 1, \quad 4v = \omega', \quad v = \tfrac{1}{4}\omega',$$

we shall find that $\beta = 1$, in consequence of the relation

(1) $$s_\gamma - s(4v) = 0,$$

in (329) L. M. S. XXVII, p. 450; and now

(2) $$\theta' = \sin^{-1} \frac{\sqrt{\{-\varrho^2 + 2(1+2\gamma)\varrho - 1\}}}{2\sqrt{\varrho}},$$

(3) $$= \cos^{-1} \frac{\sqrt{\{\varrho^2 + 2(1-2\gamma)\varrho + 1\}}}{2\sqrt{\varrho}},$$

(4) $$= \tfrac{1}{2}\sin^{-1}\frac{\sqrt{P}}{2\varrho} = \tfrac{1}{2}\cos^{-1}\frac{\varrho^2 - 4\gamma\varrho + 1}{2\varrho}.$$

Also

$$P(4v) = 0,$$

and

(5) $$\frac{d\theta'}{d\varrho} = -\frac{1}{2}\frac{\varrho^2 - 1}{\varrho\sqrt{P}},$$

(6) $$\frac{d\theta}{d\varrho} = -\frac{1}{2}\frac{\varrho^2 - 4\gamma\varrho - 1}{\varrho\sqrt{P}},$$

(7) $$\theta' - \theta = 2\gamma \int_{\varrho}^{\frac{m}{1-m}} \frac{d\varrho}{\sqrt{P}}.$$

Making use of the quadric substitution

(8) $$t = \frac{P_1}{P_2} = \frac{-\varrho^2 + 2(1+2\gamma)\varrho - 1}{\varrho^2 + 2(1-2\gamma)\varrho + 1},$$

then $\varrho = \pm 1$ give the turring points of t, where t assumes the valu

(9) $$\frac{\gamma}{1-\gamma} \quad \text{and} \quad -\frac{1+\gamma}{\gamma}.$$

We must distinguish between the two cases of $\gamma < 1$, and $\gamma > 1$

I. $0 < \gamma < 1$; the roots of $P_2 = 0$ are imaginary and ϱ oscillate between

(10) $$\varrho_0, \ \varrho_3 = [\sqrt{(1+\gamma)} \pm \sqrt{\gamma}]^2,$$

the roots of $P_1 = 0$; also

$$(11)\qquad \frac{\gamma}{1-\gamma} - t = \frac{(\varrho-1)^2}{(1-\gamma)P_2},$$

$$(12)\qquad t + \frac{1+\gamma}{\gamma} = \frac{(\varrho+1)^2}{\gamma P_2},$$

$$(13)\qquad 2\gamma\int_{\varrho}^{\varrho_0}\frac{d\varrho}{\sqrt{P}} = \sqrt{\frac{\gamma}{1-\gamma}}\int_{t}^{\infty}\frac{dt}{\sqrt{\left(4t\cdot t + \frac{1+\gamma}{\gamma}\cdot\frac{\gamma}{1-\gamma} - t\right)}}$$

an elliptic integral of the first kind, with modulus $\varkappa = \gamma$; and putting

$$(14)\qquad \cos\varphi = \sqrt{\left(\frac{1+\varkappa}{\varkappa}\right)}\frac{\varrho-1}{\varrho+1},$$

$$(15)\qquad 2\gamma\int\frac{d\varrho}{\sqrt{P}} = \varkappa\int_0\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \varkappa F\varphi$$

so that

$$(16)\qquad \theta = \theta' - \varkappa F\varphi,$$

θ, θ', and φ starting from zero, where

$$(17)\qquad \varrho = \varrho_0 = [\sqrt{(1+\varkappa)} + \sqrt{\varkappa}]^2.$$

When $\varrho = 1$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, $F\varphi = K$, and the arc of a loop is bisected; and

$$(18)\qquad \theta' = \sin^{-1}\sqrt{\varkappa} = \cos^{-1}\sqrt{(1-\varkappa)}.$$

When

$$\varrho = \varrho_3 = [\sqrt{(1+\varkappa)} - \sqrt{\varkappa}]^2,\quad \varphi = \pi,\quad F\varphi = 2K,\quad \theta' = 0;$$

and the apsidal angle

$$(19)\qquad \Theta = -2\varkappa K.$$

At the inflexions, $\varrho = 2\varkappa$, which makes

(20) $P_1 = 4\varkappa^2 + 4\varkappa - 1 = (2\varkappa+1)^2 - 2$

which is positive if

$$\varkappa > \tfrac{1}{2}(\sqrt{2}-1) > \sin 10^0 57';$$

and $p = 0$, when $\varrho^2 - 4\varkappa\varrho - 1 = 0$, which makes $P_1 = 2(\varrho-1)$, which is positive, so that the curve is looped.

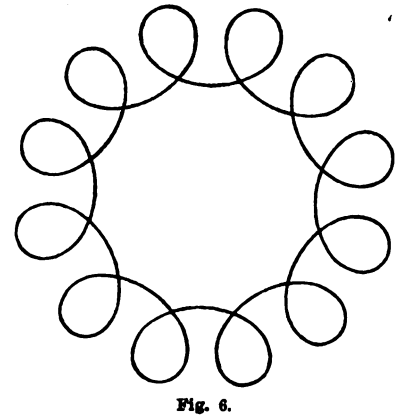


Fig. 6.

Fig. 6 has been drawn for a small modular angle, about $4^0 45'$, so as to show the running pattern, in the penultimate form of the case discussed by Halphen (F. E. II, p. 219).

II. $1 < \gamma < \infty$, the roots of $P_2 = 0$ are real, and denoting them by ϱ_1 and ϱ_2,

(21) $$\varrho_1,\ \varrho_2 = [\sqrt{\gamma} \pm \sqrt{(\gamma-1)}]^2$$

and

(22) $$2\gamma \int_{\varrho_1}^{\varrho_0,\varrho} \frac{d\varrho}{\sqrt{P}} = \sqrt{\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{\left(4t\cdot t + \frac{\gamma+1}{\gamma}\cdot t + \frac{\gamma}{\gamma-1}\right)}} = E\Phi,$$

with a modulus $\varkappa = \frac{1}{\gamma}$, and

(23) $$\sin^2\varphi = \frac{P_1}{\varkappa(\varrho+1)^2},\quad \cos^2\varphi = \frac{(1+\varkappa)P_2}{\varkappa(\varrho+1)^2},\quad \Delta^2\varphi = (1+\varkappa)\left(\frac{\varrho-1}{\varrho+1}\right)^2.$$

Thus at the bisection of the arc of a loop,

(24) $$\Delta^2\varphi = \sqrt{(1-\varkappa^2)},\quad \text{and}\quad \varrho = \frac{\sqrt{(1+\varkappa)}+\sqrt{(1-\varkappa)}}{\sqrt{(1+\varkappa)}-\sqrt{(1-\varkappa)}}.$$

At the inflexions, $\varrho = \frac{2}{\varkappa}$, which makes $P_2 = 2 - \left(\frac{2}{\varkappa}-1\right)^2$, so that $\varkappa > 2(\sqrt{2}-1) > \sin 56^0$.

The outer branch $(\varrho_0 > \varrho > \varrho_1)$ has the apsidal angle

(25) $$\Theta = \tfrac{1}{2}\pi - K,$$

and is of the same character as the curves in Case I for a negative discriminant; and the curve is now completed by the inner branch

$$(\varrho_2 > \varrho > \varrho_3),$$

with the apsidal angle

(26) $$\Theta = \tfrac{1}{2}\pi + K,$$

forming a running pattern, without points where $p = 0$, and without inflexions.

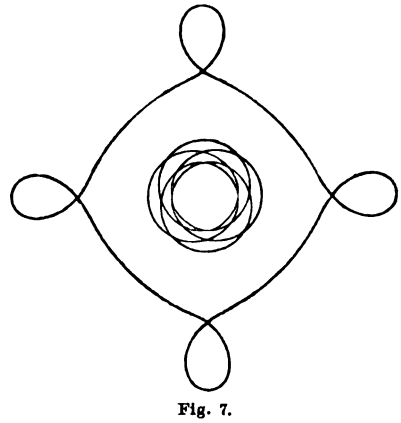


Fig. 7.

An example is given in fig. 7 for apsidal angles of -45^0 and 225^0, when the modular angle is about $66^0\,21'$; this may be compared with figures given by Halphen.

In the separating case between I and II, $\varkappa = 1$ and an asymptotic circle, $\varrho = 1$, makes its appearance; we find

(27) $$\theta = \sin^{-1}\frac{\sqrt{(-\varrho^2+6\varrho-1)}}{2\sqrt{\varrho}} - \mathrm{sh}^{-1}\frac{\sqrt{(-\varrho^2+6\varrho-1)}}{\sqrt{2(\varrho-1)}}$$

$$= \cos^{-1}\frac{\varrho-1}{2\sqrt{\varrho}} \qquad - \mathrm{ch}^{-1}\frac{\varrho+1}{\sqrt{2(\varrho-1)}},$$

in the outer branch; and

$$(28)\qquad \theta = \sin^{-1}\frac{\sqrt{(-1+6\varrho-\varrho^2)}}{2\sqrt{\varrho}} + \mathrm{sh}^{-1}\frac{\sqrt{(-1+6\varrho-\varrho^2)}}{\sqrt{2}(1-\varrho)}$$
$$= \cos^{-1}\frac{1-\varrho}{2\sqrt{\varrho}} \qquad + \mathrm{ch}^{-1}\frac{1+\varrho}{\sqrt{2}(1-\varrho)},$$

in the inner branch.

23. Proceeding to the next case of $n = 2$ and a parameter $4v = \frac{1}{2}\omega'$, and considering only the algebraical case with $P(2v) = 0$, then, from (2), (3), (7) § 21, the equations can be written

$$(1)\quad \theta \doteq \frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{(\varrho+2\gamma+1)\sqrt{\{-\varrho^2+2(2\gamma+1)\varrho-1\}}}{Q\varrho},$$

$$(2)\quad = \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{(\varrho-2\beta+2\gamma+1)\sqrt{\{\varrho^2+2(2\beta-2\gamma-1)\varrho+(2\beta-1)^2\}}}{Q\varrho};$$

and we shall find from the differentiations that

$$(3)\qquad \beta = -\frac{\sqrt{3}+1}{2},\quad \gamma = -\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}},\quad Q^2 = 2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)^2;$$

so that we must put $\varrho = -\frac{r^2}{b^2}$, and now

$$(4)\qquad \frac{p}{b} = \frac{\left(\frac{r^2}{b^2}-\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}\right)^2+\frac{5}{12}(\sqrt{3}+1)^2}{\frac{2}{\sqrt[4]{3}}(\sqrt{3}+1)^{\frac{3}{2}}},$$

so that p never vanishes; but there are points of inflexion where

$$(5)\qquad \frac{r^2}{b^2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}},$$

$$\frac{p}{b} = \frac{5\sqrt[4]{3}}{24}\sqrt{(\sqrt{3}+1)};$$

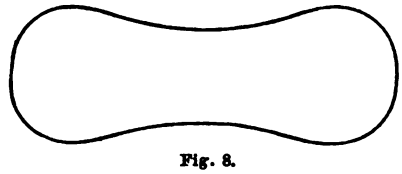


Fig. 8.

as shown in fig. 8.

24. It will not be difficult to work out the corresponding algebraical cases of the parameters

$$(1)\qquad 4v = \frac{1}{3}\omega',\quad \frac{1}{4}\omega',\quad \frac{1}{5}\omega',\ \ldots$$

when the equation of the curve takes one of the forms

$$(2)\qquad \theta = \frac{1}{3}\sin^{-1}\frac{\varrho^2+(2\gamma+1)\varrho+H_2}{Q\varrho^{\frac{3}{2}}}\sqrt{P_1},$$

$$(3)\qquad = \frac{1}{3}\cos^{-1}\frac{\varrho^2-(2\beta-2\gamma-1)\varrho+L_2}{Q\varrho^{\frac{3}{2}}}\sqrt{P_2};$$

or

$$\theta = \frac{1}{4}\sin^{-1}\frac{\varrho^3+(2\gamma+1)\varrho^2+H_2\varrho+H_3}{Q\varrho^2}\sqrt{P_1}, \tag{4}$$

$$= \frac{1}{4}\cos^{-1}\frac{\varrho^3-(2\beta-2\gamma-1)\varrho^2+L_2\varrho+L_3}{Q\varrho^2}\sqrt{P_2}; \tag{5}$$

. . . . . .

Writing δ for $2\gamma+1$, and ε for $2\beta-1$, we shall find in this way that the equations (2), (3) lead to

$$\varepsilon = -2\frac{2\delta^2-\delta}{(\delta-1)^2} \tag{6}$$

and

$$5\delta^6+3\delta^4+8\delta^3-9\delta^2+1=0, \tag{7}$$

$$\varepsilon^6+6\varepsilon^5+21\varepsilon^4+34\varepsilon^3+21\varepsilon^2+6\varepsilon+1=0, \tag{8}$$

a reciproced sextic, which can be written

$$(\varepsilon+1)^6+2\varepsilon^3+6\varepsilon^2(\varepsilon+1)^2=0, \tag{9}$$

as that

$$(\varepsilon+1)^2+(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2})\,\varepsilon=0, \tag{10}$$

$$\varepsilon = -1-\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{4}+\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{2}-\left(1-\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{2}\right)\sqrt{(\sqrt[3]{4}+1)} \tag{11}$$

$$= -1.758994.$$

Similarly the equation for δ may be written

$$\delta^2+1+\sqrt[3]{4}(\delta^2+\delta)+2\sqrt[3]{2}\,\delta=0, \tag{12}$$

giving

$$\delta = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}-\frac{1}{\sqrt[3]{2}\sqrt{(\sqrt[3]{4}+1)}} = -1.287167, \tag{13}$$

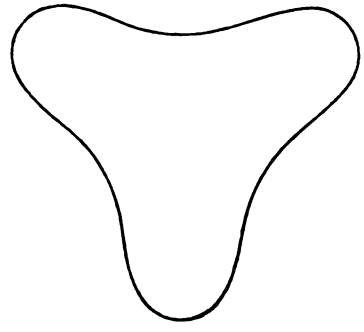


Fig. 9.

and fig. 9 has been drawn in accordance with these numerical results.

25. Having rectified the curve, by means of equation (5) § 1, and found its perimeter L, we may suppose the tube, of which the curve is the cross section, to spring out to a circular form of the same perimeter L and radius $c = L/2\pi$ suppose, on releasing the pressure p given by $p = 8EIA$ (Halphen, F. E. II, p. 194); while according to the formula (F. E. II, p. 235) the external pressure P at which the circular form becomes unstable, and tends to buckle into n waves is given by $P = (n^2-1)\frac{EI}{c^3}$, where $I = \frac{1}{12}(\text{thickness})^3$, and E is the modulus of elasticity of the material.

The length l of half a wave is given by (5) § 1

$$l = \frac{1}{2}\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr^2}{\sqrt{R}}, \tag{1}$$

so that, with

$$\rho = -\frac{r^2}{b^2}, \quad \frac{b^2}{a^2} = \frac{m-1}{m}, \tag{2}$$

$$\frac{l}{b} = \frac{1}{2A b^2}\int_{\rho_1}^{\rho_0} \frac{d\rho}{\sqrt{P}} = 2\beta\sqrt{(-\gamma)}\,\frac{2K}{\sqrt{(P_0 P_3)}} \tag{3}$$

where

$$\begin{aligned} P_0 &= \rho_0^2 + 2(2\beta - 2\gamma - 1)\rho_0 + (2\beta-1)^2 \\ &= 4\beta(\rho_0 + \beta - 1), \end{aligned} \tag{4}$$

$$P_3 = 4\beta(\rho_3 + \beta - 1), \tag{5}$$

$$P_0 P_3 = 16\beta^2(\beta^2 + 4\beta\gamma - 4\gamma), \tag{6}$$

and

$$\varkappa^2, \varkappa'^2 = \frac{1}{2} \mp \frac{\beta^2 + 2\beta\gamma - 2\gamma(\gamma+1)}{2\beta\sqrt{(\beta^2+4\beta\gamma-4\gamma)}}, \tag{7}$$

$$\varkappa^2\varkappa'^2 = \frac{\gamma^2(\gamma+1)(2\beta-2\gamma-1)}{\beta^2(\beta^2+4\beta\gamma-4\gamma)}. \tag{8}$$

The arc is bisected where

$$\rho = \sqrt{(P_0 P_3)} - \beta + 1, \tag{9}$$

$$\frac{r^2}{b^2} = \beta - 1 + 4\beta\sqrt{(\beta^2+4\beta\gamma-4\gamma)}. \tag{10}$$

Now on releasing the pressure from a tube collapsed into n waves, the tube springs out to a circular form of radius c, such that the half wave becomes an arc of a circle subtending an angle π/n; and thus

$$\frac{\pi c}{n} = l, \tag{11}$$

$$\frac{c}{b} = \frac{n\sqrt{(\beta\gamma)}}{\sqrt{(\beta^2+4\beta\gamma-4\gamma)}}\,\frac{K}{\frac{1}{2}\pi}. \tag{12}$$

Then

$$\begin{aligned} \frac{p}{P} &= \frac{8Ac^3}{n^2-1} \\ &= \frac{2n^3}{n^2-1}\,\frac{(-\beta\gamma^2)^{\frac{1}{2}}}{(\beta^2+4\beta\gamma-4\gamma)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{K}{\frac{1}{2}\pi}\right)^3. \end{aligned} \tag{13}$$

Thus, in fig. 8, in which $n = 2$, we find that $\varkappa = \frac{1}{8}$, and

$$\frac{p}{P} = \frac{32}{27}\left(\frac{K}{\frac{1}{2}\pi}\right)^3 = 1.285, \tag{14}$$

so that an increase in pressure of $28\frac{1}{2}\,\%$ will collapse the tube from the circular form to that shown in fig. 8.

In fig. 9, where $n = 3$, we shall find that

$$\frac{x}{a} = 2 - \sqrt[3]{4}, \tag{15}$$

$$\frac{p}{P} = 1.319 \tag{16}$$

an increase of nearly 32 % over the pressure at which the tube begins to collapse into three waves; to preserve the stability of this form the tube may be held at the points of inflexion.

It will be noticed that the moduli of the elliptic functions which occur are the same as those required in the motion of a top having four or three cusps: this is consequent on the relation $P(2v) = 0$; and we may utilise this analogy in proceeding to the next case of equations (4) (5) § 24.

26. For the next case, in which the cross section of the collapsed tube is the algebraical curve, of four waves,

$$\theta = \frac{1}{4}\sin^{-1}\frac{\varrho^3 + H_1\varrho^2 + H_2\varrho + H_3}{Q\varrho^2}\sqrt{P_1}, \tag{1}$$

$$\theta = \frac{1}{4}\cos^{-1}\frac{\varrho^3 + L_1\varrho^2 + L_2\varrho + L_3}{Q\varrho^2}\sqrt{P_2} \tag{2}$$

with

$$H_1 = \delta, \quad L_1 = \delta - \varepsilon - 1, \quad H_2 = \frac{3}{2}\delta^2 - \frac{1}{2}, \tag{3}$$

$$L_2 = \frac{3}{2}(\delta - \varepsilon - 1)^2 - \frac{1}{2}\varepsilon^2, \quad H_3 = \varepsilon L_3,$$

$$L_3 = \frac{3\delta^2 - 1 - 6\varepsilon(\delta - \varepsilon - 1) + 2\varepsilon^3}{2(3\delta\varepsilon + 4\delta - 2\varepsilon - 2)},$$

we are led to a reciprocal equation for ε, of the 18th degree, which, on putting $\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} = x$, reduces to

$$(x+2)(x^2-2)(3x^6 + 8x^5 - 98x^4 - 688x^3 - 1900x^2 - 2624x - 1528) = 0. \tag{4}$$

Putting $x = \frac{2}{y} - 2$, the sextic equation becomes

$$y^6 + 20y^5 + 22y^4 + 64y^3 - 4y^2 + 112y - 24 = 0, \tag{5}$$

an equation of the same structure as (288) L. M. S. XXVII, p. 597, having two real roots, 0.21 and -19.02176; of which the second gives a value $\varepsilon = -1.3810617$, and thence $\delta = -1.135$, which gives Fig. 10.

27. When the cross section has five waves, the form is given by

$$\theta = \frac{1}{5}\sin^{-1}\frac{\varrho^4+H_1\varrho^3+H_2\varrho^2+H_3\varrho+H_4}{Q\varrho^{\frac{5}{2}}}\sqrt{P_1}, \tag{1}$$

$$\theta = \frac{1}{5}\cos^{-1}\frac{\varrho^4+L_1\varrho^3+L_2\varrho^2+L_3\varrho+L_4}{Q\varrho^{\frac{5}{2}}}\sqrt{P_2}, \tag{2}$$

with the same expressions for H_1, L_1, H_2, L_2 as above; and an investigation is in progress on the elimination of H_3, L_3, H_4 for the formation of the equations for ε and δ; the equation for ε will be

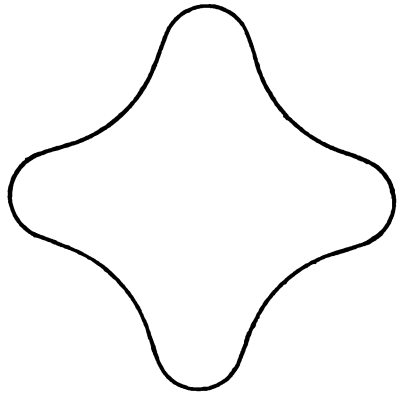


Fig. 10.

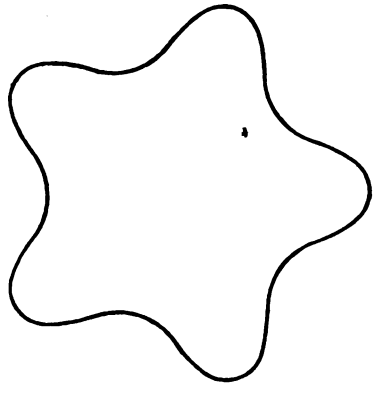


Fig. 11.

reciprocal, by analogy with the preceding cases, and will have the same structure as equation (314) (L. M. S. XXVII, p. 604) which is required for the determination of the motion of a top, complete in five cusps.

It is now found, on examination of equations (326) — (329), L. M. S. XXVII, that we can determine the algebraical curve with n waves by putting

$$\varepsilon = -\frac{\operatorname{cn}\frac{K'}{2n}}{\operatorname{cn}\frac{3K'}{2n}}, \tag{3}$$

$$\frac{n-1}{n} = \tan\frac{1}{2}\varphi_1\tan\frac{1}{2}\varphi_2, \tag{4}$$

$$F\varphi_1 = (2n-3)\frac{K'}{2n}, \quad F\varphi_2 = (2n-1)\frac{K'}{2n}; \tag{5}$$

the modulus being determined from the condition that

$$Z\frac{K'}{2n} = \frac{\operatorname{sn}\frac{K'}{2n}\operatorname{dn}\frac{K'}{2n}}{\operatorname{cn}\frac{K'}{2n}}, \quad \text{or} \quad Z\frac{K'}{n} = \frac{\operatorname{sn}\frac{K'}{n}\operatorname{dn}\frac{K'}{n}}{1+\operatorname{cn}\frac{K'}{n}}. \tag{6}$$

These formulas have been tested on the preceding algebraical curves, with two, three, and four waves; and they enable us to draw fig. 11, an algebraical curve with five waves, by putting $n = 5$, employing the co-modular angle $66^0\ 9'$ corresponding to the root $c = 7.4$ in equation (314), L. M. S. XXVII, p. 604, for cusps at intervals $\frac{4}{5}\pi$ in azimuth, in the corresponding case of algebraical motion of the Top.

28. Looking back over these and similar calculations required in mechanical problems which introduce the Elliptic Integral of the Third Kind, it will be remarked that a *desideratum* is the formation of the series of functions, analogous to the *sn*, *cn* and *dn* functions of Abel and Jacobi, as defined in Halphen's F. E. I., Chap. VII, p. 222.

By means of these functions it is possible to express

$$\Phi(u, v) = \frac{\Theta(u-v)}{\Theta u \Theta v} e^{\nu u}, \tag{1}$$

when

$$v = \frac{2\varpi}{n}, \quad \nu = \frac{2\widetilde{\eta}}{n}, \tag{2}$$

by the n^{th} root of an integral function of $\wp u$ and $\wp' u$; the logarithm of this function being an Elliptic Integral of the Third Kind; and Abel's pseudo-elliptic integral is reduced to

$$\frac{1}{2}\log\frac{\Phi(u, v)}{\Phi(-u, v)} = \frac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-v)}{\Theta(u+v)}e^{2\nu u} \tag{3}$$

being the integral $iI(v)$ of equation (1) § 2, its differential coefficient with respect to u being

$$\frac{1}{2} i \frac{P(v)(s-\sigma) - \sqrt{-\Sigma}}{s-\sigma}, \tag{4}$$

with

$$s - \sigma = \wp u - \wp v, \ \sqrt{S} = -\wp' u, \ \sqrt{-\Sigma} = i\wp' v. \tag{5}$$

The requisite materials of the analysis will be found in L. M. S. XXV, by means of which it is possible to make

$$\left\{\frac{\Theta(u-v)}{\Theta u \Theta v} e^{\nu u}\right\}^n = A + iB\sqrt{S}, \tag{6}$$

$$\left\{\frac{\Theta(u+v)}{\Theta u \Theta v} e^{-\nu u}\right\}^n = A - iB\sqrt{S}, \tag{7}$$

$$(s-\sigma)^n = A^2 + B^2 S, \tag{8}$$

where A and B are rational integral functions of s, of the order $\frac{1}{2}(n-1)$ and $\frac{1}{2}(n-3)$ if n is odd, and of the order $\frac{1}{2}n$ and

$\frac{1}{2}(n-4)$ if n is even; and, from L. M. S. XXV, XXVII, the values of A and B can be written down for the numbers

(9) $\quad n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 20, 22.$

When n is even, the relation can be written in the form

$$(10) \qquad \left\{\frac{\Theta(u-v)}{\Theta u \Theta v}\, e^{ru}\right\}^{\frac{1}{2}n} = P\sqrt{(s-s_\alpha)} + iQ\sqrt{(s-s_\beta \,.\, s-s_\gamma)}.$$

Also, when n is odd, it will be noticed that S, on putting $s-\sigma = t^2$, can be resolved into two factors T_1 and T_2, cubics in t, and that we can write

$$(11) \qquad \left\{\frac{\Theta(u-v)}{\Theta u \Theta v}\, e^{ru}\right\}^{\frac{1}{2}n} = L\sqrt{T_1} + iM\sqrt{T_2},$$

with

$$(12) \qquad t^n = L^2 T_1 + M^2 T_2,$$

in which L and M are integral functions of t, of the order $\frac{1}{2}(n-3)$.

Thus for instance, for $n = 11$, we are able to infer from § 18 of the present article, and from L. M. S. XXV, p. 241, that

$$(13) \qquad \left\{\frac{\Theta\left(u-\frac{4r\omega'}{11}\right)}{\Theta u\, \Theta\frac{4r\omega'}{11}}\, e^{\left(iP\frac{4r\omega'}{11}+2\zeta\frac{4r\omega'}{11}\right)u}\right\}^{\frac{11}{2}}$$

$$= \tfrac{1}{2}(t^4 - a_1 t^3 + a_2 t^2 - a_3 t + a_4)\sqrt{T_2}$$

$$+ \tfrac{1}{2} i (t^4 + a_1 t^3 + a_2 t^2 + a_3 t + a_4)\sqrt{T_1},$$

in which

$$(14) \qquad t^2 = s - \sigma = \wp u - \wp\frac{4r\omega'}{11},$$

$$(15) \qquad T_1 = 2t^3 + (1+y)t^2 + 2xt + xy,$$

$$(16) \qquad T_2 = 2t^3 - (1+y)t^2 + 2xt - xy,$$

$$(17) \qquad x = -\tfrac{1}{2} c(1+c)(1+2c+\sqrt{C}),$$

$$(18) \qquad y = -c\,\frac{1+4c+2c^2+\sqrt{C}}{2(1+c)},$$

$$(19) \qquad C = 1 + 4c + 8c^2 + 4c^3,$$

$$(20) \qquad P\frac{4r\omega'}{11} = \frac{6+27c+44c^2+18c^3+(8+13c)\sqrt{C}}{22(1+c)},$$

$$(21)\quad a_1 = -\frac{1}{2(1+c)}\{2+7c+10c^2+4c^3+(2+3c)\sqrt{C}\},$$

$$(22)\quad a_2 = -\frac{1}{2(1+c)^2}\{1+10c+40c^2+82c^3+86c^4+40c^5 +6c^6+(1+2c)^2(1+4c+2c^2)\sqrt{C}\},$$

$$(23)\quad a_3 = \frac{1}{2}\{1+8c+28c^2+52c^3+50c^4+20c^5+2c^6 +(1+2c)(1+4c+6c^2+2c^3)\sqrt{C}\},$$

$$(24)\quad a_4 = \frac{c}{2(1+c)}\{1+11c+54c^2+151c^3+255c^4+254c^5 +135c^6+32c^7+2c^8 +(1+9c+34c^2+67c^3+69c^4+32c^5+5c^6)\sqrt{C}\}.$$

The „multiplicative elliptic functions“ α, β, γ, δ introduced by Professor Klein into the Theory of the Top are of the same nature as this function $\Phi(u, v)$, qualified by factors which are exponential functions of the time [*Princeton Lectures*, p. 31; Klein-Sommerfeld, *Theorie des Kreisels*, p. 420] and the time is expressible by Legendre's elliptic integral $F\varphi$, the only transcendental function now required to be tabulated.

A sufficient number of these functions will enable us to explore the analytical field of a mechanical problem by a series of the parameter v which are the simplest aliquot parts of a period, between two of which any actual numerical case may be taken to lie.

We are thereby relieved of the necessity of tables of the Θ functions, and even these would be useless when the parameter v was a fraction of the imaginary period, as is generally the case, as seen above.

We can however change v immediately to a fraction of the real period, merely by changing the sign of s and S in our expressions, and thereby tabulate an algebraical series of the „*Theilwerthe*“ of the Θ and Z functions of Jacobi.

Artillery College, Woolwich (England), November 1898.

Symmetrische Functionen.

Von

P. Gordan in Erlangen.

Die symmetrischen Functionen der Wurzeln einer Gleichung sind ganze Functionen ihrer Coefficienten.

Von diesem Fundamentalsatze macht man in allen Gebieten der Algebra Gebrauch, besonders bei der Bildung der Resolventen und der Resultanten.

Bei der Durchführung der betreffenden Aufgaben sind oft verwickelte Rechnungen nothwendig; in einfacheren Fällen kann man sich auch der Tafeln bedienen.

Zur Erleichterung der hiebei auftretenden Operationen haben viele bedeutende Mathematiker u. A. Cayley und Betti Relationen zwischen symmetrischen Functionen entwickelt. In der letzten Zeit hat Herr Mac-Mahon im Amerikanischen Journal Volume 11, 12, 14 eine Reihe ausgedehnter Arbeiten veröffentlicht. Besonders hat er sich mit der Waring'schen Formel beschäftigt, welche die Summen der Potenzen der Wurzeln durch die Coefficienten ausdrückt.

Diese Arbeiten habe ich nun in der nachstehenden Untersuchung fortzuführen gestrebt, indem ich nicht nur die Potenzsummen s als Functionen $s(a)$ der Coefficienten a darstellte, sondern umgekehrt die Coefficienten a als Functionen $\psi(s)$ der Potenzsummen untersuchte.

Will man für irgend welche Functionen

$$\xi_1\ \xi_2 \cdots \xi_n$$

der Wurzeln einer oder mehrerer Gleichungen die Resolvente

$$\Xi = (x-\xi_1)\,(x-\xi_2)\cdots$$

aufstellen, so kann man diesen Process in 2 Theile auflösen:

1. Man bestimme die Potenzsumme
$$S_\varrho = \xi_1^\varrho + \xi_1^\varrho \cdots \xi_n^{\varrho_n}.$$
2. Man rechne die Functionen $\psi(S)$ aus, es sind die Coefficienten der gesuchten Gleichung.

Der Prozess die S zu finden entspricht der Bildung der Logarithmen

gegebener Reihen und die Aufsuchung der Functionen ψ der Bildung ihrer Exponentialfunctionen.

Durch dieses Verfahren habe ich zweierlei Resultate gewonnen:

1. Ich habe die Resultanten zweier Gleichungen die Discriminante einer Gleichung und verschiedene Resolventen in expliciter Form dargestellt.
2. Ich habe die numerischen Coefficienten, welche in diesen Bildungen auftreten, explicite dargestellt.

Die erste Aufgabe ist nun schon längst mittelst Determinanten gelöstt. Aber diese Art Lösung ist nur von formaler Bedeutung, da die Berechnung von Determinanten bei einer grösseren Anzahl von Reihen für die Praxis nicht durchgeführt werden kann.

1. Capitel.

Die Functionen s und ψ.

§ 1.

Definition der Functionen s und ψ.

Die einfachsten symmetrischen Functionen von Variabeln

$$\xi_1\ \xi_2 \ldots$$

sind ihre Elementarfunctionen a und ihre Potenzsummen s, sie sind durch die Formeln definirt:

$$f(x, a) = \sum_g a_g x^g = \prod_\varrho (1 - \xi_\varrho x)$$

$$s_g = \sum_\varrho \xi_\varrho^{\,g}.$$

Man kann die a aus den s und die s durch die a berechnen; dieser Vorgang möge durch die Formeln angedeutet werden:

$$s_g = s_g(a); \quad a_g = \psi_g(s)$$

aus ihnen folgt:

$$s_g\left(\psi(s)\right) = s_g; \quad \psi_g\left(s(a)\right) = a_g.$$

Beispiele.

1) $f(x, a) = (1-x)^n$; $s_g = n$; $a_g = (-1)^g \binom{n}{g}$;

2) $f(x, a) = 1 - x^n$; $s_g = n$ oder 0 je nachdem g den Factor n hat oder nicht. $a_g = 1, -1, 0$ je nachdem $g = 0$, n oder $\gtrless 0$, n ist.

§ 2.

Die Producte p.

Die Producte der a bezeichne ich durch

$$p_x(a) = a_1^{x_1} a_2^{x_2} \dots$$

und ordne sie nach ihrem Gewichte

$$g = x_1 + 2x_2 \dots$$

der Art, dass Producte p von kleinerem Gewichte voranstehen. Bei p' von gleichem Gewichte stehen die voran, bei denen

$$h = x_1 + x_2 \cdots$$

einen grösseren Werth hat.

Vorstehende p gelten für einfacher, spätere für verwickelter. Das einfachste p vom Gewichte g ist a_1^g das verwickelste a_g.

Den Process $a_\varrho a_\sigma$ durch $a_{\varrho+\sigma}$ zu ersetzen, nenne ich Faltung, und den umgekehrten $a_{\varrho+\sigma}$ durch $a_\varrho a_\sigma$ zu ersetzen, Spaltung; beide ändern das Gewicht nicht. Spaltung erzeugt einfachere p, Faltung verwickeltere.

Durch fortgesetzte Faltung erhält man aus a_1^g alle p vom Gewichte g und ebenso durch fortgesetzte Spaltung von a_g.

Eine besondere Art von Faltung und Spaltung ist das Ersetzen von $a_{\varrho+1}$ und $a_1 a_\varrho$ durch einander. Spaltet man so in p_x alle Factoren ausser den a_1 also $h - x_1$ Factoren, so erhält man:

$$P = a_1^{h+x_1} a_2^{x_2} a_3^{x_3} \dots$$

und P erzeugt durch Faltungen, bei denen $a_1^{h_1}$ betheiligt ist, ausser p_x solche p, welche durch specielle Spaltungen aus p_x entstehen.

Beispiel.

$a_1^{m-\varrho} . a_\varrho$ erzeugt durch Faltung $a_1^{m-\varrho-1} a_{\varrho+1}$ und $a_1^{m-\varrho} a_\varrho$

und

$a_1^{m-\varrho-1} a_{\varrho+1}$ dnrch Spaltung $a_1^{m-\varrho} a_\varrho$;

$a_1^{m-1} . a_1$ erzeugt durch Faltung $a_1^{m-2} a_2$ und a_1^m

und

$a_1^{m-2} a_2$ durch Spaltung a_1^m.

§ 3.

Zusammengesetzte ξ.

Die Variabeln ξ können auch aus anderen zusammengesetzt sein; wir wollen fünf Beispiele anführen.

1. Beispiel.

Die ξ seien Quotienten von Variabeln

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m; \quad \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n,$$

$$\xi_{\varrho,\sigma} = \frac{\beta_\sigma}{\alpha_\varrho}.$$

Es wird dann:

$$s_g = \sum_{\varrho,\sigma} \left(\frac{\beta_\sigma}{\alpha_\varrho}\right)^g,$$

$$\prod_{g=1}^{g=mn} \psi_g(s)\, x^g = \prod_{\varrho=1}^{\varrho=m} \prod_{\sigma=1}^{\sigma=n} \left(1 - \frac{\beta_\sigma}{\alpha_\varrho}\, x\right).$$

Sind $\alpha\beta$ die Wurzeln von Gleichungen

$$f(x, a) = \prod_{\varrho=1}^{\varrho=m} (1 - \alpha_\varrho x); \quad f(x, b) = \prod_{\sigma=1}^{\sigma=n} (1 - \beta_\sigma x)$$

so ist:

$$s_g = s_{-g}(a)\, s_g(b).$$

2. Beispiel.

Die ξ sind die Quotienten der Wurzeln

$$\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_m$$

der Gleichung:

$$f(x, a) = \prod_{\varrho=1}^{\varrho=m} (1 - \alpha_\varrho x),$$

$$\xi_{\varrho,\sigma} = \frac{\alpha_\sigma}{\alpha_\varrho} \qquad \varrho \gtrless \sigma.$$

Es wird:

$$s_g = s_g(a)\, s_{-g}(a) - m,$$

$$\sum_{g=0}^{g=m(m-1)} \psi_g(s) x^g = \prod_{\varrho,\sigma} \left(1 - \frac{\alpha_\sigma}{\alpha_\varrho}\, x\right).$$

3. Beispiel.

Die ξ sind Producte aus ν Reihen von Variabeln

$$\alpha_1 \alpha_2 \ldots, \quad \beta_1 \beta_2 \ldots, \quad \gamma_1, \gamma_2 \ldots$$

den Wurzeln von:

$$f(x, a) = \prod_{\varrho} (1 - a_\varrho x),$$

$$f(x, b) = \prod_{\varrho} (1 - \beta_\varrho x),$$

$$f(x, c) = \prod_{\varrho}(1 - \gamma_\varrho x),$$

. . . . . .

$$\xi_{\varrho_1, \varrho_2 \cdots \varrho_\nu} = \alpha_{\varrho_1} \beta_{\varrho_2} \gamma_{\varrho_3} \cdots.$$

Wir erhalten:

$$S_g = \sum \xi^g = s_g(a)\, s_g(b)\, s_g(c) \cdots.$$

Die Gleichung deren Wurzeln die ξ sind, sei

$$f(x, a, b, c \cdots) = f(x, A) = \prod_{\varrho}(1 - \xi_\varrho x),$$

so dass:

$$A_g = \psi_g(S); \quad s_g(A) = S_g,$$

$$f(x, a, b, c \cdots) = \prod_{\varrho} f(\alpha_\varrho x, b, c \cdots)$$

wird.

In dem speciellen Falle:

$$f(x, a) = 1 - x$$

wird:

$$f(x, a, b, c \cdots) = f(x, b, c \cdots).$$

Den $\log f(x, a, b, c)$ bezeichne ich durch $\vartheta(x, a, b, c)$, seine Reihenentwicklung lautet:

$$\vartheta(x, a, b, c) = -\sum_{g} \frac{1}{g} S_g x^g.$$

4. Beispiel.

$$f(x, a) = \prod_{\varrho}(1 - \alpha_\varrho x); \quad f(x, b) = (1 - x)^n.$$

Die ξ sind die Producte der:

$$\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m \text{ und } n \text{ Zahlen } \beta_1 = \beta_2 \cdots \beta_n = 1,$$

also n Mal die Variabeln α. Somit ist

$$f(x, a, b) = f^n(x, a),$$

$$s_g = n \cdot s_g(a).$$

Die Coefficienten von $(1 - x)^n$ sind die $\psi\big(s(b)\big)$

$$\psi_g\big(s(b)\big) = (-1)^g \frac{n!}{g!\,(n-g)!}$$

und die Coefficienten von f^n die $\psi\big(ns(a)\big)$.

$$\psi_g\big(ns(a)\big) = \sum_{x} \frac{n!}{(n-h)!} \frac{1}{x_1!\, x_2! \ldots} p_x(a),$$

$$\psi_g\big(ns(a)\, s(b)\big) = \sum_{k} \frac{n!}{(n-h)!} \frac{1}{x_1!\, x_2! \ldots} p_x\Big(\psi\big(s(a)\, s(b)\big)\Big).$$

5. Beispiel.

$$f(x, a) = \prod_{\varrho}(1 - \alpha_\varrho x); \quad f(x, b) = 1 - x^n.$$

Die ξ sind die Producte der:

$$\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m \quad \text{und} \quad 1 \; \varepsilon \; \varepsilon^2 \ldots \varepsilon^{n-1}$$

wo

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n}.$$

Wir erhalten

$$\xi_{\varrho,\sigma} = \varepsilon^\varrho \alpha_\sigma,$$

$$f(x, a, b) = \prod_{\varrho} f(\varepsilon^\varrho x, a) = \prod_{\varrho}(1 - \alpha_\varrho^n x^n),$$

$$S_g = \begin{cases} 0 & \text{für } g \not\equiv 0, \text{ mod. } n, \\ n s_g(0) & ,, \quad g \equiv 0, \quad ,, \quad n. \end{cases}$$

Die Coefficienten von $f(x, a, b)$ sind die $\psi_g(S)$; sie verschwinden wenn g nicht durch n theilbar ist, für die $\psi_{gn}(S)$ haben wir die Formel:

$$\psi_{gn}(S) = \psi_{gn}\big(n s(a)\big).$$

§ 4.

Die Waring'sche Formel.

Aus den Formeln:

$$f(x, a) = \prod_{\varrho}(1 - v_\varrho x);$$

$$f(x, A) = \prod_{\varrho}(1 - \xi_\varrho x) = \prod(1 - \alpha_{\varrho_1} \beta_{\varrho_2} \gamma_{\varrho_3} \cdots x)$$

folgt

$$\log f(x, a) = \vartheta(x, a) = -\sum_{g}{}' \frac{1}{g} s_g(a) x^g,$$

$$\log f(x, a, b, c \cdots) = \vartheta(x, a, b, c \cdots) = -\sum_{g}{}' \frac{1}{g} S_g x^g,$$

wo

$$S_g = s_g(a) s_g(b) s_g(c) \cdots.$$

Die Entwicklung des Logarithmus liefert:

$$\log f(x, a) = \sum_{1}{}' \frac{(-1)^{h-1}}{h}(a_1 x + a_2 x^2 \cdots)^h = \sum_{k}{}' (-1)^{h-1} \frac{(h-1)!}{\varkappa_1! \varkappa_2! \cdots} p_\varkappa(a) x^g,$$

$$\log f(x, a, b \cdots) = \sum_{k}{}' (-1)^h \frac{(h-1)!}{\varkappa_1! \varkappa_2! \cdots} p_\varkappa(A) x^g.$$

Vergleicht man die Coefficienten von x^g, so erhält man die Formeln:

$$s_g(a) = \sum_x (-1)^h \frac{(h-1)!}{\mathfrak{x}_1!\,\mathfrak{x}_2!\ldots} p_x(a),$$

$$S_g = \sum_x (-1)^h \frac{(h-1)!}{\mathfrak{x}_1!\,\mathfrak{x}_2!\ldots} p_x(A).$$

Die p_x haben das Gewicht von g.

Beispiel.

$$\prod_p (1 - \alpha_\varrho x) = \frac{1 - e^x}{x}.$$

Wurzeln α: $\frac{1}{2i\pi}, \frac{1}{4i\pi} \ldots$

$$a_g = \frac{1}{(g+1)!}; \quad s_{2g} = \sum \frac{(-1)^g}{2^{2g-1}\pi^{2g}}; \quad s_{2g+1} = 0,$$

$$\sum_\varrho \frac{1}{\varrho^{2g}} = (-1)^g 2^{2g-1}\pi^{2g} \sum_x (-1)^h \frac{(h-1)!}{\mathfrak{x}_1!\,\mathfrak{x}_2!\ldots} \left(\frac{1}{2!}\right)^{\mathfrak{x}_1} \left(\frac{1}{3!}\right)^{\mathfrak{x}_2}.$$

§ 5.

Entwicklung der ψ.

Aus der Formel:

$$f = e^\vartheta$$

folgen diese:

$$f = \sum_h \frac{\vartheta^h}{h!},$$

$$f(x, a) = \sum_x \frac{(-1)^h}{\mathfrak{x}_1!\,\mathfrak{x}_2!\ldots 1^{\mathfrak{x}_1} 2^{\mathfrak{x}_2}\ldots} p_x\big(s(a)\big)\, x^g,$$

$$f(x, A) = f(x, a, b, c \ldots) = \sum_x \frac{(-1)^h}{\mathfrak{x}_1!\,\mathfrak{x}_2!\ldots 1^{\mathfrak{x}_1} 2^{\mathfrak{x}_2}\ldots} p_x(S)\, x^g$$

und, wenn man die Coefficienten von x^g vergleicht:

$$a_g = \psi_g\big(s(a)\big) = \sum_x \frac{(-1)^h}{\mathfrak{x}_1!\,\mathfrak{x}_2!\ldots 1^{\mathfrak{x}_1} 2^{\mathfrak{x}_2}\ldots} p_x\big(s(a)\big),$$

$$A_g = \psi_g(S) = \sum_x \frac{(-1)^h}{\mathfrak{x}_1!\,\mathfrak{x}_2!\ldots 1^{\mathfrak{x}_1} 2^{\mathfrak{x}_2}\ldots} p_x(S).$$

Für die Resultante R der Gleichungen:

$$f(x, a), \quad f(x, b)$$

nnd für die Discriminante Δ einer Gleichung $f(x, a)$ folgen hieraus die Formeln:

$$R = \sum_{\varkappa} \frac{(-1)^{\lambda+mn}}{\varkappa_1!\,\varkappa_2!\ldots 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2}\ldots}\, a_m^n \left(s_{-1}(a)\, s_1(b)\right)^{\varkappa_1} \left(s_{-2}(a)\, s_2(b)\right)^{\varkappa_2} \ldots,$$

$$\Delta = \sum_{\varkappa} \frac{(-1)^{\lambda}}{\varkappa_1!\,\varkappa_2!\ldots 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2}\ldots}\, a_m^{m-1} \left(s_{-1}(a)\, s_1(a) - m\right)^{\varkappa_1} \left(s_{-2}(a)\, s_2(a) - m\right)^{\varkappa_2} \ldots.$$

Die 1. Summe erstreckt sich über die Producte, deren Gewicht $\leqq mn$ ist, und die 2. über die, deren Gewicht $\leqq m \cdot m - 1$ ist.

§ 6.

Die Newton'schen Formeln.

Vergleicht man in der Formel:

$$\frac{\partial f}{\partial x} - f\frac{d\vartheta}{dx} = 0$$

die Coefficienten der Potenzen von x, so wird:

$$0 = a_0 s_g + a_1 s_{g-1} \cdots g a_g$$

oder ausführlicher geschrieben:

$$\begin{aligned} 0 &= a_0 s_g(a) + a_1 s_{g-1}(a) \ldots a_{g-1} s_1(a) + g a_g, \\ 0 &= \psi_0(s)\, s_g + \psi_1(s)\, s_{g-1} \ldots \psi_{g-1}(s) s_1 + g \psi_p(a), \\ 0 &= A_0 S_g + A_1 S_{g-1} \quad \ldots A_{g-1} S_{g-1} + g A_g. \end{aligned}$$

Sie dienen zur schrittweisen Berechnung der a, A aus den s, S, also der Resultante und Discriminante

$$A_1 + A_2 \cdots.$$

2. Capitel.

Relationen zwischen den $s(a)$ und $\psi(s)$.

§ 1.

Die $\psi\left(s(a) + s(b)\right)$.

Die Coefficienten des Productes

$$f(x, a)\, f(x, b)$$

sind nach der Formel:

$$-\log\left(f(x, a)\, f(x, b)\right) = \sum_g \frac{1}{g}\left(s_g(a) + s_g(b)\right) x^g$$

die Functionen:

$$\psi\left(s(a) + s(b)\right).$$

Es ist:

$$\psi_g\big(s(a)+s(b)\big)=\sum_{\varrho,\sigma} a_\varrho b_\sigma,$$

$$\psi_g\big(s(a)\,(s(b)+s(c))\big)=\sum_{\varrho,\sigma}\psi_\varrho\big(s(a)\,s(b)\big)\,\psi_\sigma\big(s(a)\,s(c)\big).$$

Die Summen erstrecken sich über alle ϱ, σ, bei denen

$$\varrho+\sigma=g$$

ist, also a_g durch Faltung aus $a_\varrho a_\sigma$ entsteht.

1. Beispiel.

$$f(x, b)=1-x.$$

$$s_g(b)=1;\quad \psi_g\big(s(a)+1\big)=a_g-a_{g-1},$$

$$\psi_g\big(\big(s(a)+1\big)\,s(b)\big)=\sum_{\varrho,\sigma}\psi_\varrho\big(s(a)\,s(b)\big)\,b_\sigma.$$

2. Beispiel.

$$f(x, b)=1-xy.$$

$$s_g(b)=y^g;\quad \psi_g\big(s_\varrho(a)+y^\varrho\big)=a_g-y\,a_{g-1},$$

$$\psi_g\big(\big(s_\varrho(a)+g^\varrho\big)\,s_\varrho(b)\big)=\sum_{\varrho,\sigma}\psi_\varrho\big(s(a)s(b)\big)\;g^\sigma b_\sigma.$$

3. Beispiel.

$$(1-x)^n.$$

$$s_g(b)=n;\quad \psi_g\big(s(a)+n\big)=\sum_{\varrho}(-1)^\varrho\frac{n!}{\varrho!\,(n-\varrho)!}\,a_{g-\varrho},$$

$$\psi_g\big(\big(s(a)+n\big)\,s(b)\big)=\sum_{\varrho}\psi_\varrho\big(s(a)\,s(b)\big)\;\psi_\sigma\big(n\,s(b)\big),$$

$$=\sum_{\varrho,\varkappa}\frac{n!}{(n-h)!}\,\frac{1}{\varkappa_1!\,\varkappa_2!\ldots}\,p_\varkappa(b)\,\psi_\varrho\big(s(a)\,s(b)\big).$$

§ 2.

Differentiation nach den s.

Differentiirt man die Formel:

$$f=e^\Phi$$

nach s_ϱ und nach $s_1^{\varkappa_1}s_2^{\varkappa_2}\ldots$, so wird:

$$\frac{df}{ds_\varrho}=-\frac{x^\varrho}{\varrho}f;\quad \frac{d_h f}{ds_1^{\varkappa_1}ds_2^{\varkappa_2}\ldots}=\frac{(-1)^h}{1^{\varkappa_1}2^{\varkappa_2}\ldots}\,x^g f.$$

Vergleicht man hier die Coefficienten der Potenzen von x, so folg

$$\frac{d\psi_l(s)}{ds_\varrho} = \frac{da_l}{ds_\varrho(a)} = -\frac{1}{\varrho}\, a_{l-\varrho},$$

$$\frac{d_h\psi_l(s)}{ds_1^{x_1} ds_2^{x_2}\ldots} = \frac{d_h a_l}{d\left(s_1(a)\right)^{x_1} d\left(s_2(a)\right)^{x_2}\ldots} = \frac{(-1)^h}{1^{x_1}\,2^{x_2}\ldots}\, a_{l-g},$$

$$\frac{dA_l}{ds_\varrho(a)} = -\frac{1}{\varrho}\,\frac{S_\varrho}{s_\varrho(a)}\, A_{l-\varrho},$$

$$\frac{d_h A_l}{d\left(s_1(a)\right)^{x_1} d\left(s_2(a)\right)^{x_2}\ldots} = \frac{(-1)^h}{1^{x_1}\,2^{x_2}\ldots}\, A_{l-g}\, p_x\left(\frac{S}{s(a)}\right).$$

§ 3.

Differentiation nach den a.

Differentiirt man die Formel:

$$\sum_l \frac{1}{l}\, s_l\, x^l = -\log f$$

nach a_ϱ und den Factoren von $a_1^{x_1} a_2^{x_2}\ldots$ so wird:

$$\frac{d}{da_\varrho}\sum_l \frac{1}{l}\, s_l\, x^l = -\,x^\varrho\, f\left(x,\, \psi(-s)\right),$$

$$\frac{d_h}{da_1^{x_1} da_2^{x_2}\ldots}\sum_l \frac{1}{l}\, s_l\, x^l = (-1)^h\,(h-1)!\, x^g\, f\left(x,\, \psi(-s\right)$$

und vergleicht man die Coefficienten von x^l, so hat man

$$\frac{ds_l}{da_\varrho} = -\,l\,\psi_{l-\varrho}(-s),$$

$$\frac{d_h\, s_l}{da_1^{x_1} da_2^{x_2}\ldots} = (-1)^h\,(h-1)\,l.l\,\psi_{l-g}(-s).$$

Ferner ist:

$$\frac{dA_r}{da_\varrho} = \sum_l \frac{dA_r}{ds_l(a)}\,\frac{ds_l(a)}{da_\varrho} = \sum_l \frac{S_l}{s_l(a)}\, A_{r-l}\,\psi_{l-\varrho}\left(-s(a)\right)$$

und im Besonderen:

$$\frac{dA_r}{da_r} = \frac{S_r}{s_r(a)}.$$

§ 4.

Die Producte der s.

Die $p_\varkappa(s)$ sind ganze Functionen der s vom Gewichte g, ich bezeichne in ihnen die Coefficienten der $p_\lambda(a)$ durch:

$$\begin{pmatrix} 1^{\varkappa_1}\, 2^{\varkappa_2} \dots \\ 1^{\lambda_1}\, 2^{\lambda_2} \dots \end{pmatrix}$$

setze also:

$$p_\varkappa\big(s(a)\big) = \sum_\lambda \begin{pmatrix} 1^{\varkappa_1}\, 2^{\varkappa_2} \dots \\ 1^{\lambda_1}\, 2^{\lambda_2} \dots \end{pmatrix} p_\lambda(a),$$

$$p_\varkappa(S) = \sum_\lambda \begin{pmatrix} 1^{\varkappa_1}\, 2^{\varkappa_2} \dots \\ 1^{\lambda_1}\, 2^{\lambda_2} \dots \end{pmatrix} p_\lambda(A).$$

Die Summen erstrecken sich über alle p_λ, welche durch fortgesetzte Spaltung aus $p_\varkappa$ entstehen. Die Zahl

$$\begin{pmatrix} 1^{\varkappa_1}\, 2^{\varkappa_2} \dots \\ 1^{\lambda_1}\, 2^{\lambda_2} \dots \end{pmatrix}$$

st der Coefficient von $p_\lambda(a)$ in $p_\varkappa\big(s(a)\big)$ oder verschwindet, je nachdem $p_\varkappa$ durch fortgesetzte Spaltung p_λ erzeugt oder nicht.

Beispiele.

$$\begin{pmatrix} g \\ 1^{\varkappa_1}\, 2^{\varkappa_2} \dots \end{pmatrix} = (-1)^\lambda g \frac{(\varkappa-1)!}{\varkappa_1!\,\varkappa_2! \dots},$$

$$\begin{pmatrix} g \\ g \end{pmatrix} = -g; \quad \begin{pmatrix} 2\varrho \\ \varrho^2 \end{pmatrix} = \varrho; \quad \begin{pmatrix} \varrho+\sigma \\ \varrho,\ \sigma \end{pmatrix} = \varrho+\sigma,$$

wenn $\varrho \gtrless \sigma$,

$$\begin{pmatrix} 1^{\varkappa_1}\, 2^{\varkappa_2} \dots \\ 1^{\varrho} \end{pmatrix} = (-1)^\varrho,$$

$$\begin{pmatrix} \varrho^2 \\ \varrho^2 \end{pmatrix} = \varrho^2; \quad \begin{pmatrix} \varrho,\ \sigma \\ \varrho,\ \sigma \end{pmatrix} = \varrho\sigma$$

$$\begin{pmatrix} \varrho,\ \sigma \\ \tau^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau^2 \\ \varrho,\ \sigma \end{pmatrix} = 0,$$

wenn $\varrho \gtrless \sigma$,

$$\begin{pmatrix} \varrho,\ \sigma \\ \lambda,\ \mu \end{pmatrix} = 0,$$

wenn $\varrho, \sigma, \lambda, \mu$ verschieden sind.

§ 5.

Die Producte der $\psi\left(s(a)+s(b)\right)$.

Die Producte

$$p_\varkappa\left(\psi\left(s(a)+s(b)\right)\right)=p_\varkappa\left(\sum_{\nu=0}^{\nu=\varrho}a_\nu b_{\nu-\varrho}\right)$$

sind ganze Functionen der a, b; ich bezeichne in ihnen die Coefficienten der $p_\lambda(a)\,p_\mu(b)$ durch:

$$\left(\begin{matrix}1^{\varkappa_1}2^{\varkappa_2}\ldots\\ 1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\ldots\mid 1^{\mu_1}\mu_2\ldots\end{matrix}\right)$$

setze also:

$$p_\varkappa\left(\psi\left(s(a)+s(b)\right)\right)=\sum_{\lambda,\mu}\left(\begin{matrix}1^{\varkappa_1}2^{\varkappa_2}\ldots\\ 1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\ldots\mid 1^{\mu_1}2^{\mu_2}\ldots\end{matrix}\right)p_\lambda(a)\,p_\mu(b).$$

Die $p_\varkappa$ entstehen durch Faltung aus den $p_\lambda p_\mu$; bei diesem Processe werden die Factoren von p_λ mit denen von p_μ zu Factoren von $p_\varkappa$ gefaltet; das $p_\varkappa$ besitzt ausser von p_λ und p_μ übernommenen Factoren nur solche, die durch Faltung entstehen.

Die Symbole:

$$\left(\begin{matrix}1^{\varkappa_1}2^{\varkappa_2}\ldots\\ 1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\ldots\mid 1^{\mu_1}2^{\mu_2}\ldots\end{matrix}\right)$$

bedeuten die Coefficienten der $p_\lambda(a)\,p_\mu(b)$ *in* $p_\varkappa\left(\psi\left(s(a)+s(b)\right)\right)$ oder verschwinden, je nachdem $p_\varkappa$ durch obige Faltungen aus $p_\lambda p_\mu$ entsteht oder nicht; sie genügen der Relation

$$\left(\begin{matrix}1^{\varkappa_1}2^{\varkappa_2}\ldots\\ 1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\ldots\mid 1^{\mu_1}2^{\mu_2}\ldots\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}1^{\varkappa_1}2^{\varkappa_2}\ldots\\ 1^{\mu_1}2^{\mu_2}\ldots\mid 1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\ldots\end{matrix}\right).$$

Beispiele.

$$\left(\begin{matrix}\varkappa^m\\ 1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\ldots\mid 1^{\mu_1}2^{\mu_2}\ldots\end{matrix}\right)=\frac{m!}{(m-h)!\,\varkappa_1!\,\varkappa_2!},$$

wo:

$$h=\lambda_1+\lambda_2\ldots;\quad \mu_{m-\nu}=\lambda_\nu,$$

$$\left(\begin{matrix}1^{m-\varrho}&\varrho\\ 1^{m-\varrho}\mid&\varrho\end{matrix}\right)=1\quad\text{für}\quad\mu_{m-\nu}=\lambda_\nu,$$

$$\left(\begin{matrix}1^{m-\varrho}&\varrho\\ 1^{m-\varrho}\mid&\varrho\end{matrix}\right)=1\quad\text{für}\quad\varrho>1,$$

$$\left(\begin{matrix}1^{m-\varrho-1}&\varrho+1\\ 1^{m-\varrho}\mid&\varrho\end{matrix}\right)=1,$$

3. Capitel.

Die V.

§ 1.

Definition der V.

In der Summe

$$f(x, a, b) = \sum_{\varkappa} \frac{(-1)^{\lambda}}{\varkappa_1! \varkappa_2! \ldots 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots} p_{\varkappa}\left(s(a)\, s(b)\right) x^{\sigma}$$

$$= \sum_{\varkappa, \mu} \frac{(-1)^{\lambda}}{\varkappa_1! \varkappa_2! \ldots 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots} p_{\varkappa}\left(s(a)\right) \binom{1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots}{1^{\mu_1} 2^{\mu_2} \ldots} p_{\mu}(b)\, x^{\sigma}$$

bezeichne ich den Coefficienten von $x^{\sigma} p_{\mu}(b)$ durch:

$$V_{1^{\mu_1} 2^{\mu_2} \ldots}(a) = V_{(\mu)}(a).$$

Er hat den Werth:

$$V_{(\mu)}(a) = \sum_{\varkappa} \frac{(-1)^{\lambda}}{\varkappa_1! \varkappa_2! \ldots 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots} \binom{1^{\varkappa} 2^{\varkappa_2} \ldots}{1^{\mu_1} 2^{\mu_2} \ldots} p_{\varkappa}\left(s(a)\right)$$

$$= \sum_{\varkappa, \lambda} \frac{(-1)^{\lambda}}{\varkappa_1! \varkappa_2! \ldots 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots} \binom{1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots}{1^{\mu_1} 2^{\mu_2} \ldots} \binom{1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots}{1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \ldots} p_{\lambda}(a).$$

Die 1. Summe erstreckt sich über alle $\varkappa$, bei denen $p_{\varkappa}$ durch Faltung aus p_{μ} entsteht und die 2. Summe über alle $\varkappa$, λ, bei denen $p_{\varkappa}$ aus p_{λ} und p_{μ} durch Faltung erzeugt wird.

Vergleicht man in der Formel:

$$f(x, a, b) = \prod_{\varrho} (\alpha_{\varrho} x, b) = \sum_{(\mu)} p_{\mu}(b)\, V_{(\mu)}(a)$$

auf beiden Seiten die Coefficienten von:

$$p_{\mu}(b) = b_{\nu_1} b_{\nu_2} \ldots$$

so wird:

$$V_{(\mu)}(a) = \sum \alpha_1^{\nu_1} \alpha_2^{\nu_2} \ldots$$

die Summe erstreckt sich über alle Combinationen der α, bei denen die Producte $\alpha_1^{\varkappa_1} \alpha_2^{\varkappa_2} \ldots$ verschieden sind.

Beispiele.

$$a_1^{\varrho},\ a_{\varrho},\ a_{\varrho} \cdot a_{\varrho};\quad a_{\varrho} \cdot a_{\sigma} \quad \text{für} \quad \varrho \gtrless \sigma$$

erzeugen durch Faltung:

$$p_{\varkappa}(a);\ a_{\varrho};\ a_{\varrho}^2,\ a_{2\varrho};\ a_{\varrho} a_{\sigma},\ a_{\varrho+\sigma}$$

denen diese V entsprechen:

$$V_{1^g}(a) = \sum_{\varkappa} \frac{(-1)^h}{\varkappa_1!\,\varkappa_2!\ldots 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2}\ldots} \binom{1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2}\ldots}{1^g}\, p_\varkappa\big(s(a)\big)$$

$$= (-1)^g \sum_{\varkappa} \frac{(-1)^h}{\varkappa_1!\,\varkappa_2!\ldots 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2}\ldots}\, p_{\nu_1}\big(s(a)\big) = (-1)^g a_g,$$

$$V_g(a) = -\frac{1}{g}\binom{g}{g}\, s_g(a) = s_g(a),$$

$$V_{\varrho^2}(a) = \frac{1}{2\,\varrho^2}\binom{\varrho^2}{\varrho^2}\, s_\varrho^2(a) - \frac{1}{2\varrho}\binom{2\varrho}{\varrho^2}\, s_{2\varrho}(a)$$

$$= \frac{1}{2}\, s_\varrho^2(a) - \frac{1}{2}\, s_{2\varrho}(a),$$

$$V_{\varrho,\sigma}(a) = \frac{1}{\varrho\sigma}\binom{\varrho,\ \sigma}{\varrho,\ \sigma}\, s_\varrho(a)\, s_\sigma(a) - \frac{1}{\varrho+\sigma}\binom{\varrho+\sigma}{\varrho,\ \sigma}\, s_{\varrho+\sigma}(a)$$

$$= s_\varrho(a)\, s_\sigma(a) - s_{\varrho+\sigma}(a).$$

§ 2.

Die Differentialquotienten der V.

Vergleicht man in der Formel (vgl. § 2, 2. Cap.):

$$\frac{\partial f(x, a, b)}{\partial s_\varrho(0)} = -\frac{x^\varrho}{\varrho}\, s_\varrho(b)\, f(x, a, b)$$

die Coefficienten von $x^g p_\nu(b)$ so wird

$$\frac{\partial V_{(\varkappa)}(a)}{\partial s_\varrho(a)} = \sum_{i,\varkappa} \frac{(-1)^{h-1}(h-1)!}{i_1!\,i_2!}\, \frac{1}{\varrho}\, V_{(\varkappa)}(a).$$

Die Summe erstreckt sich über alle i, k, bei denen:

$$p_i p_\varkappa = p_\nu$$

ist. Man kann diese Formel auch durch diese ersetzen:

$$\sum_{\lambda} \frac{\partial V_{(k)}(a)}{\partial a_\lambda}\, a_{\lambda-\varrho} = \sum_{i,\varkappa} \frac{(-1)^h (h-1)!}{i_1!\,i_2!\ldots}\, V_{(\varkappa)}(a)$$

und aus ihr diese ableiten:

$$\frac{\partial V_{(\nu)}(a)}{\partial a_\lambda} = \sum_{\varrho,i,k} \frac{(-1)^h (h-1)!}{i_1!\,i_2!\ldots}\, V_{(\varkappa)}(a)\, \psi_{\varrho-\lambda}\big(-s(a)\big).$$

§ 3.

Summen von Coefficienten.

Die Summen der Coefficienten der V in der Formel:

$$f(x, a, b) = \sum_{g} \psi_g \left(s(a)\, s(b)\right) x^g = \sum_{\lambda} p_\lambda(a)\, V_{(\lambda)}(b)\, x^g$$

hat den Werth:

$$f(x, e) = \sum_{\lambda} p_\lambda(a)\, x^g = \sum_{\lambda} (a_1 x)^{\lambda_1} (a_2 x^2)^{\lambda_2} \cdots = \prod_{\varrho} \frac{1}{1 - a_\varrho x^\varrho}.$$

Sein Logarithmus ist:

$$\vartheta(x, e) = -\sum_{g} \frac{1}{g}\, s_g(e)\, x^g = -\sum_{\varrho} \log(1 - a_\varrho x^\varrho) = \sum_{\varrho, \sigma} \frac{1}{\sigma}\, a_\varrho^\sigma x^{\varrho\sigma}$$

und demnach:

$$s_g(e) = -\sum_{\varrho, \sigma} \varrho\, a_\varrho^\sigma.$$

Die Summe erstreckt sich über alle ϱ, σ, für welche

$$\varrho\sigma = g$$

ist.

§ 4.

Producte der V.

Aus den Formeln:

$$f\left(x, a, \psi\left(s(b) + s(c)\right)\right) = \sum_{g, \varkappa} p_\varkappa\left(\psi\left(s(b) + s(c)\right)\right) V_{(\varkappa)}(a)\, x^g,$$

$$f\left(x, a, \psi\left(s(b) + s(c)\right)\right) = f(x, a, b)\, f(x, a, c),$$

$$p_\varkappa\left(\psi\left(s(a) + s(b)\right)\right) = \sum_{\lambda, \mu} \left(\begin{matrix} 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots \\ 1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \ldots \mid 1^{\mu_1} 2^{\mu_2} \ldots \end{matrix} \right) p_\lambda(b)\, p_\mu(c)$$

folgt diese:

$$f(x, a, b)\, f(x, a, c) = \sum_{g, \varkappa, \lambda, \mu} \left(\begin{matrix} 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots \\ 1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \ldots \mid 1^{\mu_1} 2^{\mu_2} \ldots \end{matrix} \right) p_\lambda(b)\, p_\mu(c)\, x^g\, V_{(\varkappa)}(a)$$

$$= \sum_{g, \lambda, \mu} p_\lambda(b)\, p_\mu(c)\, V_{(\lambda)}(a)\, V_{(\mu)}(a)\, x^g$$

und wenn man die Coefficienten von

$$p_\lambda(b)\, p_\mu(c)\, x^g$$

vergleicht:

$$V_\lambda(a)\, V_\mu(a) = \sum_{\varkappa} \left(\begin{matrix} 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots \\ 1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \ldots \mid 1^{\mu_1} 2^{\mu_2} \ldots \end{matrix} \right) V_{(\varkappa)}(a).$$

Die Summe erstreckt sich über alle $\varkappa$, bei denen $p_\varkappa$ durch Faltung aus $p_\lambda\, p_\mu$ entsteht.

1. Beispiel.

$$V_{1^m} V_{1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots} \quad \text{wo} \quad m = \nu_1 + \nu_2 \ldots .$$

$$V_{1^m}(a) = (-1)^m a_m;$$

da durch Faltung von

$$a_1^m \cdot a_1^{\nu_1} a_2^{\nu_2} \cdots$$

u. A. $p_\nu(a)$ entsteht, so kommt rechter Hand $V_{(\nu)}$ vor, so dass man hat:

$$V_{(\nu)}(a) = (-1)^m a_m V_{1^{\nu_1} 2^{\nu_2} \ldots}(a) - \sum_\varkappa \begin{pmatrix} 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots \\ 1^m \mid 1^{\nu_1} 2^{\nu_2} \ldots \end{pmatrix} V_{(\varkappa)}(a).$$

Die Summe erstreckt sich über alle $\varkappa$, bei denen $p_\varkappa$ aus p_ν durch Spaltungen von $a_{\varrho+1}$ in $a_1 a_\varrho$ entsteht.

Die Formel drückt $V_{(\nu)}$ durch einfachere V desselben Gewichtes und das $V_{1^{\nu_1} 2^{\nu_2} \ldots}$ von niederem Gewichte aus.

2. Beispiel.

$$V_{1^\varrho} V_{g-\varrho} \quad \text{wo} \quad g - \varrho > 1.$$

$$V_{1^\varrho} = (-1)^\varrho a_\varrho; \quad V_{g-\varrho} = s_{g-\varrho},$$

$$(-1)^\varrho a_\varrho s_{g-\varrho}(a) = \sum_\varkappa \begin{pmatrix} 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots \\ 1^\varrho \mid g - \varrho \end{pmatrix} V_{(\varkappa)}(a),$$

$a_1^\varrho \,.\, a_{g-\varrho}$ erzeugt durch Faltung $a_1^\varrho\, a_{g-\varrho}$ und $a_1^{\varrho-1} a_{g-\varrho+1}$; die Coefficienten:

$$\begin{pmatrix} 1^\varrho & g-\varrho \\ 1^\varrho \mid & g-\varrho \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1^{\varrho-1} & g-\varrho+1 \\ 1^\varrho \mid & g-\varrho \end{pmatrix}$$

haben den Werth 1; es wird mithin:

$$a_\varrho s_{g-\varrho}(a) = (-1)^\varrho V_{1^\varrho g-\varrho}(a) - (-1)^{\varrho-1} V_{1^{\varrho-1} g-\varrho+1}(a),$$

und durch Summation:

$$V_{1^m g-m}(a) = (-1)^m \sum_{\varrho=0}^{\varrho=m} a_\varrho\, s_{g-\varrho}(a).$$

§ 5.

Werthe der V für specielle $f(x, a)$.

1. $f(x, a) = 1 - x$,

$f(x, a, b) = f(x, b)$: $a_0 = 1$; $a_1 = -1$; $a_\varrho = 0$ für $\varrho > 1$,

$$\sum_\varkappa p_\varkappa(b)\, V_{(\varkappa)}(a) x^g = \sum_y b_y x^g.$$

Die $V_{(\varkappa)}(a)$ haben den Werth 1 oder 0, je nachdem $p_\varkappa$ nur einen Factor hat oder mehrere.

Folgerung.

Der Factor von a_1^ϱ verschwindet in $V_{(\varkappa)}$, wenn $p_\varkappa$ mehr als einen Factor hat und hat den Coefficienten $(-1)^\varrho$, wenn $p_\varkappa(a) = a_\varrho$ ist.

2. $f(x, a) = (1-x)^n$.

$$a_\varrho = (-1)^\varrho \frac{n!}{(n-\varrho)!\,\varrho!} = (-1)^\varrho \frac{n\,n-1\cdots n-\varrho+1}{1\cdot 2\cdots \varrho},$$

$$f(x, a, b) = f^n(x, b),$$

$$\sum_\varkappa p_\varkappa(b)\, V_{(\varkappa)}(a)\, x^\varrho = \sum_\varkappa \frac{n\cdot n-1\cdots n-h+1}{\varkappa_1!\,\varkappa_2!\cdots} p_\varkappa(b)\, x^\varrho,$$

$$V_{(\varkappa)}(a) = \frac{n\cdot n-1\cdots n-h+1}{\varkappa_1!\,\varkappa_2!\cdots}.$$

Für $n = -1$ wird $a_\varrho = 1$

$$V_{(\varkappa)}(a) = (-1)^h \frac{h!}{\varkappa_1!\,\varkappa_2!\cdots}.$$

Folgerung.

Die Summen der Coefficienten in $V_{(\varkappa)}(a)$ ist $(-1)^h \frac{h!}{\varkappa_1!\,\varkappa_2!\cdots}$ also gleich den Coefficienten von $p_\varkappa(a)$ in $f^{-1}(x, a)$.

3. $\vartheta(x, a) = x$.

$$f(x, a) = e^x; \quad a_\varrho = \frac{1}{\varrho!},$$

$$\vartheta(x, a, b) = s_1(b)\,x = -b_1 x,$$

$$f(x, a, b) = e^{-b_1 x},$$

$V_{(\varkappa)}(a)$ hat die Werthe $\frac{(-1)^\varrho}{\varrho!}$ oder 0, je nachdem $p_\varkappa(a) = a_1^\varrho$ ist oder nicht.

4. $\vartheta(x, a) = x + x^2 y$.

$$s_1(a) = -1; \quad s_2(a) = -2y; \quad s_\varrho(a) = 0 \quad \text{für } \varrho > 2,$$

$$f(x, a) = e^{x+x^2 y} = \sum_{\varkappa\lambda} \frac{y^\lambda x^\varrho}{\varkappa!\,\lambda!},$$

$$a_\varrho = \sum_{\varkappa,\lambda} \frac{y^\lambda}{\varkappa!\,\lambda!} = \sum_\lambda \frac{y^\lambda}{(\varrho-2\lambda)!\,\lambda!},$$

$$s_1(a)s_1(b) = -s_1(b); \; s_2(a)s_2(b) = -2y s_2(b); \; s_\varrho(a)s_\varrho(b) = 0 \text{ für } \varrho > 2,$$

$$\vartheta(x, a, b) = -b_1 x + (b_1^2 - 2b_2)x^2 y,$$

$$f(x, a, b) = -e^{-b_1 x + (b_1^2 - 2b_2)x^2 y} = \sum_{\varkappa, \lambda} (-1)^\varkappa b_1^{\,\varkappa} (b_1^{\,2} - 2b_2)^\lambda \frac{x^\varrho y^\lambda}{\varkappa!\,\lambda!}$$

$$= (-1)^\varrho \sum_{\lambda, \mu} (-1)^\mu 2^\mu b_1^{\,\varrho - 2\mu} b_2^{\,\mu} \binom{\lambda}{\mu} \frac{x^\varrho y^\lambda}{\varkappa!\,\lambda!},$$

$$V_{1^{\varrho - 2\mu} 2^\mu}(a) = (-1)^{\varrho - \mu} \frac{2^\mu}{\mu!} \sum_{\lambda} \frac{y^\lambda}{(\varrho - 2\lambda)!\,(\lambda - \mu)!}.$$

$V_{(\varkappa)}(a) = 0$, wenn $p_\varkappa$ einen Factor hat, dessen Index > 2 ist.

5. $f(x, a) = 1 - x^n$.

$a_0 = 1$; $a_n = -1$; $s_{n\varrho}(a) = n$; $s_{n\varrho}(a)\, s_{n\varrho}(b) = n s_{n\varrho}(b)$.

Die übrigen a, $s(a)$, $s_\varrho(a)\, s_\varrho(b)$ verschwinden.

In $V_{(\varkappa)}(a)$ erhält man durch die Substitution $a_n = -1$ den Coef ficienten von $(-a_n)^{\varrho n}$ also, wenn ϱ nicht durch n theilbar ist, di Zahl 0.

Ist

$$p_\varkappa(a) = a_{\nu_1} a_{\nu_2} \ldots$$

und

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n}; \quad \varepsilon_\varrho = \varepsilon^\varrho,$$

so wird

$$V_{(\varkappa)}(a) = \sum \varepsilon_{i_1}^{\nu_1} \varepsilon_{i_2}^{\nu_2} \ldots.$$

§ 6.

$$V\Big(\psi\big(s(a) + s(b)\big)\Big).$$

Durch Vergleichung der Coefficienten von

$$x^\varrho \text{ und } p_{(\nu)}(c)\, x^\varrho$$

in den Formeln:

$$f\Big(x, \psi\big(s(a) + s(b)\big)\Big) = f(x, a)\, f(x, b),$$

$$f\Big(x, \psi\big(s(a) + s(b)\big), c\Big) = f(x, a, c)\, f(x, b, c)$$

erhält man die Formeln:

$$\psi_\varrho\big(s(a) + s(b)\big) = \sum_{\varrho} a_\varrho\, b_{\varrho - \varrho},$$

$$V_{(\nu)}\Big(\psi\big(s(a) + s(b)\big)\Big) = \sum_{\lambda, \mu} V_{(\lambda)}(a)\; V_{(\mu)}(b),$$

Die 2. Summe erstreckt sich über alle $\lambda\mu$, für welche:

$$p_\nu = p_\lambda p_\mu$$

ist.

1. Beispiel.

$$f(x, b) = 1 - x.$$

$$b_0 = 1; \quad b_1 = -1; \quad V_\varrho(b) = s_\varrho(b) = 1.$$

Die übrigen b und $V(b)$ verschwinden.

$$\psi\left(s(a) + 1\right) = a_\varrho - a_{\varrho-1},$$

$$V_{(\nu)}(a_\varrho - a_{\varrho-1}) = \sum_{\lambda,\mu} V_{(\lambda)}(a).$$

Die Summe erstreckt sich über alle λ, μ, für welche

$$p_\nu(a) = a_\mu p_\lambda(a)$$

ist.

2. Beispiel.

$$f(x, b) = 1 - xy.$$

$$b_0 = 1; \quad b_1 = y, \quad V_\varrho(b) = s_\varrho(b) - y^\varrho.$$

Die übrigen b und $V(b)$ verschwinden.

$$\psi_\varrho\left(s_\varrho(a) + y^\varrho\right) = a_\varrho - y a_{\varrho-1},$$

$$V_{(\varkappa)}(a_\varrho - y a_{\varrho-1}) = \sum_{\lambda,\mu} y^\mu V_{(\lambda)}(a).$$

Die Summe erstreckt sich über alle λ, μ, bei denen.

$$p_\nu(a) = a_\mu p_\lambda(a)$$

ist.

3. Beispiel.

$$f(x, b) = (1 - xy)^n.$$

$$b_\varrho = (-1)^\varrho \frac{n \cdot n-1 \cdots n-\varrho+1}{1 \cdot 2 \cdots \varrho},$$

$$s_\varrho(b) = n y^\varrho,$$

$$V_{(\varkappa)}(b) = \frac{n \cdot n-1 \cdots n-h+1}{\varkappa_1!\, \varkappa_2! \cdots} y^\varrho,$$

$$\psi_\varrho\left(s_\varrho(a) + n y^\varrho\right) = \sum_\sigma (-1)^\sigma \frac{n \cdot n-1 \cdots n-\sigma+1}{1 \cdot 2 \cdots \sigma} a_{\varrho-\sigma} y^\sigma,$$

$$V_{(\nu)}\left(\psi\left(s_\varrho(a) + n y^\varrho\right)\right) = \sum_{\lambda,\mu} \frac{n \cdot n-1 \cdots n-h+1}{\mu_1!\, \mu_2!} y^\varrho V_{(\lambda)}(a).$$

4. Beispiel.

$$f(x, b) = 1 - x^n y.$$

$$b_0 = 1; \quad b_n = -y; \quad s_{ng}(b) = n y^g.$$

Die übrigen b und $s(b)$ verschwinden.

$V_{(\varkappa)}(b)$ ist der Coefficient von $a_n^{\frac{g}{n}}$ in $(-y)^{\frac{g}{n}} V_{(\varkappa)}(a)$ und verschwindet, wenn g nicht durch n theilbar ist.

$$\psi_g\left(s_\varrho(a) + s_\varrho(b)\right) = a_g - y a_{g-n},$$

$$V_{(\varkappa)}(a_\varrho - y a_{\varrho-n}) = \sum_{\lambda,\mu} V_{(\lambda)}(a) V_{(\mu)}(b).$$

§ 7.

$V(a, b)$.

In der Formel

$$f(x, a, b, c) = \sum_\nu V_{(\nu)}\left(\psi\left(s(a)\, s(b)\right)\right) p_\nu(c)\, x^g$$

bezeichne ich den Coefficienten V durch:

$$V_{(\nu)}\left(\psi\left(s(a)\, s(b)\right)\right) = V_{(\nu)}(a, b),$$

er hat den Werth

$$V_{(\nu)}(a,b) = \sum_\varkappa \frac{(-1)^h}{\varkappa_1!\, \varkappa_2! \cdots 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \cdots} \binom{1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \cdots}{1^{\nu_1} 2^{\nu_2} \cdots} p_\varkappa\left(s(a)\, s(b)\right)$$

$$= \sum_{\varkappa,\lambda,\mu} \frac{(-1)^h}{\varkappa_1!\, \varkappa_2! \cdots 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \cdots} \binom{1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \cdots}{1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \cdots} \binom{1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \cdots}{1^{\mu_1} 2^{\mu_2} \cdots} p_\lambda(a)\, p_\mu(b).$$

1. Anmerkung.

Der Coefficient von $p_\mu(b)\, p_\nu(c)$ in $f(x, a, b, c)$ ist gleichzeitig der von $p_\mu(b)$ in $V_{(\nu)}(a, b)$ und der von $p_\nu(b)$ in $V_{(\mu)}(a, b)$.

2. Anmerkung.

Aus jeder Relation zwischen den V kann man weitere ableiten, indem man a durch $\psi\left(s(a)\, s(b)\right)$ ersetzt, da durch diesen Process $V(a)$ in $V(a, b)$ übergeht.

1. Beispiel.

$$f(x, b) = 1 - x.$$

$b_0 = 1$; $b_1 = -1$. Die übrigen b verschwinden.

$$s_g(b) = 1; \quad \psi_g\left(s(a)\, s(b)\right) = a_g,$$

$$V_{(\nu)}(a, b) = V_{(\nu)}(a).$$

2. Beispiel.

$$f.(x,b) = (1-x)^n.$$

$$s_\varrho(b) = n; \quad f(x,a,b) = f^n(x,a)$$

$$\psi_\varrho\big(s(a)s(b)\big) = \psi_\varrho\big(ns(a)\big) = \sum_\varkappa \frac{n.n.1\ldots n-h+1}{\varkappa_1!\,\varkappa_2!\ldots} p_\varkappa\big(s(a)\big)$$

$$V_{(\nu)}(a,b) = V_{(\nu)}\Big(\psi\big(ns(a)\big)\Big)$$

$$= \sum_\varkappa \frac{(-n)^h}{\varkappa_1!\,\varkappa_2!\ldots 1^{\varkappa_1}2^{\varkappa_2}\ldots}\binom{1^{\varkappa_1}2^{\varkappa_2}\ldots}{1^{\nu_1}2^{\nu_2}\ldots} p_\varkappa\big(s(a)\big).$$

3. Beispiel.

$$f(x,b) = 1 - x^n.$$

$$f(x,a,b) = \prod_\varrho f(\varepsilon^\varrho x, a) = \prod_\varrho (1-\alpha_\varrho^n x^n) = \sum_\varrho A_\varrho x^{n\varrho}$$

$$s_{n\varrho}(b) = n; \quad s_{n\varrho}(a) = s_\varrho(A)$$

$$A_\varrho = \psi_{n\varrho}\big(ns_{n\varrho}(a)\big) = \sum_\varkappa \frac{(-1)^h}{\varkappa_{1n}!\,\varkappa_{2n}!\ldots 1^{\varkappa_1}2^{\varkappa_2}\ldots} p_\varkappa\big(s_{n\varrho}(a)\big).$$

Die übrigen $s(b)$ und $\psi\big(s(a)s(b)\big)$ verschwinden. $V_{(\nu)}(a,b)$ entsteht aus $V_{(\nu)}(a)$ dadurch, dass man die $a_{n\varrho}$ durch A_ϱ und die andern a durch 0 ersetzt; es hat, wenn das Gewicht von p_ν durch n theilbar ist, den Werth:

$$V_{(\nu)}(a,b) = \sum_\varkappa \frac{(-1)^h}{\varkappa_{1n}!\,\varkappa_{2n}!\ldots 1^{\varkappa_n}2^{\varkappa_{2n}}\ldots}\binom{n^{\varkappa_n}(2n)^{\varkappa_{2n}}\ldots}{1^{\nu_1}2^{\nu_2}\ldots} p_\varkappa\big(s_{n\varrho}(a)\big)$$

und verschwindet, wenn diess nicht der Fall ist. Wenn alle Indices von p_ν durch n theilbar sind: $\nu_{n\varrho} = \mu_\varrho$ so wird unsere Formel:

$$V_{(\nu)}(a,b) = V_{(\mu)}(A).$$

4. Capitel.

Die numerischen Coefficienten in $f(x,a,b\ldots)$.

§ 1.

Die Symbole $\alpha\beta\ldots$.

Die in § 2, 1. Capitel definirten Functionen $f(x,a,b\ldots)$ sind ganze Functionen der Variabeln

$$x,\ a,\ b,\ c\ \ldots$$

also Aggregate der Producte

$$x^g p_\lambda(a)\, p_\mu(b)\, p_\nu(c) \ldots .$$

Ich will ihre numerischen Coefficienten mit

$$p_\lambda(\alpha)\, p_\mu(\beta)\, p_\nu(\gamma) \ldots$$

bezeichnen also:

$$f(x, a, b, c \ldots) = \sum_{\lambda, \mu, \nu} x^g p_\lambda(a\alpha)\, p_\mu(b\beta)\, p_\nu(c\gamma) \ldots$$

setzen.

Da $f(x, a, b, c \ldots)$ sich nicht ändert, wenn man die a, b, c mit einander vertauscht, so ändert sich auch $p(\alpha)\, p(\beta)\, p(\gamma) \ldots$ nicht, wenn man die α, β, γ mit einander vertauscht, z. B. hat man:

$$p_\lambda(\alpha)\, p_\mu(\beta) = p_\lambda(\beta)\, p_\mu(\alpha).$$

Die $p(\alpha)\, p(\beta)\, p(\gamma) \ldots$ sind ganze Functionen der Symbole $\alpha, \beta, \gamma \ldots$. Quotienten, bei denen der Nenner nicht Theiler des Zählers ist, verschwinden.

Die $p_\lambda(\alpha)\, p_\mu(\beta) \ldots$ bedeuten die numerischen Coefficienten, wenn $p_\lambda, p_\mu \ldots$ dasselbe Gewicht g haben und verschwinden, wenn dies nicht der Fall ist.

§ 2.

Die $p(\alpha)$.

Da

$$f(x, a) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 \ldots$$

in unserer Bezeichnung:

$$f(x, a) = \sum_{\varkappa} p_\varkappa(a\alpha) x^g$$

ist, so haben die α_g den Werth 1

$$\alpha_g = 1,$$

während die übrigen $p_\varkappa(\alpha)$ verschwinden:

$$p_\varkappa(\alpha) = 0,$$

wenn $p_\varkappa(a) \gtrless a_g$ ist.

Wenn $f(x) = 1 - x$ ist, so ist (1. Cap. § 3)

$$f(x, a, b) = f(x, b)$$

und wenn:

$$f(x) = 1 + a_1 x$$

ist, so ist:

$$f(x, a, b) = f(-a_1, x, b).$$

In unserer Bezeichnung wird in diesem Falle:

$$f(x, a, b) = \sum (a_1 \alpha_1)^\varrho p_\lambda(\beta b) x^\varrho,$$

mithin ist:

$$\alpha_1^\varrho p_\lambda(\beta) = (-1)^\varrho p_\lambda(\alpha),$$

also

$$\alpha_1^\varrho \beta_\varrho = (-1)^\varrho$$

$$\alpha_1^\varrho p_\lambda(\beta) = 0,$$

wenn $p_\lambda(a) \gtrless a_\varrho$ ist.

§ 3.

Die Werthe der $p(\alpha)p(\beta)p(\gamma)$.

Trägt man in die Formel (§ 5, 1. Cap.)

$$f(x, a, b, c \ldots) = \sum_\varkappa \frac{(-1)^h}{1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots \varkappa_1! \varkappa_2! \ldots} p_\varkappa\big(s(a)s(b)s(c)\ldots\big) x^\varrho$$

für die $p_\varkappa\big(s(a)\big)$, $p_\varkappa\big(s(b)\big)$ ... ihre Werthe (§ 4, 2. Cap.)

$$p_\varkappa\big(s(a)\big) = \sum_\lambda \begin{pmatrix} 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots \\ 1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \ldots \end{pmatrix} p_\lambda(a)$$

$$p_\varkappa\big(s(b)\big) = \sum_\mu \begin{pmatrix} 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots \\ 1^{\mu_1} 2^{\mu_2} \ldots \end{pmatrix} p_\mu(b)$$

$$p_\varkappa\big(s(c)\big) = \sum_\nu \begin{pmatrix} 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots \\ 1^{\nu_1} 2^{\nu_2} \ldots \end{pmatrix} p_\nu(c)$$

ein, so wird

$$f(x, a, b, c \ldots) = \sum_{\varkappa, \lambda, \mu, \nu} \frac{(-1)^h}{\varkappa_1! \varkappa_2! \ldots 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots} \begin{pmatrix} 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots \\ 1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots \\ 1^{\mu_1} 2^{\mu_2} \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots \\ 1^{\nu_1} 2^{\nu_2} \ldots \end{pmatrix}$$
$$p_\lambda(a)\, p_\mu(b)\, p_\nu(c)\, x^\varrho.$$

Vergleicht man diese Formel mit

$$f(x, a, b, c \ldots) = \sum_{\lambda, \mu, \nu} p_\lambda(a\alpha)\, p_\mu(b\beta)\, p_\nu(c\gamma)\, x^\varrho,$$

so wird:

$$p_\lambda(\alpha) p_\mu(\beta) p_\nu(\gamma) \cdots = \sum_\varkappa \frac{(-1)^h}{\varkappa_1! \varkappa_2! \ldots 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots} \begin{pmatrix} 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots \\ 1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots \\ 1^{\mu_1} 2^{\mu_2} \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots \\ 1^{\nu_1} 2^{\nu_2} \ldots \end{pmatrix}.$$

Die Summe erstreckt sich über alle $\varkappa$, bei denen $p_\varkappa$ durch Faltung gleichzeitig aus p_λ, p_μ, p_ν ... entsteht.

Beispiele.

Aus

$$a_g;\ a_\varrho \cdot a_\varrho;\ a_\varrho \cdot a_\sigma$$

für $\varrho \gtrless \sigma$ entsteht durch Faltung:

$$a_g;\ a_\varrho^2,\ a_{2\varrho};\ a_\varrho,\ a_\sigma \cdot a_{\varrho+\sigma};$$

es wird:

$$\alpha_g\, p_\lambda(\beta)\, p_\mu(\gamma) \cdots = \binom{g}{1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \ldots} \binom{g}{1^{\mu_1} 2^{\mu_2} \ldots} \cdots,$$

$$\alpha_\varrho^2\, p_\lambda(\beta)\, p_\mu(\gamma) \cdots = \frac{1}{2} \binom{\varrho^2}{1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \ldots} \binom{\varrho^2}{1^{\mu_1} 2^{\mu_2} \ldots} \cdot \cdot$$
$$\cdot \cdot - \frac{1}{2} \binom{2\varrho}{1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \ldots} \binom{2\varrho}{1^{\mu_1} 2^{\mu_2} \ldots} \cdots,$$

$$\alpha_\varrho \alpha_\sigma\, p_\lambda(\beta)\, p_\mu(\gamma) \cdots = \binom{\varrho, \sigma}{1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \ldots} \binom{\varrho, \sigma}{1^{\mu_1} 2^{\mu_2} \ldots} \cdot \cdot$$
$$\cdot \cdot - \binom{\varrho+\sigma}{1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \ldots} \binom{\varrho+\sigma}{1^{\mu_1} 2^{\mu_2} \ldots} \cdots,$$

$$\alpha_\varrho^2 \beta_\varrho^2 = \frac{1}{2} \varrho^2 - \frac{1}{2} \varrho,$$

$$\alpha_\varrho^2 \beta_\sigma \beta_\tau = - \varrho$$

wenn $\sigma \gtrless \tau$,

$$\alpha_\varrho \alpha_\sigma \beta_\varrho \beta_\sigma = \varrho\sigma - (\varrho + \sigma)$$

wenn $\varrho \gtrless \sigma$,

$$\alpha_\varrho \alpha_\sigma \beta_{\varrho_1} \beta_{\sigma_1} = - (\varrho + \sigma)$$

wenn $\varrho, \sigma, \varrho_1, \sigma_1$ verschieden sind.

§ 4.

Die Wurzeln der Einheit.

Die symmetrischen Functionen der Potenzen $\varepsilon_\varrho = \varepsilon^\varrho$ von

$$\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$$

sind im § 5 3. Cap. berechnet worden. In unserer Bezeichnung ist das dort gefundene Resultat durch die Formel gegeben:

$$\sum \varepsilon_1^{\nu_1} \varepsilon_2^{\nu_2} \cdots = (-\alpha_n)^{\frac{g}{n}} \beta_{\nu_1} \beta_{\nu_2} \ldots.$$

§ 5.

Die V.

Aus den Formeln:

$$f(x, a, b) = \sum_{\nu} p_\nu(b)\, V_{(\nu)}(a)\, x^g = \sum_{\lambda,\nu} p_\lambda(a\alpha)\, p_\nu(b\beta)\, x^g$$

$$f(x, a, b, c) = \sum_{\nu} p_\nu(c)\, V_{(\nu)}(a, b)\, x^g = \sum_{\lambda,\mu,\nu} p_\lambda(a\alpha)\, p_\mu(b\beta)\, p_\nu(c\gamma)$$

folgt:

$$V_{(\nu)}(a) = p_\nu(\beta) \sum_{\lambda} p_\lambda(a\alpha)$$

$$V_{(\nu)}(a, b) = p_\nu(\gamma) \sum_{\lambda,\mu} p_\lambda(a\alpha)\, p_\mu(b\beta).$$

Die Summen erstrecken sich über alle λ, μ bei denen p_λ und p_μ dieselben Faltungsprodukte $p_\varkappa$ erzeugen wie p_ν. Den Relationen zwischen den V entsprechen solche für die $p(\alpha)\,p(\beta)\,p(\gamma)\ldots$.

Beispiele.

Nach dem 3. Cap. wird:

für $f(x, a) = (1-x)^n$: $V_{(\nu)}(a) = \frac{n\,.\,n-1\ldots n-h+1}{\nu_1!\,\nu_2!\ldots}$,

„ $f(x, a) = \frac{1}{1-x}$: $V_{(\nu)}(a) = (-1)^\nu \frac{h!}{\nu_1!\,\nu_2!\ldots}$,

„ $f(x, a) = e^x$: $V_{1^g}(a) = \frac{(-1)^g}{g!}$.

$$V_{(\nu)}(a) = 0 \text{ für } p_\nu(a) \gtrless a_1^g.$$

$$V_{(\nu)}\Big(\psi\big(s(a) + s(b)\big)\Big) = \sum_{\varrho,\sigma} V_{(\lambda)}(a)\, V_{(\mu)}(b).$$

Hieraus ergeben sich diese Relationen zwischen den $p(\alpha)\,p(\beta)\,p(\gamma)$:

$$\frac{n\,.\,n-1\ldots n-h+1}{\varkappa_1!\,\varkappa_2!\ldots} = p_\varkappa(\beta) \sum_{\lambda} \Big(\frac{n}{1}\,\alpha_1\Big)^{\lambda_1} \Big(\frac{n\,.\,n-1}{2}\,\alpha_2\Big)^{\lambda_2} \Big(\frac{n\,.\,n-1\,.\,n-2}{3!}\,\alpha_3\Big)^{\lambda_3} \ldots.$$

$$0 = p_\lambda(\beta) \Big(\sum_{\lambda} p_\lambda(\alpha) - \frac{h}{g}\,\alpha_g \Big),$$

$$\beta_1^g \sum_{\lambda} p_\lambda\Big(\frac{\alpha_\varrho}{\varrho!}\Big) = \frac{(-1)^g}{g!},$$

$$p_\varkappa(\beta) \sum_{\lambda} p_\lambda\Big(\frac{\alpha_\varrho}{\varrho!}\Big) = 0 \text{ für } p_\varkappa(a) \gtrless a_1^g,$$

$$p_\nu(\beta) \sum_{\varkappa} \binom{1^{\varkappa_1}\, 2^{\varkappa_2}\ldots}{1^{\lambda_1}\, 2^{\lambda_2}\ldots \mid 1^{\mu_1}\, 2^{\mu_2}\ldots} p_\varkappa(\alpha) = \sum_{\varrho,\sigma} p_\varrho(\alpha)\, p_\lambda(\beta) \cdot p_\sigma(\alpha)\, p_\mu(\beta).$$

Die Summen erstrecken sich in der letzten Formel über alle $\varkappa, \varrho, \sigma$, bei denen $p_\varkappa$ durch Faltung aus $p_\lambda p_\mu$ entsteht und

$$p_\varrho p_\sigma = p_\nu$$

ist.

§ 6.

Reduction der $p(\alpha)\,p(\beta)\ldots.$

Der Formel (§ 4, 3. Cap.)

$$V_{(\nu)}(a) = (-1)^m a_m V_{1^{\nu_1}2^{\nu_2}\ldots}(a) = \sum_\varkappa \begin{pmatrix} 1^{\varkappa_1}2^{\varkappa_2}\ldots \\ 1^m \mid 1^{\nu_1}2^{\nu_2}\ldots \end{pmatrix} V_{(\varkappa)}(a)$$

entspricht diese:

$$p_\nu(\alpha)\,p_\lambda(\beta) = p_\lambda(\beta)\left\{\frac{(-1)^m}{\beta_m}\alpha_1^{\nu_1}\alpha_2^{\nu_2}\cdots - \sum_\varkappa \begin{pmatrix} 1^{\varkappa_1}2^{\varkappa_2}\ldots \\ 1^m \mid 1^{\nu_1}2^{\nu_2}\ldots \end{pmatrix} p_\varkappa(\alpha)\right\}.$$

In ihr ist:

$$m = \nu_1 + \nu_2 \ldots$$

und die Summe erstreckt sich über alle $\varkappa$, bei denen $p_\varkappa$ aus p_ν durch specielle Spaltungen von $a_{\varrho+1}$ in $a_1 a_\varrho$ entsteht.

Da die Glieder rechter Hand einfacher sind, so ist dies eine **Reductionsformel für $p_\nu(\alpha)\,p_\lambda(\beta)$.**

Ist τ der höchste in p_λ auftretende Index und $m > \tau$, so ist:

$$\frac{1}{\beta_m}\,p_\lambda(\beta) = 0.$$

Reducirt man die $p_k(\alpha)$ weiter, so erhält man Formeln, in denen das Product vor der Summe verschwindet. Schliesslich gelangt man zu dem verschwindenden Symbol

$$\alpha_1^\varrho\,p_\varkappa(\beta).$$

Hieraus folgt der Satz:

„$p_\nu(\alpha)\,p_\lambda(\beta) = 0$, wenn die Anzahl der Factoren von p_ν grösser als die Indices in p_λ ist."

Im Falle

$$m = \tau$$

verschwinden alle Glieder der Summe, es wird:

$$p_\nu(\alpha)\,p_\lambda(\beta) = \frac{(-1)^m}{\beta_m}\alpha_1^{\nu_1}\alpha_2^{\nu_2}\ldots p_\lambda(\beta).$$

Beide Sätze bleiben bestehen, wenn man mit symbolischen Factoren $p(\gamma)$ multiplicirt.

§ 7.

$$\alpha_1^m \alpha_{g-m} p_r(\beta).$$

Der Formel (§ 4, 3. Cap.) zwischen den V:

$$V_{1^m g-m}(a) = (-1)^m \sum_{\varrho=0}^{\varrho=m} a_\varrho V_{g-\varrho}(a)$$

entspricht diese zwischen den $p(\alpha)p(\beta)$:

$$\alpha_1^m \alpha_{g-m} p_r(\beta) = (-1)^m p_r(\beta) \sum_{x=0}^{x=m} \frac{1}{\beta_x} \alpha_{g-x}.$$

Um sie zu transformiren, setze ich zunächst $m = \tau$; es wird dann:

$$0 = p_r(\beta) \sum_{x=0}^{x=\tau} \frac{1}{\beta_x} \alpha_{g-x},$$

so dass man unsere Formel so schreiben kann:

$$\alpha_1^m \alpha_{g-m} p_r(\beta) = (-1)^{m-1} p_r(\beta) \sum_{x=m+1}^{x=\tau} \frac{1}{\beta_x} \alpha_{g-x}$$

$$= (-1)^{m-1} p_r(\beta) \left\{ \frac{1}{\beta_\tau} \alpha_{g-\tau} + \sum_{x=m+1}^{x=\tau-1} \frac{1}{\beta_x} \alpha_{g-x} \right\}.$$

Im Besonderen hat man:

$$\alpha_1^m \alpha_{g-m} \beta_1^n \beta_{g-n} = \begin{cases} 0 & \text{für } m+n \geqq g, \\ (-1)^{m+n-1} & \text{„ } m+n < g. \end{cases}$$

§ 8.

Zusammenstellung von Formeln für $p(\alpha)p(\beta)$.

Die $p(\alpha)p(\beta)$ sind durch die Formel:

$$p_\lambda(\alpha) p_\mu(\beta) = \sum_{\lambda} \frac{(-1)^\lambda}{\varkappa_1! \varkappa_2! \ldots 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots} \binom{1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots}{1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \ldots} \binom{1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots}{1^{\mu_1} 2^{\mu_2} \ldots}$$

definirt; ausserdem sind im Obigen noch verschiedene Recursionsformeln zu ihrer Berechnung gegeben. Hier sollen noch einmal die hierbei tauglichsten Formeln zusammengestellt werden; sie genügen zur übersichtlichen Berechnung in allen einfachen Fällen.

$$p_\lambda(\alpha) p_\mu(\beta) = p_\lambda(\beta) p_\mu(\alpha),$$

$$\alpha_1^{\varkappa_1} \alpha_2^{\varkappa_2} \ldots \beta_1^{\lambda_1} \beta_2^{\lambda_2} \ldots \beta_\tau^{\lambda_\tau} = 0, \quad \text{wenn } \lambda_1 + \lambda_2 \ldots > \tau,$$

$$\alpha_1^m \alpha_{g-m} \beta_1^n \beta_{g-n} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } m+n \geqq g, \\ (-1)^{m+n-1}, & \text{wenn } m+n < g, \end{cases}$$

$$\alpha_1^{\lambda_1}\alpha_2^{\lambda_2}\ldots\beta_1^{\mu_1}\beta_2^{\mu_2}\ldots\beta_\tau^{\mu_\tau}=(-1)^\tau\alpha_1^{\lambda_2}\alpha_2^{\lambda_3}\ldots\beta_1^{\mu_1}\beta_2^{\mu_2}\ldots\beta_\tau^{\mu_\tau-1},$$

wenn $\lambda_1+\lambda_2\cdots=\tau$,

$$\alpha_\varrho^2\beta_\varrho^2=\frac{1}{2}\varrho^2-\frac{1}{2}\varrho,$$

$$\alpha_\varrho^2\beta_\sigma\beta_\tau=-\varrho,\quad\text{wenn }\sigma\gtrless\tau,$$

$$\alpha_\varrho\alpha_\sigma\beta_\varrho\beta_\sigma=\varrho\sigma-(\varrho+\sigma),\quad\text{wenn }\varrho\gtrless\sigma,$$

$$\alpha_\varrho\alpha_\sigma\beta_{\varrho_1}\beta_{\sigma_1}=-(\varrho+\sigma),\quad\text{wenn }\varrho,\sigma,\varrho_1,\sigma_1$$

verschieden sind.

$$\alpha_\varrho^2 p_\varkappa(\beta)=\frac{1}{2}\binom{\varrho^2}{1^{\varkappa_1}2^{\varkappa_2}\ldots}-\frac{1}{2}\binom{2\varrho}{1^{\varkappa_1}2^{\varkappa_2}\ldots}.$$

$$\alpha_\varrho\alpha_\sigma p_\varkappa(\beta)=\binom{\varrho,\sigma}{1^{\varkappa_1}2^{\varkappa_2}\ldots}-\binom{\varrho+\sigma}{1^{\varkappa_1}2^{\varkappa_2}\ldots},\quad\text{wenn }\varrho\gtrless\sigma,$$

$$\alpha_1^m\alpha_{\varrho-m}p_r(\beta)=(-1)^{m-1}p_r(\beta)\left\{\frac{1}{\beta_\tau}\alpha_{\varrho-\tau}+\sum_{\varrho=m+1}^{\varrho=\tau-1}\frac{1}{\beta_\varrho}\alpha_{\varrho-\varrho}\right\},$$

$$p_\varrho(\alpha)p_\sigma(\beta)=p_\sigma(\beta)\left\{(-1)^m\frac{1}{\beta_m}\alpha_1^{\varrho_1}\alpha_2^{\varrho_2}\cdots-\sum_\lambda\binom{1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\ldots}{1^m\mid 1^{\varrho_1}2^{\varrho_2}\ldots}\right\},$$

wo $m=\varrho_1+\varrho_2\ldots.$

Sur la théorie des séries.

Par

J. Franel à Zurich.

Lettre adressée à Mr. H. Weber à Strasbourg.

.... J'ai l'honneur de vous soumettre la formule dont je vous parlais dans ma dernière lettre et qu'on peut regarder comme une généralisation de la formule sommatoire d'Euler et de Maclaurin, limitée à ses deux premiers termes. Ses applications sont de nature très-variée. Les exemples que j'ai choisis, et qu'on multiplierait facilement, montreront bien le genre d'utilité qu'on en peut attendre. Soient

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$$

des quantités non négatives, telles qu'on puisse les ordonner par ordre de grandeur croissante:

$$\alpha_0 \leqq \alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \alpha_3 \ldots$$

Dans cette suite de grandeurs α choissisons celles qui sont différentes entre elles et désignons-les par

$$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots.$$

Soient, d'autre part,

$$a_0, a_1, a_2, \ldots$$

des grandeurs quelconques, réelles ou imaginaires, et convenons de poser

$$g(t) = \sum a_i, \tag{1}$$

la somme étant relative à tous les indices i tels que α_i ne surpasse pas la quantité réelle et positive t.

La fonction $g(t)$ ainsi définie conserve la même valeur quand t varie entre β_{i-1} et β_i; lorsque t dépasse la valeur β_i, elle s'accroit brusquement de la quantité

$$\sum a_r,$$

où la somme s'étend à tous les indices r tels que $\alpha_r = \beta_i$.

Envisageons maintenant la série

$$a_0 F(\alpha_0) + a_1 F(\alpha_1) + a_2 F(\alpha_2) + \cdots$$

où $F(x)$ désigne une fonction bien déterminée de la variable x ayant une dérivée unique $F'(x)$.

Faisons, pour abréger,

$$S_p = \sum a_i F(\alpha_i), \tag{2}$$

la somme étant étendue à tous les indices i tels que α_i ne surpasse pas p et cherchons à exprimer cette somme par le moyen d'une intégrale définie.

A cet effet posons

$$I = \int_{\alpha_0}^{p} F'(t)\, g(t)\, dt = \sum_{i=1}^{i=r} \int_{\beta_{i-1}}^{\beta_i} F'(t) g(t)\, dt + \int_{\beta_r}^{p} F'(t) g(t)\, dt,$$

β_r désignant la plus grande des quantités β inférieure à p.

En vertu de la définition même de $g(t)$ il viendra

$$I = \sum_{i=1}^{i=r} g(\beta_{i-1})[F(\beta_i) - F(\beta_{i-1})] + g(\beta_r)[F(p) - F(\beta_r)]$$

$$= -g(\beta_0) F(\beta_0) - \sum_{i=1}^{i=r} F(\beta_i)[g(\beta_i) - g(\beta_{i-1})] + g(\beta_r) F(p),$$

où le dernier terme $g(\beta_r) F(q)$ peut se mettre sous la forme

$$g(p) F(p) - [g(p) - g(\beta_r)] F(p).$$

La différence $g(p) - g(\beta_r)$ est nulle si p ne fait pas partie de la suite des quantités α; si $p = \beta_{r+1}$, elle se réduit à

$$\sum a_i,$$

la somme étant relative à tous les indices i tels que $\alpha_i = \beta_{r+1}$.

Nous obtenons donc finalement

$$I = -S_p + g(p) F(p),$$

d'où

$$S_p = g(p) F(p) - \int_{\alpha_0}^{p} F'(t) g(t)\, dt. \tag{3}$$

C'est la formule que nous voulions établir; elle ramène la recherche de la convergence ou de la divergence de la série illimitée

$$\sum a_i F(\alpha_i),$$

à l'étude de l'intégrale

$$\int_{\alpha_0}^{p} F'(t)g(t)dt,$$

pour des valeurs infiniment grandes de la limite supérieure.*)

2.

Supposons, par-exemple, que les constantes

$$a_0, a_1, a_2, \ldots$$

soient réelles et positives et que la fonction $F(x)$ soit positive et diminue constamment et indéfiniment quand x varie à α_0 à $+\infty$. La dérivée $F'(x)$ est négative dans l'intervalle $\alpha_0 \ldots p$, de sorte que le second membre de la formule (3) est la somme de deux quantités positives. Si donc la série

$$\sum_{i=0}^{i=\infty} a_i F(\alpha_i),$$

est convergente et a pour somme S on aura, pour toute valeur positive de p

$$-\int_{\alpha_0}^{p} F'(t)g(t)dt < S,$$

d'où résulte que l'intégrale

$$I = \int_{\alpha_0}^{p} F'(t)g(t)dt,$$

tend vers une limite déterminée quand la limite supérieure augmente indéfiniment. Réciproquement, les conditions précédentes relatives aux constantes a_i et à la fonction $F(x)$ étant toujours remplies, supposons que l'intégrale

$$\int_{\alpha_0}^{s} F'(t)g(t)dt,$$

ait un sens.

Je dis tout d'abord qu'on ne saurait avoir constamment, à partir d'une certaine valeur N,

$$g(t)F(t) \geqq \varepsilon,$$

ε étant une quantité positive fixe, car il en résulterait

$$-\int_{N}^{N+h} F'(t)g(t)dt \geqq -\varepsilon \int_{N}^{N+h} \frac{F'(t)}{F(t)}\,dt = \varepsilon \log\left[\frac{F(N)}{F(N+h)}\right].$$

*) Voir M. Lerch, Bemerkungen über trigonom. Reihen mit positiven Coefficienten (Nachtrag) Sitzungsber. der Königl. Gesellsch. d. Wissensch. Prag. 1898.

Comme la fonction $F(t)$ tend vers 0 quand t augmente indéfiniment, on pourrait choisir h assez grand pour que $\log\left[\frac{F(N)}{F(N+h)}\right]$ surpasse toute grandeur donnée d'avance et l'intégrale $\int_{\alpha_0}^{\infty} F'(t)g(t)\,dt$, n'aurait pas de sens, contre l'hypothèse.

Donc au-delà de la quantité N, il existera certainement des valeurs p, en nombre infini, telles que

$$g(p)F(p) < \varepsilon.$$

Mais on peut choisir N assez grand pour que, p étant $> N$,

$$\int_{\alpha_0}^{p} F'(t)g(t)\,dt,$$

diffère de $\int_{\alpha_0}^{\infty} F'(t)g(t)\,dt$, d'aussi peu qu'on le veut.

Il existe donc, quelque grand que soit N, une infinité de valeurs de $p > N$, telles que la différence

$$S_p - \left[-\int_{\alpha_0}^{\infty} F'(t)g(t)\,dt\right],$$

soit, en valeur absolue, plus petite que toute quantité donnée d'avance. La somme S_p, qui est positive, reste dès lors constamment inférieure à un nombre fixe, de sorte que la série illimitée

$$\sum a_i F(\alpha_i),$$

est convergente.

Le produit $g(p)F(p)$ tend donc nécessairement vers une limite lorsque p augmente indéfiniment et cette limite, d'aprés ce qui précède, est égale à 0.

On peut donc énoncer le résultat suivant*):

« Pour que la série

$$\sum a_i F(\alpha_i),$$

où les constantes a_i sont positives et où la fonction $F(t)$ est positive et décroit constamment et indéfiniment quand la variable augmente

---

*) Voir, au-sujet, de cette généralisation d'un théorème de Cauchy, Riemann, Convergenz der p-fach unendlichen Theta-Reihe. Hurwitz, Ueber Riemann's Convergenzcriterium, Math. Ann. Bd. 44. Weber, Elliptische Functionen und algebraische Zahlen, Seite 455.

au-delà de toute limite, soit convergente, il faut et il suffit que l'intégrale

$$-\int_{a_0}^{\infty} F'(t)\,g(t)\,dt$$

ait un sens.»

La valeur de cette dernière intégrale est égale à la somme de la série. Une condition nécessaire, mais non suffisante pour la convergence de la série, consiste en ce que le produit

$$F(t)\,g(t),$$

tende vers 0 avec $\frac{1}{t}$.

En particulier, pour qu'une série à termes positifs

$$\sum \frac{1}{\sigma_i},$$

soit convergente, il faut et il suffit que l'intégrale

$$\int^{p} g(t)\,\frac{dt}{t^2},$$

tende vers une limite déterminée lorsque p augmente indéfiniment, $g(t)$ désignant le nombre des quantités σ_i qui ne surpassent pas t.

Il est à peine besoin d'ajouter que, dans l'énoncé précédent, il suffit de supposer que les constantes a_i sont positives à partir d'un certain rang n et que la fonction $F(t)$ satisfait aux conditions énumérées à partir de la valeur $t = a_n$.

3.

Il arrive assez souvent que la fonction $g(t)$ admette, pour de grandes valeurs de t, une expression approchée ou asymptotique et la formule (3) permettra, dans ce cas, généralement parlant, d'obtenir une valeur approchée correspondante de la somme

$$S_p = \sum_{a_i \leqq p} a_i F(a_i).$$

Ainsi considérons une forme quadratique positive de n variables

$$f = \sum a_{ij} x_i x_j, \qquad \begin{matrix}(i, j = 1, 2, \ldots n)\\ (a_{ij} = a_{ji})\end{matrix}$$

et envisageons la somme

$$S_p = \sum \frac{1}{f^{n-\frac{s}{2}}},$$

étendue à tous les systèmes des valeurs entières des variables x tels que

$$f \leqq p,$$

le système. $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, excepté; s est une quantité imaginaire quelconque

$$s = \alpha + i\beta, \quad (\alpha \text{ et } \beta \text{ réels}).$$

Les grandeurs a_i sont toutes égales à l'unité, la fonction $F(t)$ a pour expression

$$F(t) = \frac{1}{t^{n\frac{s}{2}}},$$

et les quantités α_i sont les valeurs de la forme f pour des valeurs entières des variables x, à l'exclusion toujours du système particulier $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. Or si l'ou désigne par V l'intégrale multiple

$$V = \int\int \cdots \int dx_1 dx_2 \ldots dx_n,$$

étendue au système des variables x satisfaisant à la condition

$$f \leqq 1,$$

on sait que le nombre $g(t)$ des quantités α_i qui ne surpassent pas t peut se mettre sans la forme

$$g(t) = Vt^{\frac{n}{2}} + \eta(t),$$

où

$$|\eta(t)| < At^{\frac{n-1}{2}},$$

A étant une constante fixe, indépendante de t*).

Nous aurons donc, par l'application de la formule (3)

$$S_p = \frac{g(p)}{p^{n\frac{s}{2}}} - \int_{\alpha_0}^{p} \left[Vt^{\frac{n}{2}} + \eta(t)\right] d\left(\frac{1}{t^{n\frac{s}{2}}}\right)$$

ou

$$(4) \qquad S_p = \frac{\eta(p)}{p^{n\frac{s}{2}}} - \frac{V}{s-1}\,\frac{1}{p^{n\frac{(s-1)}{2}}} + \frac{Vs}{s-1}\,\frac{1}{\alpha_0^{n\frac{(s-1)}{2}}} - \int_{\alpha_0}^{p} \eta(t)\, d\left(\frac{1}{t^{n\frac{s}{2}}}\right).$$

Si la partie réelle α de s, est > 1, on voit que S_p tend vers une limite déterminée, que nous désignerons par $\varphi(s)$, lorsque p augmente indéfiniment. Cette limite $\varphi(s)a$ pour expression:

$$(5) \qquad \varphi(s) = \frac{Vs}{s-1}\,\frac{1}{\alpha_0^{n\frac{(s-1)}{2}}} - \int_{\alpha_0}^{\infty} \eta(t)\, d\left(\frac{1}{t^{n\frac{s}{2}}}\right).$$

*) Voir Minkowski, Geometrie der Zahlen, pages 61 et 62.

On en conclut que, dans la région du plan définie par l'inégalité,

$$\alpha > 1 - \frac{1}{n},$$

la différence

$$\varphi(s) - \frac{V}{s-1},$$

est une fonction holomorphe de la variable s; cette différence est donc développable en série de la forme

$$c_0 + c_1(s-1) + c_2(s-1)^2 + \cdots$$

et cette série convergera certainement tant que $|s-1|$ sera $< \frac{1}{n}$ *).

En retranchant membre à membre les équations (4) et (5) il vient:

$$(6) \qquad S_p - \varphi(s) = \frac{\eta(p)}{p^{n\frac{s}{2}}} - \frac{V}{s-1}\,\frac{1}{p^{\frac{n}{2}(s-1)}} + \int_p^\infty \eta(t)\, d\left(\frac{1}{t^{n\frac{s}{2}}}\right).$$

Le module de cette dernière intégrale est inférieur à

$$A\,\frac{n}{2}\,|s| \int_p^\infty t^{\frac{n(1-\alpha)-1}{2}-1}\, dt$$

c'est-à-dire plus petit que

$$\frac{A\,n\,|s|}{1-n(1-\alpha)}\,\frac{1}{p^{\frac{n\alpha-(n-1)}{2}}},$$

si l'ou suppose $\alpha > 1 - \frac{1}{n}$.

Cette condition étant supposée remplie on pourra faire

$$(7) \qquad S_p - V\,\frac{p^{\frac{n}{2}(1-s)}}{1-s} = \varphi(s) + R\left(\frac{1}{p^{\frac{n\alpha-(n-1)}{2}}}\right),$$

en désignant généralement par

$$R\left(\frac{1}{p^r}\right)$$

toute quantité dont le produit par p^r, reste, en valeur absolue, quelque soit la valeur de p, inférieur à une quantité fixe assignable. On sait d'ailleurs que V a pour expression

$$V = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}\,\frac{1}{\sqrt{D}},$$

D étant le déterminant de la forme f.

*) On peut montrer que cette série converge dans tout le plan, mais nous n'aurons pas à utiliser cette propriété.

Si dans la formule (6), mise sous la forme,

$$\varphi(s) - \frac{V}{s-1} = S_p - V\,\frac{p^{\frac{n}{2}(1-s)}-1}{1-s} - \frac{\eta(p)}{p^{n\frac{s}{2}}} - \int_p^\infty \eta(t)\,d\left(\frac{1}{t^{n\frac{s}{2}}}\right),$$

on développe les deux membres suivant les puissances de $s-1$, on obtiendra, pour les coefficients $c_0, c_1, c_2, \ldots$ les expressions suivantes:

$$c_0 = \sum \frac{1}{f^{\frac{n}{2}}} - \frac{n}{2} V \log p + R\left(\frac{1}{p^{\frac{1}{2}}}\right),$$

$$c_1 = -\frac{n}{2}\sum \frac{\log f}{f^{\frac{n}{2}}} + \left(\frac{n}{2}\right)^2 V\,\frac{\log^2 p}{1.2} + R\left(\frac{\log p}{p^{\frac{1}{2}}}\right),$$

. . . . . .

. . . . . .

$$c_r = \frac{(-1)^r\left(\frac{n}{2}\right)^r}{1.2\ldots r}\left\{\sum \frac{\log^r f}{f^{\frac{n}{2}}} - \frac{n}{2} V\,\frac{\log^{r+1} p}{r+1}\right\} + R\left(\frac{\log^r p}{p^{\frac{1}{2}}}\right),$$

. . . . . .

$R\left(\frac{\log^r p}{p^{\frac{1}{2}}}\right)$ désigne une quantité dont le produit par $\frac{p^{\frac{1}{2}}}{\log^r p}$ reste, en valeur absolue et pour toute valeur de p, inférieur à une quantité assignable. Les sommes

$$\sum \frac{\log^r f}{f^{\frac{n}{2}}},$$

s'étendent aux systèmes des valeurs entières des variables $x_1, x_2 \ldots x_n$ pour lesquelles la valeur de la forme f ne surpasse pas p, à l'exclusion toujours du système particulier $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

La première des formules précédentes a été établie, mais d'une autre manière, par M. Mertens, dans le cas particulier où le nombre n des variables est égal à deux*).

Considérons encore l'expression

$$S_p = \sum_{r \leq p} \frac{f(r)}{r^s},$$

$f(r)$ désignant le nombre des diviseurs de l'entier positif r.

---

*) „Ueber einen asympt. Ausdruck" von F. Mertens, Sitzungsb. der kaiserl. Acad. der Wissenschaften in Wien, Band CVI, Mai 1897. Voir aussi, à ce sujet, les formules données par M. Jensen, pour le calcul des coefficients du développement de $\zeta(s)$ suivant les puissances de $s-1$, Comptes-Rendus, t. CIV, 1887.

On sait que la somme

$$g(t) = \sum_{r=1}^{r=E(t)} f(r),$$

peut se mettre sous la forme

$$g(t) = t \log t + (2c-1)t + \eta(t),$$

où c désigne la constante d'Euler et où $|\eta(t)|$ est, au plus, de l'ordre $t^{\frac{1}{2}}$*). On obtient, dans ce cas, par l'application de la formule (3)

$$(8) \qquad S_p = \frac{\eta(p)}{p^s} + 2c - 1 + (2c + \log p)\left(\frac{p^{1-s}-1}{1-s}\right) - \frac{p^{1-s}-1-(1-s)\log p}{(1-s)^2} - \int_1^p \eta(t)\, d\left(\frac{1}{t^s}\right).$$

Admettons que la partie réelle de s soit > 1, puis supposons que p augmente indéfiniment; il viendra

$$(9) \qquad \zeta^2(s) = 2c - 1 + \frac{2c}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2} - \int_1^\infty \eta(t)\, d\left(\frac{1}{t^s}\right)$$

d'où

$$(10) \qquad \zeta^2(s) - \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{2c}{s-1} = S_p + \frac{p^{1-s}-1-(1-s)\log p}{(1-s)^2} - (2c+\log p)\left(\frac{p^{1-s}-1}{1-s}\right) - \frac{\eta(p)}{p^s} - \int_p^\infty \eta(t)\, d\left(\frac{1}{t^s}\right).$$

Le second membre de cette équation est développable suivant les puissances entières et positives de $s-1$ et la série obtenue

$$A_0 + A_1(s-1) + A_2(s-1)^2 + \cdots$$

convergera certainement tant que le module de $s-1$ sera $< \frac{1}{2}$. On sait d'ailleurs, par les propriétés de la fonction $\zeta(s)$ que cette série converge dans tout le plan.

En conservant les notations précédemment introduites on obtiendra, pour le coefficient A_h, l'expression suivante:

$$(11) \quad A_h = \frac{(-1)^h}{1.2\ldots h}\left\{\sum_{r\leq p}\frac{f(r)\log^h r}{r} + \frac{\log^{h+2} p}{(h+1)(h+2)} - (2c+\log p)\frac{\log^{h+1} p}{h+1}\right\} + R\left(\frac{\log^h p}{p^{\frac{1}{2}}}\right),$$

d'où l'on tire une valeur asymptotique de la somme

$$\sum_{r\leq p}\frac{f(r)}{r}\log^h r.$$

*) Dirichlet's Werke, zweiter Band, Seite 56.

En particulier

$$\sum_{r \leq p} \frac{f(r)}{r} = \frac{1}{2} \log^2 p + 2c \log p + A_0 + R\left(\frac{1}{p^{\frac{1}{2}}}\right)^*).$$

4.

Notre formule se prête tout naturellement à la généralisation d'un théorème dû à Dirichlet et dont l'illustre géomètre a fait de nombreures applications**).

Envisageons la série

$$f(s) = \frac{a_0}{\alpha_0^s} + \frac{a_1}{\alpha_1^s} + \frac{a_2}{\alpha_2^s} + \cdots \tag{12}$$

où $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ désignent des quantités positives rangées par ordre de grandeur croissante, $a_0, a_1, a_2, \ldots$ des grandeurs quelconques, réelles ou imaginaires.

La fonction discontinue $g(t)$ ayant toujours la même signification que précédemment, supposons que le rapport

$$\frac{g(t)}{t^m \log^n t},$$

où l'exposant n est > -1, tende vers la limite l, lorsque t augmente indéfiniment.

Je dis que la série (12) converge pour toutes les valeurs de s supérieures à m et que le produit

$$(s-m)^{n+1} f(s),$$

tend vers la limite $lm\Gamma(n+1)$, quand $s-m$ tend vers 0 par des valeurs positives***).

En effet, S_p ayant la signification connue, nous avons, par la formule (3)

$$S_p = \frac{g(p)}{p^s} - \int_{\alpha_0}^{p} g(t)\, d\left(\frac{1}{t^s}\right)$$

ou

$$S_p = \frac{g(p)}{p^s} - \int_{\alpha_0}^{1} g(t)\, d\left(\frac{1}{t^s}\right) - \int_{1}^{p} g(t)\, d\left(\frac{1}{t^s}\right).$$

---

*) Voir notre travail intitulé Sur une formule utile dans la détermination de certaines valeurs asymptotiques, Math. Annalen, Band 51.

**) Recherches sur diverses applications etc. Oeuvres de Dirichlet, tome I et Sur un théorème relatif aux séries, tome II.

***) On peut supposer m et s imaginaires; dans ce cas, la série proposée converge pour les valeurs de s dont la partie réelle surpasse la partie réelle de m. On conviendra d'attribuer à t^m sa valeur principale.

Maintenant, si l'on fait

$$g(t) = t^m \log^n t\,[l + \eta(t)],$$

on pourra, après avoir choisi une quantité positive quelconque ε, en déterminer une autre N, telle que

$$|\eta(t)| \text{ soit } < \varepsilon,$$

dès que t surpasse N.

Nous pouvons écrire S_p sous la forme

$$Sp = \frac{l \log^n p}{p^{s-m}} + \eta(p) \frac{\log^n p}{p^{s-m}} - \int_{\alpha_0}^{1} g(t)\, d\left(\frac{1}{t^s}\right)$$

$$+ s\,l \int_1^p \frac{\log^n t\, dt}{t^{s+1-m}} + s \int_1^p \eta(t) \frac{\log^n t\, dt}{t^{s+1-m}}.$$

Si l'on suppose $s > m$, l'intégrale

$$\int_1^p \frac{\log^n t\, dt}{t^{s+1-m}},$$

tend vers la limite

$$\frac{\Gamma(n+1)}{(s-m)^{n+1}},$$

lorsque p augmente indéfiniment.

L'intégrale

$$\int_1^p \eta(t) \frac{\log^n t\, dt}{t^{s+1-m}},$$

converge également vers une limite déterminée, puisque $|\eta(t)|$ est, à partir de N constamment $< \varepsilon$. Notre série converge donc bien pour $s > m$ et sa somme $f(s)$ a pour expression :

$$f(s) = -\int_{\alpha_0}^{1} g(t)\, d\left(\frac{1}{t^s}\right) + s \frac{l \cdot \Gamma(n+1)}{(s-m)^{n+1}} + s \int_1^{\infty} \eta(t) \frac{\log^n t\, dt}{t^{s+1-m}}.$$

D'ailleurs

$$\int_1^{\infty} \eta(t) \frac{\log^n t\, dt}{t^{s+1-m}} = \int_1^N \eta(t) \frac{\log^n t\, dt}{t^{s+1-m}} + \int_N^{\infty} \eta(t) \frac{\log^n t\, dt}{t^{s+1-m}},$$

cette dernière intégrale est, en valeur absolue,

$$< \varepsilon \int_N^{\infty} \frac{\log^n t\, dt}{t^{s+1-m}} = \varepsilon \left[\frac{\Gamma(n+1)}{(s-m)^{n+1}} - \int_1^N \frac{\log^n t\, dt}{t^{s+1-m}} \right].$$

On pourra donc choisir, d'abord ε et ensuite $s - m$ assez petits, pour que la différence

$$(s-m)^{n+1} f(s) - ml\Gamma(n+1),$$

soit inférieure à toute grandeur donnée d'avance, si petite qu'elle soit, c. q. f. d.

On obtiendrait d'autres propositions, en faisant sur la fonction $g(t)$ d'autres hypothèses simples.

5.

Il existe des théorèmes analogues relatifs aux séries de puissances

$$a_0 x^{\alpha_0} + a_1 x^{\alpha_1} + a_2 x^{\alpha_2} + \cdots.$$

Nous nous bornerons, pour simplifier, à la proposition suivante: Soit

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

une série ordonnée suivant les puissances entières et positives de la variable x; faisons

$$g(t) = \sum_{i \leq t} a_i$$

et supposons que le rapport

$$\frac{g(t)}{t^m},$$

tende vers une limite déterminée l, lorsque t augmente indéfiniment. Je dis que la série précédente converge pour les valeurs de la variable x de module < 1 et que le produit

$$(1-x)^m f(x),$$

tend vers la limite $l\Gamma(m+1)$, quand x tend vers l'unité par des valeurs croissantes. L'exposant m est une quantité imaginaire quelconque dont la partie réelle est > -1; t^m et $(1-x)^m$ ont leurs valeurs principales.

Soit, en effet,

$$S_p = \sum_{i \leq p} a_i x^i.$$

On aura

$$S_p = g(p) x^p - \int_0^p g(t) \frac{d(x^t)}{dt} dt,$$

et, si l'on fait

$$g(t) = t^m [l + \eta(t)],$$

on pourra, après avoir choisi une quantité positive quelconque ε, choisir N de manière que

$$|\eta(t)| < \varepsilon$$

pour toutes les valeurs de t surpassant N.

En écrivant S_p sous la forme

$$S_p = p^m\big(l+\eta(p)\big)\,x^p - \int_0^p t^m\big(l+\eta(t)\big)\,x^t \log x\,dt,$$

on voit, si l'on suppose x réel, positif et < 1, que Sp tend vers une limite déterminée $f(x)$, lorsque p augmente indéfiniment. Cette limite a pour expression:

$$f(x) = l\log\left(\frac{1}{x}\right)\int_0^\infty t^m\,x^t\,dt + \log\left(\frac{1}{x}\right)\int_0^\infty t^m\,\eta(t)\,x^t\,dt$$

$$= l\,\frac{\Gamma(m+1)}{\log^m\left(\frac{1}{x}\right)} + \log\left(\frac{1}{x}\right)\int_0^\infty t^m\,\eta(t)\,x^t\,dt.$$

D'ailleurs

$$\int_0^\infty t^m\,\eta(t)\,x^t\,dt = \int_0^N t^m\,\eta(t)\,x^t\,dt + \int_N^\infty t^m\,\eta(t)\,x^t\,dt$$

et si l'on pose $m = \alpha + i\beta$ (α et β réels) le module de cette dernière intégrale sera inférieur à

$$\varepsilon\int_N^\infty t^\alpha\,x^t\,dt = \varepsilon\left[\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\log^{\alpha+1}\left(\frac{1}{x}\right)} - \int_0^N t^\alpha\,x^t\,dt\right].$$

Comme le rapport $\dfrac{1-x}{\log\left(\frac{1}{x}\right)}$ a pour limite un quand x tend vers l'unité, on voit que la différence

$$(1-x)^m f(x) - l\,\Gamma(m+1),$$

pourra être rendue aussi petite qu'on le veut en choisinant ε et $1-x$ suffisamment petits, c. q. f. d.

On obtient le théorème connu d'Abel en supposant $m = 0$*).

Comme application envisageons la série

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} x^{n^2}$$

*) Voir aussi Frobenius, Ueber die Leibniz'sche Reihe, Journal für Mathematik, tome 89.

et faisons $x = \varrho e^{2\pi i \frac{b}{a}}$, ϱ étant positif, a et b deux nombres entiers positifs, premiers entre eux, $a > 1$. Il viendra

$$f\left(\varrho e^{2\pi i \frac{b}{a}}\right) = \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{2\pi i \frac{b}{a} n^2} \varrho^{n^2}.$$

On a, dans ce cas particulier,

$$g(t^2) = \sum_{n=0}^{n=E(t)} e^{2\pi i \frac{b}{a} n^2}.$$

Soient q le quotient, r le reste de la division de $E(t)$ par a:

$$E(t) = qa + r, \quad 0 \leqq r < a.$$

Si l'on fait, pour abréger,

$$P = \sum_{n=0}^{n=a-1} e^{2\pi i \frac{b}{a} n^2}, \qquad R = \sum_{n=0}^{n=r} e^{2\pi i \frac{b}{a} n^2},$$

on aura

$$g(t^2) = qP + R.$$

d'où résulte

$$\lim_{t=\infty} \frac{g(t^2)}{t} = \frac{P}{a} = \lim_{t=\infty} \frac{g(t)}{\sqrt{t}}.$$

La valeur de P a été, comme on sait, déterminée par Gauss, dans son fameux mémoire «Summatio quarumdam serierum singularium».

Il suffira, pour notre objet, de savoir que P n'est pas nul*).

D'après ce qui précède le produit

$$(1-\varrho)^{\frac{1}{2}} f\left(\varrho e^{2\pi i \frac{b}{a}}\right),$$

tend donc vers la limite

$$\frac{P}{a} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{P}{2a} \sqrt{\pi},$$

quand ϱ tend vers l'unité par des valeurs croissantes. Le point

$$x = e^{2\pi \frac{b}{a}},$$

du cercle de convergence est un point singulier de la fonction $f(x)$; celle-ci ne peut donc s'étendre analytiquement au delà du cercle de rayon un, dont le centre est à l'origine. C'est là une propriété bien connue dans la théorie des fonctions elliptiques.

---

*) P n'est égal à 0 que si le nombre a est pair et de la forme $4m+2$ dans ce cas $f\left(\varrho e^{2\pi i \frac{b}{a}}\right)$ tend vers $\frac{1}{2}$, quand ϱ s'approche de l'unité.

6.

Il est facile de former autant de fonctions qu'on le voudra, développables par la série de Taylor dans un cercle de centre 0 et de rayon un et admettant comme points singuliers la totalité ou une partie seulement des points

$$x = e^{2\pi i \frac{b}{a}},$$

a et b désignant, comme précédemment, des nombres entiers premiers entre eux.

A cet effet, nous remarquerons qu'une fonction $\varphi(x)$ définie par l'équation

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n x^n,$$

où la série converge tant que $|x|$ est < 1, peut se développer aussi en série de la forme

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n \frac{x^n}{1-x^n},$$

où les coefficients b_n sont des constantes liées aux coefficients a_n par les relations

$$a_n = \sum b_d,$$

la sommation s'étendant à tous les diviseurs d du nombre entier n.

Cette série

$$\sum b_n \frac{x^n}{1-x^n},$$

converge absolument, comme la série donnée

$$\sum a_n x^n,$$

tant que le module de la variable x reste inférieur à un.

Désignons ce module par ρ, puis faisons

$$x = \rho c^{2\pi i \frac{b}{a}},$$

a et b étant deux nombres entiers premiers entre eux; on supposera de plus que a est positif et > 1.

Si l'on fait, pour abréger,

$$S_0 = \sum_{r=1}^{r=\infty} b_{ra} \frac{\rho^{ra}}{1-\rho^{ra}},$$

$$S_\alpha = \sum_{r=0}^{r=\infty} b_{\alpha+ra} \cdot \frac{\rho^{\alpha+ra}}{e^{-2\pi i \alpha \frac{b}{a}} - \rho^{\alpha+ra}}, \quad (\alpha = 1, 2, \ldots a-1)$$

il viendra

$$\varphi\left(\rho e^{2\pi i\frac{b}{a}}\right)=\sum_{\alpha=0}^{\alpha=a-1}S_\alpha.$$

Nous ferons maintenant, sur les coefficients b_n, les hypothèses suivantes:

1. Les séries

$$\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{b_{ra}}{ra},$$

$$\sum_{r=0}^{r=\infty}\frac{b_{\alpha+ra}}{\alpha+ra}, \quad (\alpha=1,2,\dots a-1)$$

sont convergentes.

Les sommes de ces séries seront désignées respectivement par s_0 et s_α.

2. Si l'on fait

$$g_0(t)=\sum_{r=1}^{r=E(t)}\frac{b_{ra}}{ra}=s_0+\eta_0(t),$$

$$g_\alpha(t)=\sum_{r=0}^{r=E(t)}\frac{b_{\alpha+ra}}{\alpha+ra}=s_\alpha+\eta_\alpha(t),$$

nous admettrons que l'on ait

$$|\eta_0(t)|<\frac{A_0}{(at)^\sigma},$$

$$|\eta_\alpha(t)|<\frac{A_\alpha}{(\alpha+at)^\sigma},$$

σ, désignant un exposant positif, fixe, aussi petit d'ailleurs qu'on le voudra, A_0 et A_α des grandeurs positives indépendantes de t.

Nous nous proposons de montrer que, dans ces conditions, le produit

$$(1-\rho)\,\varphi\left(\rho e^{2\pi i\frac{b}{a}}\right)$$

tend vers la limite s_0, quand ρ s'approche de l'unité par des valeurs croissantes.

Si donc s_0 n'est pas nulle, le point

$$x=e^{2\pi i\frac{b}{a}}$$

sera un point singulier de la fonction $\varphi(x)$.

Nous supposerons, ce qui est évidemment permis, que l'exposant σ est <1.

En écrivant S_0 sous la forme

$$S_0 = \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{b_{ra}}{ra!} \frac{ra\varrho^{ra}}{1-\varrho^{ra}},$$

on aura, tout d'abord, en vertu de la formule (3),

$$S_0 = -\int_1^\infty g_0(t) \frac{t}{dt}\left[\frac{ta\varrho^{ta}}{1-\varrho^{ta}}\right] dt,$$

d'où, en remplaçant $g_0(t)$ par sa valeur

$$s_0 + \eta_0(t),$$

$$S_0 = s_0 \frac{a\varrho^a}{1-\varrho^a} + I,$$

en faisant, pour abréger,

$$I = -\int_1^\infty \eta_0(t) \frac{d}{dt}\left[\frac{ta\varrho^{ta}}{1-\varrho^{ta}}\right] dt = -\int_a^\infty \eta_0\left(\frac{u}{a}\right) \frac{d}{du}\left[\frac{u\varrho^u}{1-\varrho^u}\right] du.$$

La fonction

$$-\frac{d}{du}\left[\frac{u\varrho^u}{1-\varrho^u}\right]$$

étant positive, pour des valeurs positives de u, on aura

$$|I| < -A_0 \int_a^\infty \frac{d}{du}\left[\frac{u\varrho^u}{1-\varrho^u}\right] \frac{du}{u^\sigma}$$

c'est-à-dire

$$|I| < A_0\left[\frac{a^{1-\sigma}\varrho^a}{1-\varrho^a} - \sigma\int_a^\infty \frac{\varrho^u}{1-\varrho^u} \frac{du}{u^\sigma}\right],$$

inégalité qu'on peut mettre encore sous la forme

$$|I| < \frac{A_0}{a^\sigma}\left[\frac{a\varrho^a}{1-\varrho^a} - \frac{1}{\log\left(\frac{1}{\varrho}\right)}\right] + A_0\left(\log\frac{1}{\varrho}\right)^{\sigma-1}$$

$$- A_0\sigma\left(\log\frac{1}{\varrho}\right)^{\sigma-1}\left[\int_{a\log\frac{1}{\varrho}}^1 \left[\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t}\right]\frac{dt}{t^\sigma} + \int_1^\infty \frac{1}{e^t-1}\frac{dt}{t^\sigma}\right].$$

L'exposant σ étant positif, mais < 1, on reconnait que le produit

$$(1-\varrho)\, I,$$

peut être rendu plus petit, en valeur absolue, que toute grandeur donnée d'avance, en choisissant $1-\varrho$ suffisamment petit.

Nous avons donc ce premier résultat:

$$\lim_{\varrho=1}(1-\varrho)S_0 = s_0 \text{ *)}.$$

Nous avons semblablement, α étant maintenant supposé différent de 0,

$$S_\alpha = -\int_0^\infty g_\alpha(t)\frac{d}{dt}\left[\frac{(\alpha+t\alpha)\varrho^{\alpha+t\alpha}}{e^{-2\pi i\alpha\frac{b}{a}}-\varrho^{\alpha+t\alpha}}\right]dt$$

$$= s_\alpha\frac{\alpha\varrho^\alpha}{e^{-2\pi i\alpha\frac{b}{a}}-\varrho^\alpha} + J,$$

en faisant, pour abréger,

$$J = -\int_0^\infty \eta_\alpha(t)\frac{d}{dt}\left[\frac{(\alpha+t\alpha)\varrho^{\alpha+t\alpha}}{e^{-2\pi i\alpha\frac{b}{a}}-\varrho^{\alpha+t\alpha}}\right]dt.$$

On vérifie, aisément, que pour ϱ inférieur à un, le module de la fonction

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{(\alpha+t\alpha)\varrho^{\alpha+t\alpha}}{e^{-2\pi i\alpha\frac{b}{a}}-\varrho^{\alpha+t\alpha}}\right],$$

est inférieur à

$$\frac{2\alpha\varrho^{\alpha+t\alpha}}{1-\varrho^{\alpha+t\alpha}} - \frac{d}{dt}\left[\frac{(\alpha+t\alpha)\varrho^{\alpha+t\alpha}}{1-\varrho^{\alpha+t\alpha}}\right].$$

Partageons l'intégrale J en deux autres, la première J_1 allant de 0 à n_α, la seconde J_2, de n_α à l' ∞, n_α désignant une quantité positive quelconque. L'intégrale J_1 tend vers une limite déterminée L_1, quand ϱ s'approche de plus en plus de l'unité. Dans l'intégrale J_2, faisons la substitution

$$\alpha + t\alpha = u$$

et posons

$$\alpha + n_\alpha\alpha = N_\alpha.$$

On aura évidemment, d'après la remarque précédente

$$|J_2| < A_\alpha\int_{N_\alpha}^\infty \frac{du}{u^\sigma}\left[\frac{2\varrho^u}{1-\varrho^u} - \frac{d}{du}\left(\frac{u\varrho^u}{1-\varrho^u}\right)\right]$$

ou

*) Ce résultat subsiste si l'ou suppose simplement la convergence de la série

$$\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{b_{r\alpha}}{r\alpha},$$

sans faire aucune hypothèse sur la manière dont le reste $\eta_0(t)$ tend vers 0.

$$|J_2| < A_\alpha \left[\frac{1}{N_\alpha^\sigma} \cdot \frac{N_\alpha \varrho^{N_\alpha}}{1-\varrho^{N_\alpha}} + (2-\sigma) \int_{N_\alpha}^{\infty} \frac{\varrho^u du}{u^\sigma (1-\varrho^u)} \right]$$

inégalité qu'on peut aussi écrire de la manière suivante:

$$|J_2| < \frac{A_\alpha}{N_\alpha^\sigma} \left[\frac{N^\alpha \varrho^{N_\alpha}}{1-\varrho^{N_\alpha}} - \frac{1}{\log\left(\frac{1}{\varrho}\right)} \right] - \frac{A_\alpha}{\sigma} (2-\sigma) \left(\log \frac{1}{\varrho}\right)^{\sigma-1}$$

$$+ A_\alpha (2-\sigma) \left(\log \frac{1}{\varrho}\right)^{\sigma-1} \left[\int_{N_\alpha \log \frac{1}{\varrho}}^{1} \left[\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} \right] \frac{dt}{t^\sigma} + \int_1^\infty \frac{1}{e^t-1} \frac{dt}{t^\sigma} \right]$$

$$+ \frac{2}{\sigma . N_\alpha^\sigma} \frac{1}{\log\left(\frac{1}{\varrho}\right)}.$$

On pourra donc choisir N_α assez grand et ensuite $1-\varrho$ assez petit pour que le produit

$$(1-\varrho)\,|J_2|$$

soit inférieur à toute grandeur donnée d'avance. Nous obtenons ainsi le nouveau résultat:

$$\lim_{\varrho=1} (1-\varrho) S_\alpha = 0$$

qui, joint au précédent, nous permet de conclure

$$\lim_{\varrho=1} (1-\varrho)\, \varphi\left(\varrho e^{2\pi i \frac{b}{a}}\right) = s_0$$

comme nous voulions l'établir.

Par-exemple, la fonction $\varphi(x)$ définie par l'équation

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^\sigma} \frac{x^n}{1-x^n},$$

où σ est une quantité positive ou, plus généralement, une quantité imaginaire dont la partie réelle est positive, ne peut s'étendre analytiquement au-delà du cercle de centre 0 et de rayon un.

Le produit

$$\left(1 - x e^{-2\pi i \frac{b}{a}}\right) \varphi(x)$$

tend vers la limite

$$\frac{1}{a^{\sigma+1}} \zeta(\sigma+1),$$

quand x s'approche du point $e^{2\pi i\frac{b}{a}}$, en suivant le rayon du cercle de convergence qui y aboutit; a et b désignent, comme plus haut, deux nombres entiers premiers entre eux, le premier a étant, en outre, positif.

Considérons encore la fonction

$$F(x) = \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{\varphi(m)}{m} x^m,$$

où $\varphi(m)$ est la fonction arithmétique qui indique combien il y a de nombres $< m$ et premiers à m. Si l'on définit les coefficients $\mu(n)$ par l'équation

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\mu(n)}{n^s},$$

on aura

$$F(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\mu(n)}{n} \frac{x^n}{1-x^n},$$

d'où

$$\lim_{x=e^{2\pi i\frac{b}{a}}} \left(1 - xe^{-2\pi i\frac{b}{a}}\right) F(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\mu(na)}{(na)^2} = s_0,$$

a et b ayant toujours la même signification. Cette limite s_0 est nulle si a est divisible par un carré autre que l'unité. Si a est un produit de facteurs premiers tous différents:

$$a = p_1 p_2 \cdots p_r,$$

on aura

$$s_0 = \frac{\mu(a)}{a^2} \sum{}' \frac{\mu(n)}{n^2},$$

où la somme s'étend maintenant aux seuls nombres entiers positifs qui sont premiers à a. On aura donc finalement

$$s_0 = \frac{\mu(a)}{a^2} \frac{1}{\zeta(2)\left(1-\frac{1}{p_1^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_r^2}\right)}$$

ou

$$s_0 = \frac{6}{\pi^2} \frac{(-1)^r}{(p_1^2-1)(p_2^2-1)\cdots(p_r^2-1)}.$$

La fonction $F(x)$ ne peut donc s'étendre analytiquement au-delà du cercle de centre 0 et de rayon un.

On pourrait, dans le cas général, faire d'autres hypothèses simples sur les coefficients b_n; on pourrait aussi envisager d'autres modes de développement des fonctions analytiques.

Les applications qui précédent suffiront pour montrer le parti qu'on peut tirer de cette simple formule (3)*).

Zurich, décembre 1898.

---

*) Consulter, au sujet des nombreux travaux concernant les séries de Taylor qui admettent leur cercle de convergence comme coupure, le remarquable article de M. Hurwitz: Ueber die Entwickelung der allgemeinen Theorie der analytischen Functionen in neuerer Zeit, dans les Verhandlungen des ersten internationalen Mathematiker-Kongresses, herausgegeben von F. Rudio (Teubner).

Die algebraische Lösung des Problems der Substitutionsgruppen.

Von

P. Hoyer in Burg b. Magdeburg.

Einleitung.

Wir verstehen unter $x_1 x_2 \ldots x_n$ eine Reihe von n unbeschränkt veränderlichen Grössen und wenden auf diese Reihe alle Substitutionen irgend einer Gruppe n. Grades an. Die Anzahl der so erhaltenen Permutationen oder Grössenreihen ist gleich ν, wenn ν die Ordnung der Gruppe ist. Aus diesen ν Permutationen bilden wir ein System von $n! = 1.2 \ldots n$ Grösseneinheiten:

$$\begin{array}{l} x_1^{(1)}\ x_2^{(1)} \ldots x_n^{(1)}, \\ x_1^{(2)}\ x_2^{(2)} \ldots x_n^{(2)}, \\ \vdots \\ x_1^{(n!)}\ x_2^{(n!)} \ldots x_n^{(n!)}, \end{array}$$

indem wir jede Permutation $\frac{n!}{\nu} = i$ mal als Reihe des Systems setzen. Verstehen wir dann unter

$$k_1^{(\beta)}\ k_2^{(\beta)} \ldots k_n^{(\beta)}$$
$$(\beta = 1, 2, \ldots n!)$$

$n!$ Reihen unbestimmter Constanten, so ist der Ausdruck:

$$l(k, x) = \sum_{\beta=1}^{n!} (k_1^{(\beta)} x_1^{(\beta)} + k_2^{(\beta)} x_2^{(\beta)} + \cdots + k_n^{(\beta)} x_n^{(\beta)})$$

eine lineare homogene Function der Grössen $x_1 x_2 \ldots x_n$, und wir nennen dieselbe daher eine „Linearform" der betrachteten Gruppe. Die Anzahl aller Linearformen einer Gruppe ist somit gleich $\frac{n!}{(i!)^\nu}$; dieselben sind mit der Gruppe gegeben, umgekehrt ist jede Gruppe durch eine ihrer Linearformen völlig bestimmt. Die Aufgabe:

„alle Gruppen n. Grades zu bestimmen"

ist daher identisch mit der Aufgabe:

„alle Linearformen $l(k, x)$ von Gruppen n. Grades zu bestimmen."

Damit ist das Gruppenproblem algebraisch formulirt.

Bildet man das über sämmtliche Linearformen $l(k, x)$ der Gruppen n. Grades erstreckte Product

$$\Pi\big(s - l(k, x)\big),$$

wo s eine neue Veränderliche bedeutet, und entwickelt dasselbe nach Potenzen von s, so erhält man eine rationale ganze Function $\Phi(s; k, x)$ von s, deren Coefficienten rationale ganze Functionen der Grössen $k_1^{(1)} \ldots k_n^{(1)} \ldots k_2^{(n!)} \ldots k_n^{(n!)}$; $x_1 \ldots x_n$ sind. Ist diese Function gegeben, so liefert die Auflösung der Gleichung $\Phi(s; k, x) = 0$ nach s sämmtliche Linearformen $l(k, x)$. Diese Auflösung, m. a. W. die Zerfällung der Function $\Phi(s; k, x)$ in ihre Linearfactoren, ist aber ohne Schwierigkeit auszuführen. In der That, setzt man $s = 0$ und sämmtliche Grössen k mit Ausnahme von $k_1^{(1)}$ gleich Null, so wird $\Phi(s; k, x)$ theilbar durch das Product sämmtlicher Grössen x, die mit dem Coefficienten $k_1^{(1)}$ in den Linearformen $l(k, x)$ behaftet sind. Ist x_α eine dieser Grössen x, und setzt man dann $s = k_1^{(1)} x_\alpha$ und sämmtliche Grössen k mit Ausnahme von $k_1^{(1)}$, $k_2^{(1)}$ gleich Null, so wird $\Phi(s; k, x)$ theilbar durch diejenigen Grössen x, welche mit dem Coefficienten $k_2^{(1)}$ in den mit $k_1^{(1)} x_\alpha$ beginnenden Linearformen behaftet sind. Ist wieder x_β eine dieser Grössen, so liefern jene x, durch die $\Phi(k_1^{(1)} x_1 + k_2^{(1)} x_2; k, x)$ theilbar wird, wenn sämmtliche k ausser $k_1^{(1)}$, $k_2^{(1)}$, $k_3^{(1)}$ gleich Null gesetzt werden, diejenigen Grössen, welche mit $k_3^{(1)}$ in den mit $k_1^{(1)} x_\alpha + k_2^{(1)} x_\beta$ beginnenden Linearformen behaftet sind, u. s. f. Mit der Function $\Phi(s; k, x)$ können daher auch die Linearformen $l(k, x)$ als gegeben betrachtet werden. Die Aufgabe, alle Linearformen $l(k, x)$ der Gruppen n. Grades zu bestimmen, ist damit auf die Aufgabe zurückgeführt:

„die Function $\Phi(s; k, x)$ zu bestimmen".

In der vorliegenden Abhandlung soll nun gezeigt werden, *dass die Function $\Phi(s; k, x)$ der grösste gemeinsame Theiler zweier rationalen ganzen Functionen von s ist, welche durch eine Reihe rationaler Operationen in allgemein — d. h. für jedes beliebige n giltiger Form darstellbar sind, wobei, was jedenfalls erlaubt ist, nur die symmetrische Gruppe als bekannt angesehen wird.* Damit ist *principiell* die Aufgabe der Bestimmung aller Linearformen der Gruppen n. Grades gelöst. Die *vollständige* Lösung der Aufgabe; d. i. nichts anderes als die allgemeine Lösung des Gruppenproblems, würde in der *expliciten Darstellung* der Function $\Phi(s; k, x)$ zu bestehen haben.

Zum Schlusse sei noch bemerkt, dass diese Untersuchungen in meinen Untersuchungen über den Zusammenhang in Reihen, bezw. über die analytische Behandlung der dabei in Betracht kommenden Fragen*) ihre Quelle haben. Die folgende Darstellung soll indessen so gehalten sein, dass sie auch ohne Kenntniss jener Untersuchungen verständlich ist.

---

§ 1.

Zur Erreichung des in der Einleitung bezeichneten Zieles bedarf es einiger vorbereitender Betrachtungen. Denn die substitutionentheoretische Bedingung für die Existenz einer Gruppe ist nicht ohne Weiteres analytisch durch Grössenbeziehungen darstellbar, und es bedarf daher eines Satzes, der die substitutionentheoretische Aufgabe der analytischen Behandlung (in einer der Erreichung des Zieles angemessenen Weise) zugänglich macht**). Um diesen Satz bequem aussprechen zu können, führen wir einige abkürzende Bezeichnungen ein.

Es sei durch $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$ ein System von n unbeschränkt veränderlichen Grössen bezeichnet, die, wie sogleich bemerkt werden soll, den Charakter von Hilfsgrössen haben, da sie aus der späteren Betrachtung herausfallen werden. Alsdann sei zur Abkürzung das Product

$$\varepsilon_1^1 \varepsilon_2^2 \ldots \varepsilon_n^n = \delta(\varepsilon)$$

gesetzt. Ferner seien durch $S_1, S_2 \ldots S_{n!}$ die Substitutionen der symmetrischen Gruppe n. Grades bezeichnet, und $\delta_\alpha(\varepsilon)$ $(\alpha = 1, 2 \ldots n!)$ stelle das durch Anwendung von S_α auf $\delta(\varepsilon)$ entstandene Product dar. Endlich sei

$$\sum_{\lambda=1}^{n!} C_\lambda \delta_\lambda(\varepsilon) = f(\varepsilon, C),$$

wobei unter $C_1, C_2 \ldots C_{n!}$ ein System unbestimmter Constanten verstanden werden soll, und $f_\alpha(\varepsilon, C)$ stelle wieder die durch Anwendung von S_α auf $f(\varepsilon, C)$ entstandene Function dar. Nennen wir nun ein System von ν Substitutionen $(S_{\alpha_1} S_{\alpha_2} \ldots S_{\alpha_\nu})$ ein Gruppenvielfaches ν^{ter} Ordnung, wenn eine Gruppe existirt, deren Ordnung ν_1 ein Theiler von ν ist, und die $\frac{\nu}{\nu_1}$ mal in dem System enthalten ist, so lässt sich der in Rede stehende Satz folgendermassen aussprechen:

---

*) Math. Ann. Bd. 42 u. fg.

**) Die allgemeine Methode findet man in meinen Abhandlungen „Grundlagen einer analytischen Behandlung der Gruppirungsaufgaben" Math. Ann. Bd. 50, und „Neue Grundlagen der Gruppen und Substitutionentheorie" ibid. Bd. 51.

Damit die Substitutionen $S_{\alpha_1} S_{\alpha_2} \dots S_{\alpha_\nu}$ ein Gruppenvielfaches ν. Ordnung bilden, ist nothwendig und hinreichend, dass für irgend ein Constantensystem (C) das System der $\nu + 1$ Gleichungen:

$$(1) \qquad \begin{cases} \sum_{\varkappa=1}^{\nu} \delta_{\alpha_\varkappa}(z) = f(z, C), \\ f(z, C) = f_{\alpha_\varkappa}(z, C), \quad (\varkappa = 1, 2 \dots \nu) \end{cases}$$

zwischen den Grössen $z_1 \dots z_n$ identisch besteht.

Beweis: Es seien $S_{\beta_1} S_{\beta_2} \dots S_{\beta_{\nu_1}}$ die verschiedenen unter den Substitutionen $S_{\alpha_1} \dots S_{\alpha_\nu}$. Bilden diese letzteren Substitutionen ein Gruppenvielfaches, so besteht das Gleichungssystem (1) identisch, wenn man $C_{\beta_1} = C_{\beta_2} = \dots = C_{\beta_{\nu_1}} = \frac{\nu}{\nu_1}$ und alle übrigen Coefficienten C gleich Null setzt. Es bleibt daher nur zu beweisen, dass auch umgekehrt, wenn das System der Gleichungen (1) für irgend ein Constantensystem (C) identisch besteht, die Substitutionen $S_{\alpha_1} \dots S_{\alpha_\nu}$ ein Gruppenvielfaches bilden. Nun folgt aus der Gleichung $f(z, C) = f_{\alpha_\varkappa}(z, C)$, dass $C_m = C_n$ ist, wenn $S_m = S_n S_{\alpha_\varkappa}^{\varrho}$ ist. Aus dem Bestehen aller Gleichungen $f(z, C) = f_{\alpha_\varkappa}(z, C)$, $(\varkappa = 1, 2 \dots \nu)$, folgt somit, dass $C_m = C_n$ ist, wenn S_m durch Multiplication von S_n mit irgend einem Product von Potenzen der Substitutionen $S_{\alpha_1} \dots S_{\alpha_\varkappa}$ entstanden gedacht werden kann. Verstehen wir nun unter $c_\alpha (\alpha = 1, 2 \dots n!)$ eine Zahl, die angiebt, wie oft die Substitution S_α unter den Substitutionen $S_{\alpha_1} \dots S_{\alpha_\varkappa}$ vorkommt, so ist $\sum_{\varkappa=1}^{\nu} \delta_{\alpha_\varkappa}(z) = f(z, c)$, und die erste der Gleichungen (1) kann daher auch in der Form geschrieben werden: $f(z, c) = f(z, C)$. Daraus folgt $c_\alpha = C_\alpha (\alpha = 1, 2 \dots n!)$. Mithin ist auch $c_m = c_n$, wenn S_m durch Multiplication von S_n mit einem Product von Potenzen der Substitutionen $S_{\alpha_1} \dots S_{\alpha_\nu}$ erhalten werden kann. Hieraus folgt, da für S_n jede der Substitutionen $S_{\beta_1} \dots S_{\beta_{\nu_1}}$ angenommen werden kann, dass jede Substitution der durch $S_{\beta_1} \dots S_{\beta_{\nu_1}}$ bestimmten Gruppe mindestens einmal unter den Substitutionen $S_{\alpha_1} \dots S_{\alpha_\nu}$ enthalten sein muss. Da aber diese Substitutionen sämmtlich gleich den Substitutionen $S_{\beta_1} \dots S_{\beta_{\nu_1}}$ sind, so müssen die Substitutionen $S_{\beta_1} \dots S_{\beta_{\nu_1}}$ selbst eine Gruppe bilden. Da endlich die Producte $S_{\beta_1} . S_{\beta_1}, S_{\beta_1} . S_{\beta_2}, \dots S_{\beta_1} . S_{\beta_{\nu_1}}$ somit wieder die Substitutionen $S_{\beta_1} \dots S_{\beta_{\nu_1}}$ in derselben oder veränderter Reihenfolge ergeben, so müssen sämmtliche Coefficienten $c_{\beta_\varkappa} (\varkappa = 1, 2 \dots \nu_1)$ gleich c_{β_1} sein. Jede der Substitutionen $S_{\beta_1} \dots S_{\beta_{\nu_1}}$ kommt also $c_{\beta_1} = \frac{\nu}{\nu_1}$ mal

in der Reihe der Substitutionen $S_{\alpha_1} \ldots S_{\alpha_\nu}$ vor. Damit ist der obige Satz bewiesen. —

Wir suchen nun das Gleichungssystem (1) durch ein anderes zu ersetzen, das ν den Substitutionen $S_{\alpha_1}, \ldots S_{\alpha_\nu}$ entsprechende unbekannte Grössenreihen enthält. Jede Substitution von n Elementen kann durch eine Permutation oder Grössenreihe angegeben werden, in die irgend eine Grössenreihe durch die Substitution übergeführt wird. Als eine solche Grössenreihe war in diesem Paragraphen die Reihe der Grössen $z_1 z_2 \ldots z_n$ zu Grunde gelegt. Wie bereits oben bemerkt, stellen diese Grössen nur Hilfsgrössen dar. Wir werden daher zunächst neben dieser Grössenreihe eine zweite Reihe unbeschränkt veränderlicher Grössen $x_1 x_2 \ldots x_n$ einführen, die später in den Betrachtungen allein übrig bleiben wird. Jedem Substitutionssystem $(S_{\alpha_1} \ldots S_{\alpha_\nu})$ von der im obigen Satze vorausgesetzten Beschaffenheit kann man dann ein System von ν Grössenreihen entsprechen lassen, die Permutationen von $x_1 x_2 \ldots x_n$ sind. Die Gesammtheit dieser Systeme von ν Grössenreihen ist nun algebraisch dadurch definirt, dass sie die einem gewissen Gleichungsystem genügenden Permutationssysteme sind. Die Ableitung dieses Gleichungssystems soll im nächsten Paragraphen gegeben werden. Dasselbe muss natürlich ν Systeme von Unbekannten

$$(y_1' \ldots y_n') \ldots (y_1^{(\nu)} \ldots y_n^{(\nu)})$$

enthalten, während die Grössen x als die bekannten Grössen in die Coefficienten desselben eingehen. Diese Grössen bilden also, zusammen mit andern später einzuführenden Constanten, den Rationalitätsbereich. Aus diesem Grunde wird im Folgenden auch zur Vereinfachung der Bezeichnungsweise von der Aufnahme dieser Grössen in die Bezeichnung der Functionen, in deren Coefficienten sie eingehen, abgesehen werden.

§ 2.

Wir verstehen unter $(y_1 \ldots y_n)$ ein System unbekannter Grössen, unter $g_1(y_1 \ldots y_n) \ldots g_n(y_1 \ldots y_n)$ die n elementar-symmetrischen Functionen von $y_1 \ldots y_n$ und unter $\mathfrak{g}_1 \ldots \mathfrak{g}_n$ die Werthe, in welche diese Functionen für $y_1 = x_1 \ldots y_n = x_n$ übergehen. Alsdann werden die Lösungssysteme des Systems der n Gleichungen

$$(2) \qquad \begin{cases} g_1(y_1 \ldots y_n) = \mathfrak{g}_1, \\ \vdots \\ g_n(y_1 \ldots y_n) = \mathfrak{g}_n \end{cases}$$

durch die der symmetrischen Gruppe n. Grades $(S_1 \ldots S_{n!})$ entsprechenden Permutationen von $x_1 x_2 \ldots x_n$ dargestellt.

Versteht man ferner unter $(\bar{y}_1 \ldots \bar{y}_n)$ ein beliebiges specielles Werthsystem von $(y_1 \ldots y_n)$, und denkt man sich alsdann $g_\alpha(y_1 \ldots y_n) - g_\alpha(\bar{y}_1 \ldots \bar{y}_n)$ nach Potenzen von $(y_1 - \bar{y}_1) \ldots (y_n - \bar{y}_n)$ entwickelt und als lineare homogene Function dieser Differenzen dargestellt, sodass

$$(3) \qquad g_\alpha(y_1 \ldots y_n) - g_\alpha(\bar{y}_1 \ldots \bar{y}_n) = (y_1 - \bar{y}_1) g_\alpha^{(1)}(y, \bar{y}) + \cdots + (y_n - \bar{y}_n) g_\alpha^{(n)}(y, \bar{y}) \qquad (\alpha = 1, 2 \ldots n)$$

wird, so sind die Coefficienten $g_\alpha^{(\beta)}(y, \bar{y})$ ganze Functionen von $y_1 \ldots y_n \bar{y}_1 \ldots \bar{y}_n$, die als bekannt vorausgesetzt werden dürfen. Dasselbe gilt daher von der Determinante

$$(4) \qquad D(y, \bar{y}) = \sum \pm g_1^{(1)}(y, \bar{y}) \ldots g_n^{(n)}(y, \bar{y}).$$

Setzen wir in dieser Determinante für $(\bar{y}_1 \ldots \bar{y}_n)$ die $n!$ Lösungssysteme des Gleichungssystems (2) ein, so erhalten wir $n!$ Functionen von $y_1 \ldots y_n$, deren Coefficienten dem Rationalitätsbereich $(x_1 x_2 \ldots x_n)$ angehören. Wir bezeichnen diese Functionen daher durch

$$(5) \qquad D(y)_{S_1}, \; D(y)_{S_2} \ldots D(y)_{S_{n!}}$$

indem wir unter $D(y)_{S_\alpha}$ die Function verstehen, welche durch Anwendung von S_α auf die in den Coefficienten von $D(y) = D(y, x)$ enthaltene Grössenreihe $x_1 x_2 \ldots x_n$ entsteht.

Setzen wir in den Functionen (5) auch für $(y_1 \ldots y_n)$ der Reihe nach die den Substitutionen $S_1 \ldots S_{n!}$ entsprechenden Permutationen von $x_1 x_2 \ldots x_n$ ein, so erhalten wir $n!$ dem Rationalitätsbereich $(x_1 \ldots x_n)$ angehörige Grössen:

$$(6) \qquad \Delta_{S_1}, \Delta_{S_2} \ldots \Delta_{S_{n!}}.$$

Es geht also Δ_{S_α} aus $D(y, y)$ hervor, wenn für $y_1 \ldots y_n$ die der Substitution S_α entsprechende Permutation gesetzt wird. Nun ist $D(y, y)$ die Functionaldeterminante von $g_1(y_1 \ldots y_n) \ldots g_n(y_1 \ldots y_n)$, woraus leicht

$$D(y, y) = (-1)^{\frac{n \cdot (n-1)}{2}} \sum \pm y_1^{n-1} y_2^{n-2} \ldots y_n^0$$

folgt. Folglich ist Δ_{S_α} die aus

$$(7) \qquad \Delta = D(x, x) = (-1)^{\frac{n \cdot (n-1)}{2}} \sum \pm x_1^{n-1} x_2^{n-2} \ldots x_n^0.$$

Durch Anwendung der Substitution S_α auf die Grössenreihe $x_1 x_2 \ldots x_n$ hervorgehende Grösse. Bezeichnet daher ε_α die zur Ausführung von S_α erforderliche Anzahl von Transpositionen, so folgt

$$(8) \qquad \Delta_{S_\alpha} = (-1)^{\varepsilon_\alpha} \Delta.$$

Alsdann stellt der Ausdruck

$$(9) \qquad \sum_{\alpha=1}^{n!} \mathfrak{F}_\alpha \frac{D(y)_{S_\alpha}}{\Delta_{S_\alpha}} = \frac{1}{\Delta} \sum_{\alpha=1}^{n!} (-1)^{\varepsilon_\alpha} \mathfrak{F}_\alpha D(y)_{S_\alpha}$$

eine ganze Function von $y_1 \ldots y_n$ dar, die für ein Lösungssystem des Gleichungssystems (2) den Werth $\mathfrak{F}_\alpha$ annimmt*), wenn dieses Lösungssystem der Substitution S_α entspricht.

Es sei jetzt $(y_1^{(\varkappa)} \ldots y_n^{(\varkappa)})$ ein Lösungssystem von (2), das der Substitution $S_{\alpha_\varkappa}$ $(\varkappa = 1, 2 \ldots \nu)$ eines Gruppenvielfachen $(S_{\alpha_1} \ldots S_{\alpha_\nu})$ entspricht. Setzen wir in (9) für $\mathfrak{F}_\alpha$ einmal $\delta_\alpha(z)$, dann $f_\alpha(z, C)$ ein, so wird:

$$\frac{1}{\Delta} \sum_{\alpha=1}^{n!} (-1)^{\varepsilon_\alpha} D(y^{(\varkappa)})_{S_\alpha} \delta_\alpha(z) = \delta_{\alpha_\varkappa}(z),$$

$$\frac{1}{\Delta} \sum_{\alpha=1}^{n!} (-1)^{\varepsilon_\alpha} D(y^{(\varkappa)})_{S_\alpha} f_\alpha(z, C) = f_{\alpha_\varkappa}(z, C)$$

wo

$$\delta_\alpha(z),\ f_\alpha(z, C) \quad (\alpha = 1 \ldots n!)$$

die in § 1 definirten Grössen sind. Das zur Definition des Gruppenvielfachen aufgestellte Gleichungssystem (1) geht daher über in

$$(10) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{n!} (-1)^{\varepsilon_\alpha} \delta_\alpha(z) \sum_{\varkappa=1}^{\nu} D(y^{(\varkappa)})_{S_\alpha} = \Delta f(z, C), \\ \Delta f(z, C) = \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{n!} (-1)^{\varepsilon_\alpha} D(y^{(\varkappa)})_{S_\alpha} . f_\alpha(z, C) \\ \qquad\qquad (\varkappa = 1, 2 \ldots \nu). \end{cases}$$

Damit diese Gleichungen als Identitäten zwischen den Grössen $z_1 \ldots z_n$ als den alleinigen Veränderlichen, wie es in dem Satze des § 1 verlangt wird, bestehen, ist nothwendig und hinreichend, dass die Coefficienten der Producte gleich hoher Potenzen von $z_1 \ldots z_n$ auf beiden Seiten übereinstimmen. Die erste der Gleichungen (10) liefert daher sofort das System der $n!$ Gleichungen:

$$(11) \qquad \Delta . C_\alpha = (-1)^{\varepsilon_\alpha} \sum_{\varkappa=1}^{\nu} D(y^{(\varkappa)})_{S_\alpha}$$

$$(\alpha = 1, 2 \ldots n!).$$

*) Kronecker „Ueber einige Interpolationsformeln für ganze Functionen mehrer Variabeln" Ges. Werke Bd. 1.

Um ebenso aus jeder der übrigen ν Gleichungen (10) ein System von $n!$ Gleichungen zu erhalten, haben wir den Coefficienten von $\delta_\alpha(z)$ in

$$\sum_{\gamma=1}^{n!} (-1)^{s_\gamma} D(y^{(\varkappa)})_{S_\gamma} f_\gamma(z, C) \tag{12}$$

zu bestimmen. Nun ist $f_\gamma(z, C)$ die aus

$$f(z, C) = \sum_{\beta=1}^{n!} C_\beta \delta_\beta(z)$$

durch Anwendung der Substitution S_γ auf die Grössenreihe $z_1 \dots z_n$ hervorgehende Function, und $\delta_\beta(z)$ das aus $\delta(z)$ durch Anwendung von S_β hervorgehende Product. Durch Anwendung von S_γ auf $\delta_\beta(z)$ geht daher $\delta_\beta(z)$ über in $\delta_\alpha(z)$, wenn $S_\beta S_\gamma = S_\alpha$, also $S_\gamma = S_\beta^{-1} S_\alpha$ ist. Da alsdann $(-1)^{s_\gamma} = (-1)^{s_\beta + s_\alpha}$ ist, so folgt, dass der Coefficient von $\delta_\alpha(z)$ in (12) durch den Ausdruck:

$$(-1)^{s_\alpha} \sum_{\beta=1}^{n!} (-1)^{s_\beta} D(y^{(\varkappa)})_{S_\beta^{-1} S_\alpha} \cdot C_\beta$$

dargestellt wird. Dieser Ausdruck muss somit gleich dem Coefficienten von $\delta_\alpha(z)$ in $f(z, C)$ sein, oder es muss

$$\Delta C_\alpha = (-1)^{s_\alpha} \sum_{\beta=1}^{n!} (-1)^{s_\beta} D(y^{(\varkappa)})_{S_\beta^{-1} S_\alpha} \cdot C_\beta \tag{13}$$

$$(\alpha = 1, 2 \dots n!, \ \varkappa = 1, 2 \dots \nu)$$

sein. Durch Elimination der Grössen C aus (11) und (13) ergiebt sich endlich das System der $n!\nu$ Gleichungen:

$$\Delta \cdot \sum_{i=1}^{\nu} D(y^{(i)})_{S_\alpha} = \sum_{\beta=1}^{n!} D(y^{(\varkappa)})_{S_\beta^{-1} S_\alpha} \sum_{i=1}^{\nu} D(y^{(i)})_S \tag{14}$$

$$(\alpha = 1, 2 \dots n! \ \ \varkappa = 1, 2 \dots \nu).$$

Besteht das System dieser Gleichungen, und denkt man sich alsdann die Grössen C aus (11) bestimmt, so besteht für diese Grössen auch das System der Gleichung (13). Daraus folgt, dass alsdann auch das System der Gleichungen (10) und mithin auch das der Gleichungen (1) besteht, sofern das Grössensystem $(y_1' \dots, y_n' \dots y_1^{(\nu)} \dots y_n^{(\nu)})$ aus Lösungssystemen von (2) zusammengesetzt ist. Das in dem Satze des § 4 enthaltene Criterium für die Existenz eines Gruppenvielfachen kann daher durch das folgende ersetzt werden:

Damit ν Substitutionen $S_{\alpha_1} \dots S_{\alpha_\nu}$, welche ν Lösungssystemen $(y'_1 \dots y'_n) \dots (y_1^{(\nu)} \dots y_n^{(\nu)})$ des Systems der Gleichungen (2) entsprechen, ein Gruppenvielfaches bilden, ist nothwendig und hinreichend, dass das Grössensystem $(y'_1 \dots y'_n \dots y_1^{(\nu)} \dots y_n^{(\nu)})$ die Gleichungen (14) befriedigt.

§ 3.

Wir bezeichnen jetzt die linken Seiten der auf Null gebrachten Gleichungen (14) als Functionen der ν unbekannten Grössensysteme $(y'_1 \dots y'_n) \dots (y_1^{(\nu)} \dots y_n^{(\nu)})$ kurz durch $F_{\alpha,\varkappa}(y', y'' \dots y^{(\nu)})$, sodass also

$$(15)\quad F_{\alpha,\varkappa}(y' \dots y^{(\nu)}) = \sum_{\beta=1}^{n!} D(y^{(k)})_{S_\beta^{-1} S_\alpha} \cdot \sum_{i=1}^{\nu} D(y^{(i)})_{S_\beta} - \Delta \sum_{i=1}^{\nu} D(y^{(i)})_{S_\alpha}$$
$$(\alpha = 1, 2 \dots n!,\ \varkappa = 1, 2 \dots \nu)$$

wird. Ferner erweitern wir den Rationalitätsbereich durch Aufnahme zweier Systeme unbestimmter Constanten, von denen das eine aus ν Reihen von je n Grössen

$$k_1^{(\beta)},\ k_2^{(\beta)} \dots k_n^{(\beta)}$$
$$(\beta = 1, 2 \dots \nu),$$

das andere aus $1 + n!\,\nu$ Grössen

$$u_0,\ u_1,\ \dots u_{n!\,\nu}$$

bestehen soll. Sodann setzen wir:

$$(16)\quad l(y' \dots y^{(\nu)}) = \sum_{\beta=1}^{\nu} (k_1^{(\beta)} y_1^{(\beta)} + k_2^{(\beta)} y_2^{(\beta)} + \dots + k_n^{(\beta)} y_n^{(\beta)})$$

und, indem wir unter z eine neue Veränderliche verstehen:

$$(17)\quad L(z, y' \dots y^{(\nu)})$$
$$= u_0 \left(z - l(y' \dots y^{(\nu)})\right) + \sum_{\alpha=1}^{n!} \sum_{\varkappa=1}^{\lambda} u_{(\varkappa-1)n!+\alpha} F_{\alpha,\varkappa}(y' \dots y^{(\nu)}).$$

Endlich setzen wir in $L(z, y' \dots y^{(\nu)})$ für jedes der ν Grössensysteme $(y'_1 \dots y'_n) \dots (y_1^{(\nu)} \dots y_n^{(\nu)})$ alle $n!$ Permutationen desselben Grössensystems $(y_1 \dots y_n)$ ein und bilden das Product aller so erhaltenen Ausdrücke. Dieses Product ist eine ganze Function von $z, y_1 \dots y_n$, die ausserdem symmetrisch in Beziehung auf $y_1 \dots y_n$ ist, sich also als rationale ganze Function von $g_1(y_1 \dots y_n) \dots g_n(y_1 \dots y_n)$ darstellen lässt. Wir bezeichnen diese Function daher durch $G^{(\nu)}\left(z, g(y)\right)$, sodass

$$(18)\quad G^{(\nu)}\left(z, g(y)\right) = \prod_{(y' \dots y^{(\nu)})} L(z, y' \dots y^{(\nu)})$$

ist. Die Coefficienten dieser Function sind rationale ganze Functionen der Grössen $x, \varkappa, u$, die den Rationalitätsbereich bilden. Da bei der Bildung der Functionen (15) und (18) nur die symmetrische Gruppe als bekannt vorausgesetzt wurde, so können diese Functionen als bekannt angesehen werden. Gleiches gilt daher auch von der Function:

$$G^{(\nu)}(z) = G^{(\nu)}\big(z, g(x)\big) \tag{19}$$

die sich ergiebt, wenn in $G\big(z, g(y)\big)$ $y_1 = x_1 \ldots y_n = x_n$ gesetzt wird. Diese Function verschwindet aber für $z = l(y' \ldots y^{(\nu)})$, wenn $(y_1' \ldots y_n' \ldots y_1^{(\nu)} \ldots y_n^{(\nu)})$ ein aus Lösungssystemen von (2) zusammengesetztes Lösungssystem des Gleichungssystems (14) ist. Ist umgekehrt $z = X(x, k)$ eine von den Grössen u unabhängige Wurzel der Gleichung

$$G^{(\nu)}(z) = 0, \tag{20}$$

so muss für ein gewisses aus Lösungssystemen von (2) zusammengesetztes Grössensystem $(y_1' \ldots y_n' \ldots y_1^{(\nu)} \ldots y_n^{(\nu)})$

$$L\big(X(x, \varkappa), y' \ldots y^{(\nu)}\big) = 0$$

werden. Für dieses Lösungssystem $(y_1' \ldots y_n' \ldots y_1^{(\nu)} \ldots y_n^{(\nu)}$ müssen daher die Coefficienten der Grössen u in (17) verschwinden, d. h. es müssen die Gleichungen $F_{\alpha,\varkappa}(y' \ldots y^{(\nu)}) = 0$ bestehen und es muss $X(x, \varkappa) = l(y' \ldots y^{(\nu)})$ sein. Die von den Grössen u unabhängigen Wurzeln der Gleichung (20) werden also von denjenigen Linearformen $l(y' \ldots y^{(\nu)})$ gebildet, für welche $(y_1' \ldots y_n' \ldots y_1^{(\nu)} \ldots y_n^{(\nu)})$ ein aus Lösungssystemen des Gleichungssystemes (2) zusammengesetztes Lösungssystem des Gleichungssystems (14) ist. *Entwickelt man daher die Function $G^{(\nu)}(z)$ nach Potenzen der Grössen u und bestimmt den grössten gemeinsamen Theiler $\Phi^{(\nu)}(z)$ der als Entwickelungscoefficienten auftretenden Functionen von z, so sind die Wurzeln der Gleichung $\Phi^{(\nu)}(z) = 0$ diejenigen Linearformen, welche Gruppenvielfachen ν^{ter} Ordnung entsprechen.*

§ 4.

Die im vorigen Paragraphen definirte Function $\Phi^{(\nu)}(z)$ war dort als grösster gemeinsamer Theiler eines Systems ganzer Functionen von z definirt, das sich durch Entwickelung von $G^{(\nu)}(z)$ nach Potenzen der Grössen u ergiebt. Diese Function $\Phi^{(\nu)}(z)$ ist aber zuf. § 3 auch ein Theiler der Function

$$H(z) = \prod_{(y' \cdots y^{(\nu)})} \big(z - l(y' \ldots y^{(\nu)})\big) \tag{21}$$

die sich ergiebt, wenn man sich in

$$\big(z - l(y' \ldots y^{(\nu)})\big)$$

für jedes der Grössensysteme $(y_1' \ldots y_n') \ldots (y_1^{(\nu)} \ldots y_n^{(\nu)})$ alle Permutationen von $x_1 x_2 \ldots x_n$ eingesetzt denkt und die so erhaltenen $n!\nu$ Ausdrücke mit einander multiplicirt. Die Coefficienten dieser Functionen sind symmetrische Functionen von $x_1 \ldots x_n$ und als bekannt anzusehen. Dieselben enthalten ferner die Grössen u nicht. Die Function $\Phi^{(\nu)}(z)$ ist daher, abgesehen von einem dem Rationalitätsbereich angehörigen Factor, nichts anderes als der grösste gemeinsame Theiler der beiden Functionen $G^{(\nu)}(z)$ und $H(z)$. Damit ist nunmehr die Aufgabe

alle Gruppenvielfachen ν. Ordnung zu bestimmen

auf die Aufgabe zurückgeführt

den grössten gemeinsamen Theiler zweier als bekannt anzusehenden Functionen von z: $G^{(\nu)}(z)$ und $H(z)$ zu bestimmen und in seine Linearfactoren zu zerlegen.

Dabei ist, wie in der Einleitung gezeigt wurde, die Zerlegung in Linearfactoren durch Substitution specieller Werthe für z und die Grössen k unmittelbar zu erhalten. Wird $\nu = n!$ angenommen, so muss die Zerlegung dieses grössten gemeinsamen Theilers alle Gruppen n. Grades liefern, da die Ordnung einer jeden derselben ein Theiler von $n!$ ist. Damit sind wir zu dem in der Einleitung bezeichneten Resultat gelangt, dessen Ableitung das Ziel dieser Abhandlung war. Denn es ist die Aufgabe:

alle Gruppen n. Grades zu bestimmen

auf die algebraische Aufgabe zurückgeführt:

den grössten gemeinsamen Theiler zweier als bekannt anzusehenden Functionen von z: $G^{(n!)}(z)$ und $H(z)$ zu bestimmen und in seine Linearfactoren zu zerlegen.

Burg b. Magdeburg den 12. Nov. 1898.

The Structure of the Linear Homogeneous Groups Defined by the Invariant $\lambda_1 \xi_1^r + \lambda_2 \xi_2^r + \cdots + \lambda_m \xi_m^r$.

By

LEONARD EUGENE DICKSON of Austin, Texas.

Introduction.

We study the largest linear homogeneous group in m variables which leaves absolutely invariant the function

$$\varphi_r \equiv \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \xi_i^r \qquad (\text{each } \lambda_i \neq 0).$$

For $r > 2$, there exists no continuous group leaving φ_r invariant; while for $r = 2$ the continuous group defined is the well known orthogonal group. For $r > 2$, every collineation leaving $\varphi_r = 0$ invariant merely interchanges the terms $\lambda_i \xi_i^r$.

The greater part of the investigation is concerned with linear substitutions whose coefficients are complexes in the Galois field*) of order p^n, including the special case of integers taken modulo p. The case $r = 2$ is not considered in the present paper, having been treated at length by the writer in earlier papers.**) Every m-ary quadratic form of determinant not zero in the $GF[p^n]$, $p > 2$, can be reduced by linear transformation to one of two distinct canonical forms,

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i^2, \qquad \sum_{i=1}^{m-1} \xi_i^2 + \nu \xi_m^2,$$

*) This field is denoted by the symbol $GF[p^n]$. We use the theory in the abstract form given by Moore in the paper, *A doubly infinite system of simple groups* (*Chicago Congress Mathematical Papers*).

**) *Determination of the structure of all linear homogeneous groups in a Galois field which are defined by a quadratic invariant* (*American Journal of Mathematics*, Vol. 21, pp. 193—256).

Systems of simple groups derived from the Orthogonal group (*Proceedings of the California Academy of Sciences*, Third series, Vol. 1, Nos. 4 and 5; *Bulletin of the American Math. Society*, Feb. and May, 1898.

where ν is a not-square in the $GF[p^n]$. The second form is reducible to the first only when m is odd. The first form defines the orthogonal group having for m odd the factors of composition 2, 2 und

$$\frac{1}{2}(p^{n(m-1)}-1)\,p^{n(m-2)}(p^{n(m-3)}-1)\,p^{n(m-4)}\ldots(p^{2n}-1)\,p^n,$$

the case $p^n=3$, $m=3$ being an exception; for m even, it has (for $m>4$) the factors of composition 2, 2, 2 and

$$\frac{1}{4}\left[p^{n(m-1)}-p^{n\left(\frac{m}{2}-1\right)}\varepsilon^{\frac{m}{2}}\right](p^{n(m-2)}-1)\,p^{n(m-3)}\ldots(p^{2n}-1)\,p^n,$$

where ε denotes ± 1 according as $p^n=4l\pm 1$. The second form defines a group which for m even and >2 has the factors of composition 2, 2 and

$$\frac{1}{2}\left[p^{n(m-1)}+p^{n\left(\frac{m}{2}-1\right)}\varepsilon^{\frac{m}{2}}\right](p^{n(m-2)}-1)\,p^{n(m-3)}\ldots(p^{2n}-1)\,p^n.$$

For $r>2$, we prove in the present paper that the structure of the groups defined by φ_r follows from the structure of the group in the $GF[p^{2s}]$ defined by the invariant $\sum_{i=1}^{m}\xi_i^{p^s+1}$. The decomposition of the latter group leads to the system of simple groups of order $\Omega_{m,p,s}$,

$$\frac{1}{d}[p^{sm}-(-1)^m]\,p^{s(m-1)}[p^{s(m-1)}-(-1)^{m-1}]\,p^{s(m-2)}\ldots[p^{2s}-1]\,p^s,$$

where d is the greatest common division of m and p^s+1. The only exceptions are $m=3$, $p^s=2$; $m=2$, $p^s=2$; $m=2$, $p^s=3$. For $m=2$, these simple groups were obtained by Moore (l. c.) as a generalization of the modular group. For $m>2$, the lowest orders of the new simple groups are as follows:

$$\Omega_{3,3,1}=6048,\quad \Omega_{4,2,1}=25920,\quad \Omega_{3,2,2}=62400,\quad \Omega_{3,5,1}=126000,$$
$$\Omega_{4,3,1}=3{,}265{,}920.$$

Our investigation has direct contact with the paper by Moore (*Annalen*, Band 50) on the universal invariant $\sum_{i=1}^{m}x_i\bar{x}_i$ of finite groups of linear substitutions. Indeed, if ξ belongs to the $GF[p^{2s}]$, ξ and ξ^{p^s} are conjugates with respect to the $GF[p^s]$, so that the above invariant may be written $\sum_{i=1}^{m}\xi_i\bar{\xi}_i$.

§ 1.

In order that the linear substitution

$$S: \quad \xi_i' = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\, \xi_j \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

shall leave φ_r absolutely invariant, the following conditions upon its coefficients must be satisfied:

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \alpha_{ij}^{r} = \lambda_j \qquad (j = 1, \ldots, m),$$

$$(2) \qquad \frac{r!}{r_1!\, r_2! \ldots r_s!} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \alpha_{ij_1}^{r_1} \alpha_{ij_2}^{r_2} \cdots \alpha_{ij_s}^{r_s} = 0$$

holding for every partition of r into $s > 1$ integral parts,

$$r \equiv r_1 + r_2 + \cdots + r_s,$$

while for each partition, $j_1, j_2, \ldots, j_s$ may take every combination of s distinct integers chosen from $1, 2, \ldots, m$. If working in the $GF[p^n]$, we may and do take $r < p^n$. The conditions for the invariance of φ_r are then (1) and (2).

Except for linear substitutions in the $GF[p^n]$, in which p is divisor of r, the inverse of S has the form,

$$S^{-1}: \quad \xi_k' = \frac{1}{\lambda_k} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, \alpha_{ik}^{r-1}\, \xi_i \qquad (k = 1, \ldots, m).$$

Indeed, the product SS^{-1} replaces ξ_k by

$$\frac{1}{\lambda_k} \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \alpha_{ik}^{r-1} \alpha_{ij} \right) \xi_j \equiv \xi_k,$$

by applying (1) and (2) for $r_1 = r - 1$, $r_2 = 1$.

If $r = p^{\varrho} r_1$, we have in the $GF[p^n]$ the identity

$$\varphi_r \equiv \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, \xi_i^{r} = \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i'\, \xi_i^{r_1} \right)^{p^{\varrho}},$$

where $\lambda_i' \equiv \lambda_i^{p^{n-\varrho}}$. Hence a substitution leaving φ_r invariant will at most multiply the function

$$\varphi_{r_1}' \equiv \sum_{i=1}^{m} \lambda_i'\, \xi_i^{r_1}$$

by a factor η which satisfies the equations

$$\eta^{p^{\varrho}} = 1, \quad \eta^{p^n - 1} = 1,$$

from which $\eta = 1$. *Hence in determining the totality of groups in every $GF[p^n]$ defined by invariants φ_r, we may assume that r is prime to p.*

§ 2.

Consider for $r > 2$ the following equations of the form (2), in which j_1, j_2 denote two arbitrarily fixed distinct integers $\leqq m$:

$$r \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i \alpha_{ij_1}^{r-2} \alpha_{ij_2}) \alpha_{ij_1} = 0,$$

$$\tfrac{1}{2} r(r-1) \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i \alpha_{ij_1}^{r-2} \alpha_{ij_2}) \alpha_{ij_2} = 0,$$

$$r(r-1) \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i \alpha_{ij_1}^{r-2} \alpha_{ij_2}) \alpha_{ij_3} = 0 \qquad (j_3 = 1, \ldots, m; j_3 \neq j_1, j_2).$$

For the case $m = 2$, we have only the first two equations; the case $m = 1$ is trivial. For continuous groups, groups of collineations, or groups in any $GF[p^n]$ for which p is not a divisor of $r(r-1)$, we may drop the numerical factors from the above m equations. But

$$|\alpha_{ij}| \neq 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, m)$$

being the determinant of S. Hence we have

$$\lambda_i \alpha_{ij_1}^{r-2} \alpha_{ij_2} = 0 \qquad (i, j_1, j_2 = 1, \ldots, m; j_1 \neq j_2).$$

Hence only one element of each row of the matrix for S is not zero. The determinant of S being not zero, the non-vanishing coefficients lie in different colums as well as in different rows. We have in particular the result:

Theorem. *For $r > 2$, there exists no continuous group leaving φ_r invariant. Every collineation leaving the equation $\varphi_r = 0$ $(r > 2)$ invariant has the form*

$$\rho \xi_i' = \alpha_{ia_i} \xi_{a_i} \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

where $a_1, a_2, \ldots, a_m$ form a permutation of $1, 2, \ldots, m$.

§ 3.

For linear substitutions in the $GF[p^n]$ leaving φ_r invariant, there remains the case in which $r(r-1)$ is divisible by p. Suppose therefore that

$$r - 1 = gp^s \qquad (s \geqq 1)$$

where g is not divisible by p. We treat first the case $g \neq 1$. Consider the following m equations of the form (2):

$$\frac{(gp^s+1)!}{[(g-1)p^s]!\,p^s!\,1!}\sum_{i=1}^{m}\left(\lambda_i\alpha_{ij_1}^{(g-1)p^s}\alpha_{ij_2}^{p^s}\right)\alpha_{ij_3}=0,$$

$$(j_3=1,\ldots,m;\ j_3\neq j_1,j_2),$$

$$\frac{(gp^s+1)!}{[(g-1)p^s+1]!\,p^s!}\sum_{i=1}^{m}\left(\lambda_i\alpha_{ij_1}^{(g-1)p^s}\alpha_{ij_2}^{p^s}\right)\alpha_{ij_1}=0,$$

$$\frac{(gp^s+1)!}{[(g-1)p^s]!\,(p^s+1)!}\sum_{i=1}^{m}\left(\lambda_i\alpha_{ij_1}^{(g-1)p^s}\alpha_{ij_2}^{p^s}\right)\alpha_{ij_2}=0,$$

only the latter two occurring if $m=2$. We may verify that the numerical factors are not divisible by the prime number p. This result, however, follows by inspection if we apply a general theorem on the residue of a multinomial coefficient module p given in the writer's Inaugural Dissertation*). Then, since the determinant $|\alpha_{ij}|\neq 0$, we have

$$\lambda_i\alpha_{ij_1}^{(g-1)p^s}\alpha_{ij_2}^{p^s}=0 \qquad (i,j_1,j_2=1,\ldots,m;\ j_1\neq j_2).$$

Theorem. *If $r>2$ be not divisible by p and is not of the form p^s+1, every linear substitution S in the $GF[p^n]$ leaving φ_r invariant is the product of a literal substitution L on the letters $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_m$ by a linear substitution of the form*

$$T: \qquad \xi_i'=\alpha_{ii}\xi_i \qquad (i=1,\ldots,m),$$

where by (1)

$$\alpha_{ii}^r=1.$$

If $r\neq p^s+1$, the structure of the largest linear group leaving φ_r $(r>2)$ invariant is now evident. Indeed, it has as an invariant sub-group the commutative group of the substitutions T, the quotient group being the symmetric group on m letters.

§ 4.

We consider next the case $r=p^s+1$. The general substitution S transforms φ_r into

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\left(\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}\xi_j\right)^{p^s+1}=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\left(\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}^{p^s}\xi_j^{p^s}\right)\left(\sum_{k=1}^{m}a_{ik}\xi_k\right).$$

The conditions that this sum be identical with φ_r are

---

*) *The analytic representation of substitutions on a power of a prime number of letters with a discussion of the linear group* (*Annals of Mathematics*, 1897). See § 14, p. 75.

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \alpha_{ij}^{p^s+1} = \lambda_j \qquad (j=1,\ldots,m),$$

$$(2') \qquad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \alpha_{ij}^{p^s} \alpha_{ik} = 0 \qquad (j,k=1,\ldots,m; j \neq k).$$

By § 1, the inverse of S has the form

$$S^{-1}: \quad \xi_i' = \sum_{j=1}^{m} \frac{\lambda_j}{\lambda_i} \alpha_{ji}^{p^s} \xi_j \qquad (i=1,\ldots,m).$$

By the same rule, the inverse of the latter substitution is

$$\xi_i' = \sum_{j=1}^{m} \frac{\lambda_j}{\lambda_i} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j} \alpha_{ij}^{p^s} \right)^{p^s} \xi_j \qquad (i=1,\ldots,m).$$

Hence this substitution must be identical with S. Hence

$$(3) \qquad \left(\frac{\lambda_i}{\lambda}\right)^{p^s-1} \alpha_{ij}^{p^{2s}} = \alpha_{ij} \qquad (i,j=1,\ldots,m),$$

The determinant of S^{-1} is

$$\left| \frac{\lambda_j}{\lambda_i} \alpha_{ji}^{p^s} \right| \equiv \left| \alpha_{ji}^{p^s} \right| = \left| \alpha_{ji} \right|^{p^s} \qquad (i,j=1,\ldots m).$$

Hence, since the product $SS^{-1} = 1$ has the determinant unity, we have

$$(4) \qquad |\alpha_{ij}|^{p^s+1} = 1.$$

From the form of the reciprocal S^{-1}, it follows that

$$(5) \qquad \frac{\lambda_j}{\lambda_i} \alpha_{ji}^{p^s} = \frac{A_{ji}}{D} \qquad (i,j=1,\ldots,m)$$

where A_{ji} denotes the adjoint of α_{ji} in the determinant

$$D \equiv |\alpha_{ij}| \qquad (i,j=1,\ldots,m).$$

The value of n, defining the $GF[p^n]$ to which the coefficients of our substitution S and the quantities λ_i were assumed to belong, has played no part in the above formulae. We proceed to prove that our problem can be reduced to a series of similar ones in which $n = 2s$. Consider the $GF[p^{2ns}]$, which includes the $GF[p^n]$ and the $GF[p^{2s}]$. Raising (3) to the power $\frac{p^{2ns}-1}{p^{2s}-1}$, we have

$$\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^{\frac{p^{2ns}-1}{p^s+1}} = 1,$$

if $\alpha_{ij} \neq 0$. Hence $\frac{\lambda_i}{\lambda_j}$ would be the p^s+1 power of some quantity μ in the $GF[p^{2ns}]$. The substitution T_j

$$\xi_k' = \xi_k \quad (k=1,\ldots,m;\ k \neq j), \qquad \xi_j' = \mu \xi_j$$

transforms φ_r into

$$\sum_{k\neq j}^{k=1\cdots m} \lambda_k \xi_k^{p^s+1} + \lambda_j (\mu \xi_j)^{p^s+1} \equiv \sum_{k=1}^{m} \lambda_k' \xi_k^{p^s+1}$$

in which the coefficients λ_i' and λ_j' are equal. Evidently T_j transforms S into the substitution

$$\begin{cases} \xi_l' = \sum_{k\neq j}^{k=1\cdots m} \alpha_{lk} \xi_k + \frac{1}{\mu} \alpha_{lj} \xi_j & (l = 1, \ldots, m;\ l \neq j) \\ \xi_j' = \mu \sum_{k\neq j}^{k=1\cdots m} \alpha_{jk} \xi_k + \alpha_{jj} \xi_k \end{cases}$$

whose coefficients belong to the $GF[p^{2ns}]$ and satisfy relations similar to (3).

Suppose that the coefficients $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \ldots, \alpha_{1m_1}$ do not vanish while $\alpha_{1j} = 0$ for $j > m_1$, in all of the substitutions leaving φ_r invariant. Then the group is isomorphic to a group of substitutions in the $GF[p^{2ns}]$ leaving invariant

$$\varphi_r' = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k' \xi_k^{p^s+1} \qquad (\lambda_1' = \lambda_2' = \cdots = \lambda_{m_1}').$$

In the latter substitutions the coefficients α_{1j} $(j > m_1)$ are all zero. If, among the coefficients α_{2j} $(j > m_1)$, any one as $\alpha_{2j_1} \neq 0$, we transform the invariant φ_r' by T_{j_1}, giving the function

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k'' \xi_k^{p^s+1} \qquad (\lambda_1'' = \lambda_2'' = \cdots = \lambda_{m_1}'' = \lambda_{j_1}'').$$

But this function is invariant under the transposition $(\xi_1 \xi_{j_1})$ and hence φ_r must have been invariant under a substitution in which $\alpha_{1j_1} \neq 0$. It follows that

$$\alpha_{ij} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m_1;\ j = m_1 + 1, \ldots, m)$$

in every substitution leaving φ_r invariant. Considering the form of its reciprocal, we have

$$\alpha_{ji} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m_1;\ j = m_1 + 1, \ldots, m).$$

Hence every substitution leaving φ_r invariant is the product of two commutative substitutions, the one affecting the indices $\xi_1, \ldots, \xi_{m_1}$ only and leaving invariant

$$\xi_1^{p^s+1} + \cdots + \xi_{m_1}^{p^s+1}$$

and the other affecting only $\xi_{m_1+1}, \ldots, \xi_m$ and leaving invariant

$$\sum_{i=m_1+1}^{m} \lambda_i' \xi_i^{p^s+1}.$$

Proceeding with the latter substitutions in the same manner, it follows that the structure of the group in the $GF[p^n]$ leaving φ_r invariant results immediately from the structures of certain groups in the $GF[p^{2ns}]$ which leave invariant functions of the form $\sum_{i=1}^{m} \xi_i^{p^s+1}$. But the relations (3) for substitutions of the latter groups take the form

$$\alpha_{ij}^{p^{2s}} = \alpha_{ij} \qquad (i, j = 1, \ldots, m).$$

Hence there is no limitation imposed in assuming that the field to which the substitutions belong is the $GF[p^{2s}]$.

§ 5.

Denote by $G_{m,p,s}$ the largest group of linear homogeneous m-ary substitutions in the $GF[p^{2s}]$ which leave invariant

$$\xi_1^{p^s+1} + \xi_2^{p^s+1} + \cdots + \xi_m^{p^s+1}.$$

For $m = 2$, we have by (1) and (5), when $\lambda_1 = \lambda_2$,

$$\alpha_{22} = D\alpha_{11}^{p^s}, \quad \alpha_{21} = -D\alpha_{12}^{p^s}, \quad \alpha_{11}^{p^s+1} + \alpha_{12}^{p^s+1} = 1.$$

Inversely, every substitution satisfying these relations is seen to leave $\xi_1^{p^s+1} + \xi_2^{p^s+1}$ absolutely invariant. Every such substitution is the product of a substitution

$$(6) \qquad \begin{cases} \xi_1' = \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 \\ \xi_2' = -\alpha_{12}^{p^s}\xi_1 + \alpha_{11}^{p^s}\xi_2 \end{cases} \qquad \left(\alpha_{11}^{p^s+1} + \alpha_{12}^{p^s+1} = 1\right)$$

by one of the $p^s + 1$ distinct substitutions

$$\xi_1' = \xi_1, \quad \xi_2' = D\xi_2 \qquad (D^{p^s+1} = 1).$$

The number of distinct substitutions (6) is $(p^{2s} - 1)p^s$. Indeed, for the $p^s + 1$ values of α_{12} for which $\alpha_{12}^{p^s+1} = 1$, we must have $\alpha_{11} = 0$; while for each of the remaining $(p^{2s} - p^s - 1)$ values of α_{12} in the $GF[p^{2s}]$, there exist $p^s + 1$ solutions in the field of

$$\alpha_{11}^{p^s+1} = 1 - \alpha_{12}^{p^s+1};$$

for the second member belongs to the $GF[p^s]$ and is therefore the $p^s + 1$ power of some mark in the $GF[p^{2s}]$. But

$$(p^s + 1) + (p^s + 1)(p^{2s} - p^s - 1) = (p^s + 1)(p^s - 1)p^s.$$

The group of the substitutions (6) has an invariant sub-group of order 1 or 2, according as $p = 2$ or $p > 2$, and generated by the substitution

$$C_1C_2: \qquad \xi_1' = -\xi_1, \quad \xi_2' = -\xi_2.$$

The quotient group (obtained concretely by taking the substitutions (6)

fractionally) is readily seen to be conjugate with the 'imaginary' form*) of the group of linear fractional substitutions of determinant unity in the $GF[p^s]$. Except in the cases $p^s = 2$ and 3, it has been proven simple by Moore (l. c.) and, following Jordan's method for $s = 1$, by the writer in his Dissertation (l. c.).

For m general, let S be an arbitrary substitution of $G_{m,p,s}$,

$$S: \qquad \xi_i' = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\, \xi_j \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

By § 4, its inverse is obtained qy replacing α_{ij} by $\alpha_{ji}^{p^s}$. Hence the relations (1) and (2'), for $\lambda_i = 1$, when written for the inverse S^{-1}, give the equivalent set of conditions for the invariance of $\sum_{i=1}^{m} \xi_i^{p^s+1}$:

$$(7) \qquad \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ji}^{p^s+1} = 1 \qquad (j = 1, \ldots, m),$$

$$(8) \qquad \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ji}\, \alpha_{ki}^{p^s} = 0 \qquad (j, k = 1, \ldots, m;\ j \neq k).$$

By § 6 the number of distinct linear functions

$$f_1 \equiv \sum_{j=1}^{m} \alpha_{1j}\, \xi_j$$

by which the substitutions of $G_{m,p,s}$ can replace ξ_1 is the number $\mathsf{P}_{m,p,s}$ of distinct sets of solutions in the $GF[p^{2s}]$ of the equation

$$(7_1) \qquad \sum_{j=1}^{m} \alpha_{1j}^{p^s+1} = 1.$$

Let T be a substitution of the group which replaces ξ_1 by a definite function f_1. Then, if $\Sigma, \Sigma', \ldots$ denote all of the $Q_{m,p,s}$ substitutions of the group which leave ξ_1 fixed, the products $T\Sigma, T\Sigma', \ldots$ and no other substitutions of the group will replace ξ_1 by f_1. Hence the order $\Omega_{m,p,s}$ of the group $G_{m,p,s}$ is

$$\Omega_{m,p,s} \equiv Q_{m,p,s}\, \mathsf{P}_{m,p,s}.$$

But the substitutions $\Sigma, \Sigma', \ldots$, have

$$\alpha_{11} = 1, \quad \alpha_{1i} = 0 \qquad (i = 2, \ldots, m).$$

Hence by (8), for $j = 1$, we have

$$\alpha_{k1}^{p^s} = 0 \qquad (k = 2, \ldots, m).$$

Hence $\Sigma, \Sigma', \ldots$ are substitutions of the group $G_{m-1,p,s}$ on the indices $\xi_2, \ldots, \xi_m$, so that $Q_{m,p,s} \equiv \Omega_{m-1,p,s}$. Hence, since

*) Moore, *A doubly infinite system of simple groups* (*Chicago Congress Mathematical Papers*, pp. 208–242). See § 6, p. 230.

$$\Omega_{1,p,s} = p^s + 1 = \mathsf{P}_{1,p,s}$$

is the number of substitutions affecting one index only, we have

$$\Omega_{m,p,s} = \mathsf{P}_{m,p,s}\,\mathsf{P}_{m-1,p,s}\ldots\mathsf{P}_{1,p,s}.$$

To evaluate $\mathsf{P}_{n,p,s}$, the number of sets of solutions of

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_i^{p^s+1} = 1,$$

we note that, for the $\mathsf{P}_{n-1,p,s}$ sets of values of $\eta_2, \ldots, \eta_n$ which make $\sum_{i=2}^{n} \eta_i^{p^s+1} = 1$, the corresponding value of η_1, is zero; while, for each of the $2^{2s(n-1)} - \mathsf{P}_{n-1,p,s}$ sets of values in the $GF[p^{2s}]$ for which that sum $\neq 1$, there exist $p^s + 1$ values in the $GF[p^{2s}]$ for η_1. Indeed,

$$1 - \sum_{i=2}^{n} \eta_i^{p^s+1}$$

belongs to the $GF[p^s]$ and is therefore a $(p^s+1)^{st}$ power in the $GF[p^{2s}]$. Hence we have

$$\mathsf{P}_{n,p,s} = \mathsf{P}_{n-1,p,s} + (p^s+1)\,(p^{2s(n-1)} - \mathsf{P}_{n-1,p,s}).$$

Since $\mathsf{P}_{1,p,s} = p^s + 1$, we find by mathematical induction that

$$\mathsf{P}_{n,p,s} = p^{s(2n-1)} - (-1)^n p^{s(n-1)}.$$

For another proof of this result, we consider the case $p > 2$. Then if ν be a not square in the $GF[p^s]$, the $GF[p^{2s}]$ may be defined by means of the irreducible equation

$$I^2 = \nu \qquad (I^{p^s} = -I).$$

Setting

$$\eta_i \equiv \alpha_i + \beta_i I \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

we have

$$\eta_i^{p^s} \equiv \alpha_i - \beta_i I.$$

Hence

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_i^{p^s+1} \equiv \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i^2 - \nu\beta_i^2) = 1.$$

This quadratic equation has in the $GF[p^s]$

$$p^{s(2n-1)} - (-1)^n p^{s(n-1)}$$

sets of solutions $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$.*)

We have therefore for the order of $G_{m,p,s}$ the result,

$$\Omega_{m,p,s} \equiv \left(p^{sm} - (-1)^m\right) p^{s(m-1)} \left(p^{s(m-1)} - (-1)^{m-1}\right) p^{s(m-2)} \ldots$$
$$\ldots (p^{2s} - 1)\, p^s\, (p^s + 1).$$

*) Dickson, *Orthogonal group in a Galois field* (*Bulletin of the American Mathematical Society*, February, 1898), p. 197.

§ 6.

Theorem. *If* $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1m}$ *be any system of solutions in the* $GF[p^{se}]$ *of the equation* (7_1), *there exists a substitution* S *in the group* $G_{m,p,s}$ *which replaces* ξ_1 *by*

$$f_1 \equiv \sum_{j=1}^{m} a_{1j}\xi_j$$

and which is generated by the following substitutions [*in which only the indices altered are written*]:

$$T_{i,\tau}: \quad \xi_i' = \tau\xi_i \qquad (\tau^{p^s+1} = 1),$$

$$O_{i,j}^{\alpha,\beta}: \quad \begin{cases} \xi_i' = \alpha\xi_i + \beta\xi_j \\ \xi_j' = -\beta^{p^s}\xi_i + \alpha^{p^s}\xi_j \end{cases} \qquad (\alpha^{p^s+1} + \beta^{p^s+1} = 1),$$

an additional generator being necessary if $p^s = 2$, $m \geqq 3$, *viz.*,

$$W: \quad \begin{cases} \xi_1' = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \\ \xi_2' = \xi_1 + I\xi_2 + I^2\xi_3 \\ \xi_3' = \xi_1 + I^2\xi_2 + I\xi_3 \end{cases} \quad [I^2 \equiv I+1 \pmod 2].$$

If $m = 1$, we may take $S = T_{1,\alpha_{11}}$. If $m = 2$, we take

$$S = O_{1,2}^{\alpha_{11},\alpha_{12}}.$$

If $m > 2$, we prove the proposition by induction. Suppose first that the $\alpha_{1i}^{p^s+1}$ $(i = 1, \ldots, m)$ are not all unity, for example,

$$1 - \alpha_{12}^{p^s+1} \neq 0.$$

The left member belongs to the $GF[p^s]$, since it equals its p^s power. Hence we may write

$$\alpha_{12}^{p^s+1} + \mu^{p^s+1} = 1, \tag{9}$$

μ being a mark $\neq 0$ in the $GF[p^{2s}]$. The group therefore contains a substitution of the form $O_{1,2}^{\mu,\alpha_{12}}$. By (7_1) and (9), we have

$$\left(\frac{\alpha_{11}}{\mu}\right)^{p^s+1} + \left(\frac{\alpha_{12}}{\mu}\right)^{p^s+1} + \cdots + \left(\frac{\alpha_{1m}}{\mu}\right)^{p^s+1} = 1.$$

Assuming our theorem to be true for $m - 1$ indices, the group contains a substitution S' replacing ξ_1 by

$$\frac{\alpha_{11}}{\mu}\xi_1 + \frac{\alpha_{12}}{\mu}\xi_2 + \cdots + \frac{\alpha_{1m}}{\mu}\xi_m.$$

Hence the product $S \equiv S' O_{1,2}^{\mu,\alpha_{12}}$ will replace ξ_1 by f_1.

Suppose on the contrary that

$$\alpha_{1i}^{p^s+1} = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

If the group contains a substitution S_1 replacing ξ_1 by $\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_m$ the product

$$S \equiv T_{1,\alpha_{11}} T_{2,\alpha_{22}} \cdots T_{m,\alpha_{1m}} S_1$$

will replace ξ_1 by $f_1 \equiv \sum_{j=1}^{m} \alpha_{1j}\xi_j$. We may therefore limit our discussion to the case $\alpha_{1i}=1\,(i=1,\ldots,m)$. But the group will contain a substitution of the form S_1 if it contains $S_2 \equiv O_{1,2}^{\alpha,\beta} S_1$, which replaces ξ_1 by

$$(\alpha-\beta^{p^s})\xi_1+(\beta+\alpha^{p^s})\xi_2+\xi_3+\cdots+\xi_m.$$

If $p \neq 2$, we can take $\alpha=\beta^{p^s}$, since the condition

$$\alpha^{p^s+1}+\beta^{p^s+1} \equiv 2\beta^{p^s+1}=1$$

can be satisfied by a mark β in the $GF[p^{2s}]$. In this case, $S_2(\xi_1\xi_2)$ replaces ξ_2 by the function

$$2\beta\xi_2+\xi_3+\cdots+\xi_m,$$

and therefore belongs to the group by our assumption on $m-1$ indices. If $p=2$, $s>1$, we can choose α and β among the sets of solutions in the $GF[p^{2s}]$ of

$$\alpha^{p^s+1}+\beta^{p^s+1}=1 \tag{10}$$

in such a manner that

$$(\alpha-\beta^{p^s})^{p^s+1} \equiv \alpha^{p^s+1}+\beta^{p^s+1}-\alpha\beta-\alpha^{p^s}\beta^{p^s} \neq 1.$$

Indeed, the condition is (since $p=2$),

$$\alpha^{p^s}\beta^{p^s} \neq \alpha\beta.$$

Since $p^s>2$, we may take for α a mark neither zero nor unity in the $GF[p^s]$ and then determine a solution β of (10) such that $\beta \neq \beta^{p^s}$. Then will $\alpha^{p^s}\beta^{p^s} \neq \alpha\beta$. To prove that such a choice for β is possible, we note first that

$$\alpha^{p^s}=\alpha, \quad \alpha^2 \neq \alpha; \quad \text{hence} \quad \alpha^{p^s+1} \neq 1, \quad \beta \neq 0.$$

Further, if α', β' be one set of solutions of (10), then is also $\alpha', \tau\beta'$, where τ is any root of

$$\tau^{p^s+1}=1.$$

Not every root τ belongs to the $GF[p^s]$, and therefore not every solution β corresponding to a given α belongs to the $GF[p^s]$. Hence, if $p=2$, $p^s>2$, we may suppose that in the substitution S_2 the coefficient α_{11} is such that $\alpha_{11}^{p^s+1} \neq 1$, when the proposition follows as above.

For $p^s=2$, an additional generator W, for example, is necessary since the only substitutions of the form $O_{1,2}^{\alpha,\beta}$ are the products

$$T_{1,\varrho}T_{2,\varrho^{-1}} \quad \text{and} \quad (\xi_1\xi_2)T_{1,\varrho}T_{2,\varrho^{-1}} \qquad (\varrho^3=1).$$

Indeed, there exists in the $GF[2^2]$ only six sets of solutions of

$$\alpha^3 + \beta^3 = 1,$$

viz, $\alpha = \rho$, $\beta = 0$ and $\alpha = 0$, $\beta = \rho$, where $\rho^3 = 1$. Hence the substitutions $T_{i,\tau}$ and $O_{i,j}^{\alpha,\beta}$ can not combine to give a substitution replacing ξ_1 by $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$, for example. It follows readily that the additional generator W is sufficient, together with the substitutions T and O, to generate the group $G_{m,2,1}$.

§ 7.

Lemma. *If a substitution S of the group $G_{m,p,s}$ be commutative with $O_{r,t}^{\alpha,\beta}$, for certain values of α, then the following coefficients of S must be zero,*

$$\alpha_{rj},\ \alpha_{tj},\ \alpha_{jr},\ \alpha_{jt} \qquad (j=1,\ldots,m;\ j\neq r,t).$$

Among the conditions for the identity $SO_{r,t}^{\alpha,\beta} = O_{r,t}^{\alpha,\beta}S$ occur

$$\begin{cases} (\alpha-1)\alpha_{rj} + \beta\alpha_{tj} = 0, \\ -\beta^{p^s}\alpha_{rj} + (\alpha^{p^s}-1)\alpha_{tj} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} (\alpha-1)\alpha_{jr} - \beta^{p^s}\alpha_{jt} = 0, \\ \beta\alpha_{jr} + (\alpha^{p^s}-1)\alpha_{jt} = 0 \end{cases}$$

$$(j=1,\ldots,m;\ j\neq r,t).$$

Hence the theorem follows if the determinant

$$(\alpha-1)(\alpha^{p^s}-1) + \beta^{p^s+1} \equiv 2 - \alpha - \alpha^{p^s} \neq 0.$$

The equation $2 - \alpha - \alpha^{p^s} = 0$ has p^s solutions in the $GF[p^{2s}]$; indeed,

$$\alpha^{p^{2s}} = (2-\alpha)^{p^s} = 2 - \alpha^{p^s} = 2 - (2-\alpha) = \alpha.$$

But for α arbitrary there exists a mark β in the $GF[p^{2s}]$ such that

$$\alpha^{p^s+1} + \beta^{p^s+1} = 1.$$

Hence there are sets of solutions α, β for which the above determinant does not vanish.

Note. Another statement of our result is that S breaks up into the product of a substitution affecting only ξ_r and ξ_t by a substitution affecting only ξ_j $(j=1,\ldots,m;\ j\neq r,t)$.

§ 8.

We proceed to determine the structure of the group $G_{m,p,s}$ of order $\Omega_{m,p,s}$. For $m=1$, the group is a commutative (cyclic) group of order p^s+1. For $m=2$, its structure was determined in § 5.

The substitutions of $G_{m,p,s}$ of determinant $D=1$ form an invariant sub-group $H_{m,p,s}$ of order $\Omega_{m,p,s}/(p^s+1)$. Indeed, we have shown that D must be a root of

$$D^{p^s+1} = 1. \tag{4}$$

Inversely, substitutions do exist in the group $G_{m,p,s}$ having as determinants every root of (4), for example, $T_{1,\tau}$ and its powers, where τ

is a primitive root of (4). Hence the factors of composition of $G_{m,p,s}$ are those of $H_{m,p,s}$ together with the prime factors of p^s+1.

Supposing $m \gtrless 3$, let I be an invariant sub-group of $H_{m,p,s}$ containing a substitution

$$S: \qquad \xi_i' = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\xi_j \qquad (i=1,\ldots,m)$$

not of the form

$$T: \qquad \xi_i' = \tau\xi_i \qquad (i=1,\ldots,m \qquad [\tau^{p^s+1}=1,\ \tau^m=1].$$

With the simple exception $m=3$, $p^s=2$, when $H_{3,2,1}$ is of order 72, we will prove that I coincides with H. Therefore the substitutions T form a cyclic group of order d, the greatest common divisor of m and p^s+1, which is the maximal invariant sub-group of $H_{m,p,s}$. Hence the quotient group gives a simple group of order $\frac{\Omega_{m,p,s}}{d(p^s+1)}$.

§ 9.

Theorem. *There exists in the group I a substitution replacing ξ_1 by $\varkappa\xi_1+\sigma\xi_2$ and not reducing to the identity.*

Suppose that $\alpha_{13}\neq 0$, for example. Transforming S by $O_{2,3}^{\lambda,\mu}$, we obtain a substitution S' replacing ξ_1 by

$$\alpha_{11}\xi_1+(\alpha_{12}\lambda^{p^s}+\alpha_{13}\mu^{p^s})\xi_2+(-\mu\alpha_{12}+\lambda\alpha_{13})\xi_3+\sum_{j=4}^{m}\alpha_{1j}\xi_j.$$

To make the coefficient of ξ_3 zero, we have the conditions

$$\lambda=\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{13}}\mu, \qquad \lambda^{p^s+1}+\mu^{p^s+1}=1.$$

The condition for μ is therefore

$$\mu^{p^s+1}\left(\alpha_{12}^{p^s+1}+\alpha_{13}^{p^s+1}\right)=\alpha_{13}^{p^s+1}.$$

Unless $\alpha_{12}^{p^s+1}+\alpha_{13}^{p^s+1}=0$, there exists a solution μ in the $GF[p^{2s}]$ of this relation; indeed, the value of μ^{p^s+1} belongs to the $GF[p^s]$ and is therefore the $(p^s+1)^{st}$ power of a quantity μ in the $GF[p^{2s}]$.

It follows that we can assume that the only coefficients α_{1j} $(j>1)$ which do not vanish are $\alpha_{12},\ldots,\alpha_{1m_1}$ and that, if $m_1>2$, they have the property that

$$(11) \qquad \alpha_{1j}^{p^s+1}+\alpha_{1k}^{p^s+1}=0 \qquad (j,k=2,\ldots,m_1;\ j\neq k).$$

If $m_1=2$, the thorem is proven. If $m_1>3$, the terms in (11) must all be equal and therefore zero unless $p=2$. Supposing first that $p\neq 2$, our theorem is proven unless $m_1=3$, when we have

$$(12) \quad \alpha_{11}^{p^s+1}=1, \quad \alpha_{12}^{p^s+1}+\alpha_{13}^{p^s+1}=0, \quad \alpha_{1j}=0 \qquad (j=4,\ldots,m).$$

In the latter case we may assume that not both

$$\alpha_{11}^{p^s+1} + \alpha_{1i}^{p^s+1} = 0 \qquad (i = 2, 3);$$

for, if so, $\alpha_{12}^{p^s+1} = \alpha_{13}^{p^s+1}$ and hence each is zero by (12), since $p \neq 2$. We may suppose, for example, that

$$\alpha_{11}^{p^s+1} + \alpha_{12}^{p^s+1} \neq 0.$$

If the left member be unity, than $\alpha_{12} = 0$ by (12) and the theorem is proven. Suppose therefore that the left member is neither zero nor unity and consider the substitution

$$\bar{S} \equiv S^{-1} C_1 C_2 S C_1 C_2 \equiv S_\alpha C_1 C_2,$$

where $S_\alpha \equiv S^{-1} C_1 C_2 S$ is seen to be the substitution

$$\xi_i' = \xi_i - 2\alpha_{i1} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{j1}^{p^s} \xi_j - 2\alpha_{i2} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{j2}^{p^s} \xi_j$$
$$(i = 1, \ldots, m).$$

The coefficient $\bar{\alpha}_{11}$ in $\bar{S}$ is therefore

$$\bar{\alpha}_{11} \equiv -\left(1 - 2\alpha_{11}^{p^s+1} - 2\alpha_{12}^{p^s+1}\right).$$

Hence

$$\bar{\alpha}_{11}^{p^s+1} \equiv \bar{\alpha}_{11}^{p^s} \bar{\alpha}_{11} = \left(1 - 2\alpha_{11}^{p^s+1} - 2\alpha_{12}^{p^s+1}\right)^2,$$

which $\neq 1$ since $\alpha_{11}^{p^s+1} + \alpha_{12}^{p^s+1}$ is neither zero nor 1. Applying the above process to $\bar{S}$ in which $\bar{\alpha}_{11}^{p^s+1} \neq 1$, we reach a substitution in the group I in which all but one of the $\alpha_{1j}\,(j = 2, \ldots, m)$ are zero.

Suppose next that $p = 2$. We have by (11)

$$\alpha_{12}^{p^s+1} = \alpha_{13}^{p^s+1} = \cdots = \alpha_{1m_1}^{p^s+1} \neq 0, \quad \alpha_{1j} = 0 \qquad (j = m_1 + 1, \ldots, m).$$

The ratios of $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \ldots, \alpha_{1m_1}$ therefore satisfy the equation

$$\tau^{p^s+1} = 1. \tag{13}$$

Hence by transforming S by suitable products of the form

$$T_{1,\tau_i}^{-1} T_{i,\tau_i} \qquad (i = 3, \ldots, m),$$

where the τ_i are roots of (13), we reach a substitution S' belonging to I in which $\alpha_{12} = \alpha_{13} = \cdots = \alpha_{1m_1}$. Transforming S' by the reciprocal of $O_{2,\xi}^{\lambda,\mu}$, we obtain in I a substitution S'' which replaces ξ_1 by

$$\alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\left\{(\lambda - \mu^{p^s})\xi_2 + (\mu + \lambda^{p^s})\xi_3 + \xi_4 + \cdots + \xi_m\right\}.$$

If $p^s \neq 2$, we can choose λ and μ [see § 6] such that

$$\lambda^{p^s+1} + \mu^{p^s+1} = 1, \quad (\lambda - \mu^{p^s})^{p^s+1} \neq 1.$$

Hence in S'' the sum of the $(p^s+1)^{st}$ powers of the coefficients α_{12}'' and α_{14}'' is not zero in the $GF[2^{2s}]$. As above we can therefore make

$\alpha''_{14} = 0$. If $p^s = 2$, we reach at once the same result by transforming S' by $(\xi_1 \xi_4) W (\xi_1 \xi_4)$, W being defined at the beginning of § 6.

Repeating the process, we reach finally a substitution in I, not the identity, in which either

$$\alpha_{1j} = 0 \qquad (j = 3, \ldots, m)$$

or else

$$\alpha_{12}^{p^s+1} = \alpha_{13}^{p^s+1} \neq 0, \quad \alpha_{1j} = 0 \qquad (j = 4, \ldots, m).$$

In the latter case, the substitution S thus obtained has (since $p = 2$)

$$\alpha_{11}^{p^s+1} = 1.$$

Transforming it by $T \equiv T_{1,\tau} T_{2,\tau^{-1}}$, viz.,

$$T: \qquad \xi_1' = \tau \xi_1, \quad \xi_2' = \tau^{-1} \xi_2 \qquad (\tau^{p^s+1} = 1),$$

we obtain in I the substitution

$$S' \equiv S^{-1} . T^{-1} S T \equiv S_1 T,$$

where S_1 denotes the substitution

$$\xi_i' = \xi_i + \alpha_{i1} (\tau^{-1} - 1) \sum_{j=1}^{m} \alpha_{j1}^{p^s} \xi_j + \alpha_{i2} (\tau - 1) \sum_{j=1}^{m} \alpha_{j2}^{p^s} \xi_j.$$

Hence $S' \equiv S_1 T$ replace ξ_1 by

$$\tau \xi_1 + \alpha_{11} (1 - \tau) \sum_{j=1}^{m} \alpha_{j1}^{p^s} \xi_j + \alpha_{12} \tau (\tau - 1) \sum_{j=1}^{m} \alpha_{j2}^{p^s} \xi_j.$$

The coefficient of ξ_1 is therefore

$$\bar{\alpha}_{11} \equiv \tau + (1 - \tau) \alpha_{11}^{p^s+1} + \tau (\tau - 1) \alpha_{12}^{p^s+1} = 1 + \tau (\tau - 1) \alpha_{12}^{p^s+1}.$$

Setting for brevity $\alpha_{12}^{p^s+1} \equiv \alpha$, a mark $\neq 0$ in the $GF[p^s]$, we find that

$$\bar{\alpha}_{11}^{p^s+1} = 1 + \alpha (\tau - 1) (\tau^{p^s} - 1) (\alpha - \tau^{p^s} - \tau - 1)$$

Since the theorem follows as above if $\bar{\alpha}_{11}^{p^s+1} \neq 1$, we seek to prove that a value τ can be found for which

$$\tau^{p^s+1} = 1, \quad \tau \neq 1, \quad \tau^{p^s} - \tau - 1 \neq \alpha.$$

But a root of $\tau^{p^s+1} = 1$ will satisfy

$$\tau^{p^s} - \tau - 1 = \alpha$$

only when

$$1 - \tau^2 - \tau = \alpha \tau. \tag{14}$$

The desired value of τ certainly exists if $p^s + 1 > 3$. But if $p^s = 2$, we have $\alpha = 1$, whence the equation (14) has the single root $\tau = 1$ in the $GF[2^2]$. The theorem has therefore been proven for all cases.

§ 10.

Theorem. *Excluding the case $m = 3$, $p^s = 2$, the group I contains a substitution leaving one index fixed and not reducing to the identity.*

By § 9, I contains a substitution $S \neq 1$ which replaces ξ_1 by a function of the form $\varkappa\xi_1 + \sigma\xi_2$. Hence

$$S = O_{1,2}^{\varkappa,\sigma} S_1,$$

where S_1 is a substitution of $\mathsf{H}_{m,p,s}$ of the form

$$\xi_1' = \xi_1, \quad \xi_i' = \sum_{j=2}^{m} \alpha_{ij}' \xi_j \qquad (i = 2, \ldots, m).$$

Consider the substitution belonging to H,

$$T \equiv T_{1,\tau} T_{2,\tau} T_{i,\tau^{-2}} \qquad (\tau^{p^s+1} = 1),$$

where $i > 2$. The group I will contain the product

$$S' \equiv S^{-1} T^{-1} S T \equiv S_1^{-1} T^{-1} S_1 T,$$

since T and $O_{1,2}^{\varkappa,\sigma}$ are commutative. Since S' leaves ξ_1 fixed, our theorem is proven unless S' reduces to the identity. In the latter case, we find by comparing the values by which $S_1 T$ und $T S_1$ replace ξ_2 that

$$\alpha_{2j}' = 0 \quad (j = 3, \ldots, m;\ j \neq i), \qquad \tau\alpha_{2i}' = \tau^{-2}\alpha_{2i}'.$$

If $m > 3$, i has at least two values and therefore

$$\alpha_{2j}' = 0 \qquad (j = 3, \ldots, m).$$

If $m = 3$, the same result holds if $p^s > 2$. For then a value of τ exists satisfying $\tau^{p^s+1} = 1$ but not $\tau^3 = 1$. Hence must $\alpha_{2i}' = 0$. Excluding the case $m = 3$, $p^s = 2$, it follows that S_1 (which was seen to leave ξ_1 fixed) alters ξ_2 at most by a constant factor λ. Hence

$$S = O_{1,2}^{\varkappa,\sigma} T_{2,\lambda} \Sigma,$$

where Σ leaves ξ_1 and ξ_2 fixed. Hence I contains

$$S' \equiv S^{-1} (T_{1\tau} T_{2\tau^{-1}})^{-1} S (T_{1\tau} T_{2\tau^{-1}}) \qquad [\tau^{p^s+1} = 1]$$

which leaves $\xi_3, \ldots, \xi_m$ fixed. If $S' \neq 1$, the theorem is proven. If $S' = 1$, we find by comparing the values by which $S T_{1\tau} T_{2\tau^{-1}}$ and $T_{1\tau} T_{2\tau^{-1}} S$ replace ξ_1 that

$$\tau\sigma = \tau^{-1}\sigma.$$

Hence, taking for τ a value for which $\tau^2 \neq 1$, we have $\sigma = 0$. The only case left for consideration is therefore that in which

$$S = T_{1,\varkappa} T_{2,\varkappa^{-1}} T_{2,\lambda} \Sigma.$$

If S be not commutative with every $O_{1,2}^{\alpha,\beta}$, we obtain at once a sub-

stitution $\neq 1$ in I which leaves $\xi_3, \ldots, \xi_m$ fixed. In the contrary case, $\lambda = \varkappa^2$, and therefore

$$S = T_{1,\varkappa}\, T_{2,\varkappa}\, \Sigma.$$

If $m = 3$, $\Sigma = T_{3,\varkappa^{-2}}$, the determinant of S being unity. Transforming S by $(\xi_1 \xi_3)\, C_1$, we obtain the substitution

$$S_2 = T_{3,\varkappa}\, T_{2,\varkappa}\, T_{1,\varkappa^{-2}},$$

belonging to I. Then I contains

$$S S_2^{-1} \equiv T_{1,\varkappa^3}\, T_{3,\varkappa^{-3}}$$

leaving ξ_2 fixed and not reducing to the identity. For that requires $\varkappa^3 = 1$, when we should have

$$S = T_{1,\varkappa}\, T_{2,\varkappa}\, T_{3,\varkappa}$$

contrary to the hypothesis made in § 8.

Let $m \geqq 4$. If Σ be not commutative with every

$$O_{i,j}^{\alpha,\beta} \qquad (i, j = 3, \ldots, m;\ \alpha^{p^s+1} + \beta^{p^s+1} = 1)$$

then I contains the substitutions leaving ξ_1 and ξ_2 fixed,

$$S^{-1} O^{-1} S O \equiv \Sigma^{-1} O^{-1} \Sigma O,$$

not all of which reduce to the identity. In the contrary case, Σ must, by § 7, have the form

$$\xi_i' = \omega \xi_i \qquad (i = 3, \ldots, m).$$

Hence I contains the product

$$S^{-1} C_1 (\xi_1 \xi_3)\, S (\xi_1 \xi_3)\, C_1 : \begin{cases} \xi_1' = \omega \varkappa^{-1} \xi_1, & \xi_3' = \omega^{-1} \varkappa \xi_3, \\ \xi_2' = \xi_2, & \xi_i' = \xi_i \qquad (i = 4, \ldots, m), \end{cases}$$

which does not reduce to the identity; for, if so, $\varkappa = \omega$ and S would, contrary to the hypothesis made in § 8, have the form

$$\xi_i' = \omega \xi_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

§ 11.

Theorem. *Except in the case $m = 3$, $p^s = 2$, the group I coincides with the group $\mathsf{H}_{m,p,s}$.*

The proofs of the theorems of §§ 9—10 hold for any value of $m \geqq 3$. Hence by a repeated application of these theorems, we finally reach in the group I a substitution $S \neq 1$ leaving $m - 2$ indices fixed and therefore of the form $O_{1,2}^{\varkappa,\sigma}$, we may assume. If it reduce to $C_1 C_2$, when $p \neq 2$, its transformed by $O_{1,3}^{\alpha,\beta}$ gives the substitution

$$O_{1,3}^{\alpha^{p^s+1} - \beta^{p^s+1},\ -2\alpha\beta}\, C_1 C_2,$$

so that I will contain an $O_{1,3}$ not the identity. Hence I contains a

substitution $O_{1,2}^{\varkappa,\sigma}$ neither the identity nor C_1C_2. It follows then from § 5 that, for $p^s > 3$, I contains every substitution $O_{1,2}^{\alpha,\beta}$. Transforming by substitutions of the form $(\xi_i\,\xi_j)C_t$, we obtain in I every $O_{i,j}^{\alpha,\beta}$.

These substitutions suffice, except when $m = 3$, $p^s = 2$, to generate the group $\mathsf{H}_{m,p,s}$. Indeed, by applying the formula

$$(O_{i,j}^{\alpha,\beta})^{-1}\,T_{i,\tau}\,O_{i,j}^{\alpha,\beta}\,T_{i,\tau}^{-1} \equiv O_{i,j}^{\alpha',\beta'} \tag{15}$$

where

$$\alpha' \equiv \alpha^{p^s+1} + \tau^{-1}\beta^{p^s+1}, \quad \beta' \equiv \alpha\beta(\tau^{-1}-1); \quad \tau^{p^s+1} = 1,$$

it follows from § 6 that every substitution of $G_{m,p,s}$ has the form h or $hT_{m,\varkappa}$ where h is generated from the $O_{i,j}^{\alpha,\beta}$ and has determinant unity. Hence the substitutions of $\mathsf{H}_{m,p,s}$ (of determinant unity) are of the form h.

For the case $p^s = 3$, we first prove that I contains the substitution C_1C_2. We have shown that I contains an $O_{1,2}^{\alpha,\beta}$ not the identity and therefore $O_{1,2}^{\alpha',\beta'}$ given by (15). If $\beta \neq 0$, we can make $\alpha' = 0$; indeed, if α be not itself zero, we have

$$\alpha^4 = \beta^4 = -1 \qquad (\text{in the } GF[3^2])$$

and we need only take $\tau = -1$. But the square of $O_{1,2}^{0,\beta'}$ gives C_1C_2 since $\beta'^4 = 1$ when $\alpha' = 0$. If, however, $\beta = 0$, then $\alpha \neq 1$. If $\alpha = -1$, we have at once $O_{1,2}^{\alpha,0} = C_1C_2$. If $\alpha \neq \pm 1$, then the square of $O_{1,2}^{\alpha,0}$ gives $O_{1,2}^{\alpha^2,0} = C_1C_2$.

Having C_1C_2, I contains (as above) the substitution

$$O_{1,3}^{\lambda,\mu}, \quad \lambda \equiv \alpha^{p^s+1} - \beta^{p^s+1}, \quad \mu \equiv -2\alpha\beta \equiv \alpha\beta \pmod 3.$$

Taking for α and β an arbitrary set of solutions of

$$\alpha^4 = -1, \quad \beta^4 = -1, \quad \text{whence } \alpha^4 + \beta^4 = 1,$$

we have $O_{1,3}^{0,\mu}$ where $\mu = \alpha\beta$ is an arbitrary solution of $\mu^4 = 1$. Hence I contains

$$O_{1,3}^{0,\mu}\,(O_{1,3}^{0,1})^{-1} \equiv T_{1,\mu^2}\,T_{3,\mu}.$$

Transforming the latter by $O_{1,2}^{\alpha,\beta}$, we obtain by (15),

$$O_{1,2}^{\alpha',\beta'}\,T_{1,\mu^2}\,T_{3,\mu} \qquad \begin{pmatrix} \alpha' \equiv \alpha^4 + \mu\beta^4 \\ \beta' \equiv \alpha\beta(\mu-1) \end{pmatrix}.$$

Hence I contains every such $O_{1,2}^{\alpha',\beta'}$. For $\alpha = 0$, $\beta^4 = 1$, we have $\alpha' = \mu$, $\beta' = 0$; for $\alpha^4 = -1$, $\beta^4 = -1$, we have $\alpha' = -1-\mu$. We have therefore reached in the group I every $O_{1,2}^{\varkappa,\sigma}$ in which $\varkappa = \mu$, 0, $\pm 1 + \mu$, where μ is an arbitrary one of the four roots of $\mu^4 = 1$. Defining the $GF[3^2]$ by the irreducible quadratic congruence.

$$i^2 \equiv -1 \pmod 3,$$

we have $x = 0, \pm 1, \pm i, \pm 1 \pm i$. Hence x takes every value in the $GF[3^2]$. We thus reach all 24 substitutions $O_{1,2}^{\alpha,\beta}$. It follows that I coincides with $H_{m,3,1}$.

For the case $p^s = 2$, we have in I a substitution $O_{1,2}^{\alpha,\beta} \neq 1$. By the result at the end of § 6, it must be one of the six substitutions

$$T_{1,\varrho}\, T_{2,\varrho^{-1}}, \quad (\xi_1 \xi_2)\, T_{1,\varrho}\, T_{2,\varrho^{-1}} \qquad (\varrho^3 = 1).$$

The transformed of the latter by $T_{1,\tau}\, T_{3,\tau^{-1}}$ gives

$$(\xi_1 \xi_2)\, T_{1,\varrho}\, T_{2,\varrho^{-1}} \cdot T_{1,\tau}\, T_{2,\tau^{-1}}.$$

Hence, in every case, I contains a substitution of the form

$$T_{1,\tau}\, T_{2,\tau^{-1}} \neq 1 \qquad (\tau^3 = 1).$$

Its reciprocal gives $T_{1,\tau^{-1}}\, T_{2,\tau}$. If $m > 3$, I contains

$$W^{-1} T_{1,\tau}\, T_{4,\tau^{-1}}\, W \equiv \begin{pmatrix} \tau & \tau+1 & \tau+1 \\ \tau+1 & \tau & \tau+1 \\ \tau+1 & \tau+1 & \tau \end{pmatrix} T_{4,\tau^{-1}}$$

$$= T_{1,\tau}\, T_{2,\tau^{-1}}\, T_{3,\tau^{-1}}\, W\, T_{2,\tau}\, T_{3,\tau}\, T_{4,\tau^{-1}},$$

where

$$W \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \tau & \tau^2 \\ 1 & \tau^2 & \tau \end{pmatrix} \qquad (\tau^2 = \tau + 1).$$

Hence I contains

$$T_{3,\tau^{-1}}\, W T_{2,\tau} \equiv T_{3,\tau^{-1}}\, T_{4,\tau}\, W T_{4,\tau^{-1}}\, T_{2,\tau}$$

and therefore W. Hence I contains $W^2 = (\xi_2 \xi_3)$. Hence I coincides with $H_{m,2,1}$ if $m > 3$.

§ 12.

Theorem. *The group $G_{m,p,s}$ is a sub-group of the linear group on $2m$ indices in the $GF[p^s]$ defined by a quadratic invariant*

$$\Psi \equiv \sum_{i=1}^{m} (x_i^2 + y_i^2 + \Theta x_i y_i).$$

Indeed, we may define the $GF[p^{2s}]$ by an equation of the form

$$I^2 - \Theta I + 1 = 0,$$

belonging to and irreducible in the $GF[p^s]$. Its roots I and $I^{p^s} \equiv I^{-1}$ belong to the $GF[p^{2s}]$. Set

(16) $\xi_i \equiv x_i + Iy_i, \quad \alpha_{ij} = a_{ij} + Ic_{ij} \qquad (i, j = 1, \ldots, m).$

Then

$$\xi_i^{p^s} = x_i + I^{-1}y_i, \quad \xi^{p^s+1} = x_i^2 + y_i^2 + \Theta x_i y_i.$$

The invariant $\sum_{i=1}^{m} \xi_i^{p^s+1}$ becomes the quadratic form ψ. The general substitution of $G_{m,p,s}$,

$$S: \quad \xi_i' = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\xi_j \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

takes the following form

$$\begin{cases} x_i' = \sum_{j=1}^{m} (a_{ij}x_j - c_{ij}y_j) \\ y_i' = \sum_{j=1}^{m} [c_{ij}x_j + (a_{ij} + \Theta c_{ij})y_j] \end{cases} \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

For the case $p > 2$, a simpler form of the $2m$-ary group may be given. Indeed, if ν and a not-square in the $GF[p^s]$, we can define the $GF[p^{2s}]$ by means of the equation irreducible in the $GF[p^s]$,

$$I^2 - \nu = 0.$$

Its roots I and $I^{p^s} = -I$ belong to the $GF[p^{2s}]$. Then from (16) we find

$$\xi_i^{p^s} \equiv x_i - Iy_i, \quad \xi_i^{p^s+1} = x_i^2 - \nu y_i^2.$$

Hence our invariant becomes the quadratic form

$$\sum_{i=1}^{m} (x_i^2 - \nu y_i^2).$$

The general substitution S of $G_{m,p,s}$ takes the form

$$\begin{cases} x_i' = \sum_{j=1}^{m} (a_{ij}x_j + \nu c_{ij}y_j) \\ y_i' = \sum_{j=1}^{m} (c_{ij}x_j + a_{ij}y_j) \end{cases} \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

University of California, January 22, 1899.

Sur le développement du zéro en séries de fonctions cylindriques.

Par

NIELS NIELSEN à Copenhague.

Il est bien connu que la fonction cylindrique de la première espèce $J^{\mu}(x)$ a fourni aux M. M. H. Weber*) et N. Sonine**) un moyen de trouver des intégrales définies qui ont la propriété remarquable d'être des fonctions discontinues des paramètres qu'elles contiennent. En vérité, ces intégrales ont constamment la valeur zéro pour certaines combinaisons des valeurs de ces paramètres. Le facteur discontinu de Dirichlet est la plus simple des intégrales en question.

Dans les pages suivantes je donnerai quelques séries infinies contenant la fonction $J^{\mu}(x)$ et ayant une propriété analogue à celle des intégrales que nous venons de mentionner. En effet, nos séries peuvent donner constamment la somme zéro dans un certain intervalle quoiqu'elles soient uniformément et absolument convergentes et peuvent être differentiées terme à terme.

§ 1.

Prenons comme point de départ les intégrales de Bessel

$$(1) \qquad \Pi^{2\mu}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x \sin v) \cos 2\mu v \, dv,$$

$$(2) \qquad X^{2\mu+1}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x \sin v) \sin(2\mu+1) v \, dv,$$

introduites dans la théorie des fonctions cylindriques par Anger***)

*) Journal de Crelle, t. 69, t. 75.

**) Mathematische Annalen, t. 16, voir p. 38—39.

***) Neueste Schriften der Naturforschenden Gesellschaft in Danzig, 1855.

et appliquées plus tard par M. M. H. F. Weber*) et Lommel**) dans certaines recherches sur l'Optique. Remarquons en passant que l'on retrouve les fonctions Π et X en cherchant l'intégrale indéfinie d'une fonction cylindrique.

Supposant n entier, on aura

$$(3) \qquad \Pi^{2n}(x) = J^{2n}(x), \quad X^{2n+1}(x) = J^{2n+1}(x).$$

Appliquons maintenant les formules bien connues

$$(4) \qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\sin v)^{2n} \cos 2\mu v \, dv = \frac{\Gamma(2n+1)\cos \mu\pi}{2^{2n}\Gamma(n+1+\mu)\Gamma(n+1-\mu)},$$

$$(5) \qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\sin v)^{2n+1} \sin (2\mu+1)\, v dv = \frac{\Gamma(2n+2)\cos \mu\pi}{2^{2n+1}\Gamma(n+2+\mu)\Gamma(n+1-\mu)},$$

n désignant un entier non négatif, nous aurons les développements

$$(6) \qquad \Pi^{2\mu}(x) = \cos \mu\pi \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{2s}}{\Gamma(s+1+\mu)\Gamma(s+1-\mu)},$$

$$(7) \qquad X^{2\mu+1}(x) = \cos \mu\pi \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+1}}{\Gamma(s+2+\mu)\Gamma(s+1-\mu)},$$

donnés pour la première fois par Anger.

Posons enfin dans les formules (6), (7)

$$2x \sin \Theta = -xi(e^{\Theta i} - e^{-\Theta i})$$

au lieu de x, nous avons en appliquant la formule du binôme sur chaque terme et en ordonnant ensuite suivant les puissances de $e^{i\Theta}$:

$$(8) \qquad \Pi^{2\mu}(2x \sin \Theta) = \cos \mu\pi \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty}{}' J^{s+\mu}(x) J^{s-\mu}(x) \cos 2s\Theta,$$

$$(9) \qquad X^{2\mu+1}(2x \sin \Theta) = \cos \mu\pi \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} J^{s+1+\mu}(x) J^{s-\mu}(x) \sin (2s+1)\Theta,$$

développements qui sont analogues a celui de $e^{x(\alpha+\alpha^{-1})}$ que M. Schlömilch***) a pri comme définition de $J^r(x)$. Les formules (8), (9)

---

*) Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, Jahrgang 24, 1879.

**) Mathematische Annalen, t. 16.

***) Zeitschrift für Mathematik und Physik, t. II.

sont vraies pour une valeur quelconque, réelle ou imaginaire de Θ. Dans la première l'accent après le signe de sommation désigne qu'il faut prendre la moitié du terme qui correspond à $s = 0$.

De ces formules (8), (9) on peut en déduire une foule d'autres. Supposant par exemple μ entier, on aura les séries de Schläfli*) pour $J^n(2x \sin\Theta)$, tandis que $\Theta = \frac{\pi}{6}$ nous donne les développements de $\Pi^{2\mu}(x)$ et de $X^{2\mu+1}(x)$ selon les produits de deux fonctions cylindriques. Différentions encore les formules (8), (9) par rapport à Θ et employons la formule ordinaire pour $D_\Theta^n F(\sin\Theta)$**), nous aurons en vertu de (6), (7) et en posant $\Theta = 0$:

$$(10)\quad \sum_{s=1}^{s=\infty}(2s)^{2n} J^{s+\mu}(x)\, J^{s-\mu}(x) = -\sum_{p=1}^{p=n}\frac{(2p)!\, b_{2p}^{2n}}{\Gamma(p+1+\mu)\Gamma(p+1-\mu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p},$$

$$(11)\quad \sum_{s=0}^{s=\infty}(2s+1)^{2n+1} J^{s+1+\mu}(x)\, J^{s-\mu}(x) = -\sum_{p=0}^{p=n}\frac{(2p+1)!\, b_{2p+1}^{2n+1}}{\Gamma(p+2+\mu)\Gamma(p+1-\mu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+1},$$

où l'on a posé

$$b_s^m = \frac{1}{s!}\sum_{p=0}^{\leqq \frac{s}{2}}(-1)^p \binom{s}{p}(s-2p)^m,$$

de sorte que les formules (10), (11) sont analogues à celles de M. Schlömilch***).

Posons maintenant dans (10), (11) μ égal au nombre entier, non négatif m, nous verrons que les sommes des séries infinies qui figurent aux premiers membres deviendront égales à zéro, pourvu que $m > n$; ainsi nous venons de développer le zéro en séries de produits de deux fonctions cylindriques; mais on voit immédiatement que ces développements sont *des identités pures*. Cherchons maintenant d'autres développements du zéro qui n'ont pas cette dernière propriété.

§ 2.

Posant pour abréger

$$\sigma_m = \frac{1}{1^m} - \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} - \frac{1}{4^m} + \cdots, \qquad \sigma_0 = \frac{1}{2},$$

on aura les formules d'Euler†)

*) Mathematische Annalen. t. 3.

**) Voir par exemple Schlömilch: Compendium d. h. Analysis, t. II, p. 5.

***) loc. cit.

†) Institutiones calculi integralis, vol. 4, p. 281.

$$(\alpha) \qquad \sum_{s=1}^{s=\infty}(-1)^{s-1}\frac{\cos sv}{s^{2n}} = \sum_{p=0}^{p=n}(-1)^p\frac{\sigma_{2n-2p}}{(2p)!}v^{2p},$$

$$(\beta) \qquad \sum_{s=1}^{s=\infty}(-1)^{s-1}\frac{\sin sv}{s^{2n+1}} = \sum_{p=0}^{p=n}(-1)^p\frac{\sigma_{2n-2p}}{(2p+1)!}v^{2p+1},$$

qui sont vraies dans l'intervalle $-\pi \leqq v \leqq +\pi$; on suppose n entier et positif.

Posant maintenant dans (α), (β) $x\sin\omega$ au lieu de v, ω étant un angle réel et $-\pi \leqq x \leqq +\pi$, on verra que les séries ainsi obtenues sont absolument et uniformément convergentes, de sorte qu'elles peuvent être intégrées terme à terme après être multipliées respectivement par $\cos 2\mu\omega$, $\sin(2\mu+1)\omega$. De cette manière nous aurons en vertu de (4), (5)

$$(12) \qquad \sum_{s=1}^{s=\infty}(-1)^{s-1}\frac{\Pi^{2\mu}(sx)}{s^{2n}} = \cos\mu\pi\cdot\sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{(-1)^p\sigma_{2n-2p}}{\Gamma(p+1+\mu)\Gamma(p+1-\mu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p},$$

$$(13) \qquad \sum_{s=1}^{s=\infty}(-1)^{s-1}\frac{X^{2\mu+1}(sx)}{s^{2n+1}} = \cos\mu\pi\cdot\sum_{p=0}^{p=n}\frac{(-1)^p\sigma_{2n-2p}}{\Gamma(p+2+\mu)\Gamma(p+1-\mu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+1},$$

formules qui sont vraies, pourvu que $-\pi \leqq x \leqq +\pi$.

Démontrons maintenant les formules analogues pour $n = 0$. En partant de l'identité

$$\cos v - \cos 2v + \cos 3v - \cdots + (-1)^{n-1}\cos nv = \frac{1}{2} + (-1)^{n-1}\frac{\cos\frac{2n+1}{2}v}{2\cos\frac{v}{2}}$$

et de celle qu'on obtient par là en intégrant par rapport à v, on verra les formules cherchées établies, pourvu que $-\pi < x < +\pi$.

Cela posé, faisons dans (12), (13) μ égal au positif entier m, nous aurons les formules remarquables

$$(14) \qquad \sum_{s=1}^{s=\infty}(-1)^{s-1}\frac{J^{2m}(sx)}{s^{2n}} = 0, \qquad m > n,$$

$$(15) \qquad \sum_{s=1}^{s=\infty}(-1)^{s-1}\frac{J^{2m+1}(sx)}{s^{2n+1}} = 0, \qquad m > n,$$

qui sont vraies dans l'intervalle $-\pi \leqq x \leqq +\pi$; pour $n = 0$ il faut exclure les limites $\pm\pi$.

Ces développements ne sont pas des identités pures, car les séries infinies ne sont pas développables en séries de puissances. Cependant, nos séries ont les propriétés remarquables suivantes:

1° *Les séries sont absolument convergentes et différentiables terme à terme, pourvu que* $n > 0$. *Mais la différentiation repétée finit toujours par nous donner des séries divergentes.*

2° *Il est possible de développer dans une telle série une fonction qui n'est définie que comme étant zéro dans un intervalle quelconque.*

Cela posé, cherchons de développer une fonction en série de la forme

$$(16) \qquad \sum_{s=1}^{s=\infty} A_s J^m(sx),$$

ce développement peut se faire d'une infinité de façons, pourvu qu'il soit possible, et que le nombre positif entier m *soit plus grand que l'unité.*

Or, M. Schlömilch*) a développé une fonction arbitraire en série de la forme (16) dans les deux cas qui correspondent à $m = 0$, $m = 1$. Ces développements ne se font que d'une seule manière, tandis que les développements de M. Lommel**) qui correspondent à $m > 1$ peuvent être effectués d'une infinité de façons.

§ 3.

Les développements (8), (9) nous donnent les formules

$$(17) \quad J^{s+\mu}(x)\ J^{s-\mu}(x) = \frac{2}{\pi \cos \mu\pi} \int_0^{\pi} \Pi^{2\mu}(2x \sin \Theta) \cos 2s\Theta\, d\Theta,$$

$$(18) \quad J^{s+1+\mu}(x) J^{s-\mu}(x) = \frac{2}{\pi \cos \mu\pi} \int_0^{\pi} X^{2\mu+1}(2x \sin \Theta) \sin (2s+1)\Theta\, d\Theta;$$

pour $s = 0$ il faut dans la première prendre la moitié du second membre.

Cela posé, mettons dans (12), (13) $2x \sin \Theta$ au lieu de x, nous aurons en vertu de (4), (5)

$$(19) \quad \sum_{s=1}^{s=\infty} (-1)^{s-1} \frac{J^{m+\mu}(sx) J^{m-\mu}(sx)}{s^{2n}} = \sum_{p=0}^{p=n} (-1)^{p-m} \frac{\binom{2p}{p+m} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p} \sigma_{2n-2p}}{\Gamma(p+1+\mu)\Gamma(p+1-\mu)},$$

$$(20) \quad \sum_{s=1}^{s=\infty} (-1)^{s-1} \frac{J^{m+1+\mu}(sx) J^{m-\mu}(sx)}{s^{2n+1}} = \sum_{p=0}^{p=n} (-1)^{p-m} \frac{\binom{2p+1}{p+m+1} \sigma_{2n-2p}}{\Gamma(p+2+\mu)\Gamma(p+1-\mu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+1}$$

formules qui sont vraies dans l'intervalle $-\pi \leq x \leq +\pi$, les limites exclues pour $n = 0$; m est un positif entier.

*) loc. cit.

**) Studien über die Bessel'schen Functionen, p. 73.

De ces formules (19), (20) on obtiendra des développements de zéro des deux manières suivantes:

1° $m > n$, μ *étant quelconque.*

2° μ *étant égal au membre entier* r, $r > n$, *tandis que* m *est un positif entier quelconque.*

Les développements du zéro ainsi obtenus ont précisément les mêmes propriétés que ceux du paragraphe 2. Les remarques faites sur les développements (16) sont vraies aussi pour les développements de la forme:

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} A_s J^{p+\mu}(sx)\, J^{p-\mu}(sx), \qquad \sum_{s=1}^{s=\infty} A_s J^{p+1+\mu}(sx)\, J^{p-\mu}(sx),$$

p désignant un positif entier.

Copenhague, le 25 mars 1899.

Ueber die Charakteristik einer reellen quadratischen Form von nicht verschwindender Determinante.

(Aus einem Briefe an Herrn F. Klein.)

Von

Alfred Loewy in Freiburg i. Br.

In meiner Arbeit „Ueber bilineare Formen mit conjugirt imaginären Variablen", welche in Ihren gesch. Annalen*) zum Abdruck gelangt, habe ich den Begriff „*Charakteristik einer reellen quadratischen Form von nicht verschwindender Determinante*" eingeführt. Unter dieser Zahl, die ich mit q' bezeichne, verstehe ich die kleinere der zwei Zahlen q und $n - q$; hierbei ist q die Zahl der positiven und $n - q$ die Zahl der negativen Quadrate, die bei der Darstellung einer reellen quadratischen Form von n Variablen und nicht verschwindender Determinante als Aggregat von n Quadraten auftreten. Bei Benützung des von Herrn Frobenius eingeführten Begriffes „Signatur" σ einer reellen quadratischen Form, wobei $\sigma = 2q - n$ ist, kann man q' auch durch die Gleichung $q' = \frac{n - |\sigma|}{2}$ definiren; hierbei bedeutet $|\sigma|$ den absoluten Betrag der Signatur σ.

Wie ich in der erwähnten Arbeit gezeigt habe, giebt die Charakteristik einer reellen quadratischen Form von nicht verschwindender Determinante völligen Aufschluss über *die reellen linearen Transformationen der Form in sich.* Die Charakteristik liefert auch auf die einfachste Weise die vollständige Entscheidung für eine andere Frage, nämlich die *Bestimmung der Elementartheiler der Determinante einer Schaar von reellen quadratischen Formen.* Es gelten bei beiden Problemen mutatis mutandis genau analoge Sätze, und man kann daher auch ausgehend von der zweiten Aufgabe die Charakteristik q' einer reellen quadratischen Form von nicht verschwindender Determinante definiren. Wie ich nach der Herleitung dieser Resultate sah, haben

*) Die Arbeit ist inzwischen in Bd. 50 dieser Annalen p. 557 erschienen.

Sie sich bereits in Ihrer Dissertation*) mit der Frage nach den Elementartheilern der Determinante einer Schaar reeller quadratischer Formen beschäftigt; vielleicht haben daher meine Ausführungen für Sie einiges Interesse.

Es seien $\mathfrak{P} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \sum_{\beta=1}^{\beta=n} p_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$ und $\mathfrak{Q} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \sum_{\beta=1}^{\beta=n} q_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$ zwei quadratische Formen mit reellen Coefficienten; die Gesammtheit der quadratischen Formen $\mu\mathfrak{P} + \nu\mathfrak{Q}$, wobei μ und ν alle reellen Werthe annehmen, nennen wir mit Kronecker eine Schaar von reellen quadratischen Formen. Wir machen im Folgenden stets die Voraussetzung, dass die Determinante der Formenschaar nicht identisch verschwinden soll, d. h. die Formenschaar enthält stets Formen von nicht verschwindender Determinante. Bei der Zerlegung der Determinante der Formenschaar soll jeder Elementartheiler, der für einen complexen Werth des Verhältnisses $\frac{\mu}{\nu}$ verschwindet, ein imaginärer Elementartheiler, jeder Elementartheiler, der für einen reellen Werth des Verhältnisses $\frac{\mu}{\nu}$ verschwindet, ein reeller Elementartheiler genannt werden.

Es gilt nun folgender Fundamentalsatz:

*Hat man eine Schaar von reellen quadratischen Formen $\mu\mathfrak{P} + \nu\mathfrak{Q}$ und ist $2s$ die Summe der Exponenten aller imaginären Elementartheiler**) der Determinante von $\mu\mathfrak{P} + \nu\mathfrak{Q}$, so kann die Zahl $s + \sum E\left(\frac{h}{2}\right)$ niemals grösser sein als die Charakteristik q' irgend einer in der Schaar $\mu\mathfrak{P} + \nu\mathfrak{Q}$ enthaltenen reellen quadratischen Form von nicht verschwindender Determinante, welcher unter allen in der Schaar enthaltenen Formen die kleinste Zahl als Werth der Charakteristik zukommt; in der Summe durchläuft h die Exponenten sämmtlicher reellen Elementartheiler der Determinante von $\mu\mathfrak{P} + \nu\mathfrak{Q}$. Unter $E\left(\frac{h}{2}\right)$ ist die grösste ganze in $\frac{h}{2}$ enthaltene Zahl zu verstehen.*

$$(I) \qquad q' \geqq s + \sum E\left(\frac{h}{2}\right).$$

---

*) F. Klein, Ueber die Transformation der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen Liniencoordinaten auf eine canonische Form. Bonn 1868, wiederabgedruckt in Bd. 23 der mathematischen Annalen.

**) Da $\mu\mathfrak{P} + \nu\mathfrak{Q}$ reell ist, so sind imaginäre Elementartheiler paarweise von gleichem Grade vorhanden; diese verschwinden für conjugirt imaginäre Werthe des Verhältnisses $\frac{\mu}{\nu}$; daher ist die Summe der Exponenten sämmtlicher imaginären Elementartheiler stets eine gerade Zahl $2s$.

Für $q' = 0$ ist dies der bekannte Satz: Wenn die Determinante der Schaar $\mu\mathfrak{P} + \nu\Omega$ einen complexen oder mehrfachen Elementartheiler besitzt, so enthält die Schaar keine definite Form.

Vergleicht man den obigen Satz mit meinen Resultaten über die reellen Transformationen (a. a. O. p. 563 und p. 570), so sieht man, *genau dieselbe Rolle, welche dort die Wurzeln vom absoluten Betrage* 1 *spielen, kommt hier den reellen Elementartheilern zu; dieselbe Stellung, welche dort die Wurzeln, die nicht den absoluten Betrag* 1 *haben, einnehmen, haben hier die imaginären Elementartheiler.*

Als ich nach Auffindung des obigen Satzes, den ich mir aus den grundlegenden Untersuchungen von Weierstrass (Berliner Monatsberichte 1868, p. 337 u. 338) bewies, das Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik durchsah, ob dieser Satz schon bekannt sei, wurde ich auf die 1887 im Messenger Vol. 17 erschienene, mir unzugängliche Arbeit von A. Buchheim „On a theorem of Prof. Klein's on symmetric matrices" und hierdurch auf Ihre Dissertation aufmerksam. In Ihrer Dissertation beweisen Sie (p. 31) folgendes Theorem:

Ist φ eine reelle quadratische Form von nicht verschwindender Determinante und bedeutet m den Ueberschuss der positiven über die negativen Quadrate, falls man φ in eine Summe reeller Quadrate verwandelt, so hat die Determinante der Schaar $\varrho\varphi + \psi$, falls ψ irgend eine reelle quadratische Form von verschwindender oder nicht verschwindender Determinante, ϱ einen variablen Parameter bedeutet, mindestens m reelle Elementartheiler von ungeradem Grade.

Beim Wiederabdruck dieser Arbeit im 23. Bande der mathematischen Annalen fügen Sie diesem Satz die Bemerkung hinzu: „Ich möchte auf diesen allgemeinen Satz, der bisher wenig beachtet zu sein scheint, besonders aufmerksam machen. In die gewöhnliche Ausdrucksweise übersetzt, besagt er, dass von den Wurzeln der Gleichung $|\varrho a_{ik} - b_{ik}| = 0$ mindestens m reell sind, wenn $\sum a_{ik} x_i x_k$ oder $\sum b_{ik} x_i x_k$, in eine Summe reeller Quadrate verwandelt, von den Quadraten des einen Vorzeichens m mehr aufweist als von denen des anderen."

Der obige Satz enthält ausser der präciseren Fassung materiell nichts wesentlich Neues gegenüber Ihrem Satze. Die Ungleichung (l) eignet sich eben nur besonders gut zu Folgerungen, und man kann aus ihr, wenn man nur die entsprechenden Veränderungen vornimmt, genau dieselben Schlüsse wie im § 6 meiner erwähnten Arbeit ziehen. Ich will auf das Aussprechen dieser Folgerungen verzichten.

Bei gegebener reeller quadratischer Form $\mathfrak{P}$ von nicht verschwindender Determinante mit der Charakteristik q' kann man auch stets

reelle quadratische Formen Ω *finden, dass die Determinante der Schaar* $\mu\mathfrak{P} + \nu\Omega$ *beliebig vorgegebene Elementartheiler besitzt, hierbei ist vorausgesetzt, dass die imaginären Elementartheiler paarweise conjugirt imaginär von gleichem Grade auftreten und man der Ungleichung* (I) *Rechnung trägt.* (Vgl. auch Ihre Dissertation p. 33.)

Hieraus folgt, dass die Charakteristik q', welche für die Zahl $s + \sum E\left(\frac{h}{2}\right)$ nach (I) als nicht überschreitbare Grenze erscheint, stets für die Zahl $s + \sum E\left(\frac{h}{2}\right)$ *erreichbar* ist. Man kann hieraus genau dieselben Consequenzen mutatis mutandis wie im § 8 meiner Arbeit ziehen. Ich darf mir vielleicht gestatten, die sich infolgedessen ergebenden Definitionen der Charakteristik einer reellen quadratischen Form $\mathfrak{P}$ von nicht verschwindender Determinante anzugeben:

1) *Ist* λ *der höchste mögliche Exponent, der zu einem reellen Elementartheiler der Determinante der Schaar* $\mu\mathfrak{P} + \nu\Omega$, *wobei* $\mathfrak{P}$ *eine gegebene reelle quadratische Form von nicht verschwindender Determinante ist und unter* Ω *jede beliebige reelle quadratische Form von verschwindender oder nicht verschwindender Determinante verstanden werde, gehören kann, so ist die Charakteristik von* $\mathfrak{P}$ *gleich der grössten in* $\frac{\lambda}{2}$ *enthaltenen ganzen Zahl.*

2) *Die Charakteristik einer reellen quadratischen Form* $\mathfrak{P}$ *von nicht verschwindender Determinante ist der höchste Exponent, welcher bei einem imaginären Elementartheiler der Determinante der Schaar* $\mu\mathfrak{P} + \nu\Omega$, *wobei* Ω *jede beliebige reelle quadratische Form von verschwindender oder nicht verschwindender Determinante bedeuten kann, auftritt.*

3) *Die Maximalzahl für sämmtliche verschiedene imaginäre Wurzeln der gleich Null gesetzten Determinante von* $\varrho\mathfrak{P} + \Omega$, *wobei* ϱ *einen variablen Parameter bedeutet und* Ω *jede beliebige reelle quadratische Form von verschwindender oder nicht verschwindender Determinante sein kann, giebt uns den zweifachen Werth der Charakteristik der reellen quadratischen Form* $\mathfrak{P}$ *von nicht verschwindender Determinante an.*

4) *Die Anzahl der reellen Elementartheiler vom zweiten Grade der Determinante* $\mu\mathfrak{P} + \nu\Omega$, *wobei* Ω *eine beliebige reelle quadratische Form von verschwindender oder nicht verschwindender Determinante bedeutet, giebt für ihr Maximum die Charakteristik der reellen quadratischen Form* $\mathfrak{P}$ *von nicht verschwindender Determinante an.*

Auf die obigen 4 verschiedenen Arten kann, ausgehend von dem behandelten Problem, die Charakteristik einer reellen quadratischen Form definirt werden.

Ebenso wie in meiner früheren Arbeit bleiben die obigen Resultate auch für eine *Schaar von Hermite'schen Formen* gültig. *Man hat in*

allen obigen Sätzen nur die zwei reellen quadratischen Formen $\mathfrak{P}$ *und* $\mathfrak{Q}$ *durch zwei Hermite'sche Formen* P *und* Q *zu ersetzen.* Ich begnüge mich hier mit dem Ausspruch dieses Resultates, ohne den Beweis hierfür Ihnen vorzubringen.

Freiburg i. B., 4. Juli 1898.

In der oben citirten Arbeit „*Ueber bilineare Formen mit conjugirt imaginären Variablen*“ (*Math. Annalen* Bd. 50) bitte ich die folgenden zwei *Druckfehler* zu verbessern:

p. 558, Zeile 12 lies „und $\bar{a}_{\alpha k}$“ statt „und $a_{\alpha k}$“.

p. 559, Zeile 11 lies „$\frac{1}{\bar{d}}$“ statt „$\frac{1}{d}$“. $\left(\frac{1}{\bar{d}}\right.$ ist der reciproke Werth zu dem conjugirt imaginären von d.$\left.\right)$

A proof of Noether's fundamental theorem.

By

Charlotte Angas Scott in Bryn Mawr.

Noether's theorem, that under certain conditions as to behaviour at a point of intersection that is multiple on one or both of the curves, any curve F through the intersection of two curves U, V, has an equation of the form

$$BU + AV = 0,$$

is of such importance in an extensive field of algebraic investigation that the numerous papers dealing with it*) have all been devoted to the algebraic proof. This theorem, discovered in the course of, and developed for the sake of, purely algebraic researches, is not however tabooed to the geometer. If analytical geometry is to stake out its claim in the regions recently discovered by analysts, Noether's fundamental theorem must be established in a geometrical manner; but it does not appear that any simple proof depending on geometrical conceptions has yet been given. Cayley**) regarded the theorem as intuitive, for simple intersections. Zeuthen's proof***) depends on an elaborate determination of the number of conditions imposed by the intersections of two curves, when these are simple, the case of multiple intersections being then deduced by the somewhat dangerous process of proceeding to the limit. If the theorem can be established independently, it affords a satisfactory and immediate determination of the number of conditions imposed by the points common to two curves, and simplifies the proofs of various theorems relating to the intersections of curves.

Most of the applications in geometry arise from the fact that all the conditions to which F must be subject at a point that is of multiplicity q, r, on U, V, can be satisfied by giving to F a point of

*) Brill-Noether, Bericht über die Theorie der algebraischen Functionen, pag. 353.

**) Math. Ann. Bd. 30, pag. 85 ff.

***) Math. Ann. Bd. 31, pag. 235 ff.

multiplicity $q + r - 1$, unless any of the branches of U, V have contact; this case is reduced to depend on the preceding by means of Cremona transformations.

§ 1.

Let the curves U, V of orders m, n have points of multiplicity $q_1, r_1; q_2, r_2; \ldots$ at their common points $O_1, O_2, \ldots$, so that $\Sigma qr = mn$. It is desired to show that under certain conditions as to behaviour at the points O, any curve through these points has an equation of the form $BU + AV = 0$. Let any curve satisfying the conditions at the points O be denoted by Ω.

If it be known that for any one order N every Ω is of this form, that is,

$$\Omega_N \equiv BU + AV,$$

it can be shown that this holds also for any lower order.

In the first place, let $N \geq M$, where $M = m + n$. Let Ω_{N-1} be the curve to be considered; then $L\Omega_{N-1}$, where L is an arbitrary straight line, is an Ω_N; hence

$$L\Omega_{N-1} \equiv BU + AV. \tag{1}$$

Let L be chosen so as not to pass through any point common to two of the curves U, V, Ω_{N-1}; then denoting the intersections of L with U, V by S, T, the m points S lie on AV, and hence on A, and similarly the n points T lie on B.

The identity (1) can be written in the form

$$L\Omega_{N-1} \equiv B'U + A'V, \tag{1'}$$

where $A' = A + XU$, $B' = B - XV$, X being the general homogeneous ternary expression of degree $N - M$. The curve A', of order $N - n$, passes through the points S (since these lie on both A and U), that is, through m points on the line L; and as it has

$$\tfrac{1}{2}(N-M+1)(N-M+2)$$

degrees of freedom, in virtue of the coefficients in X, a number $\geq N - M + 1$, if $N \geq M$, it can be made to pass through $N - M + 1$ additional points on L. It has then $N - M + 1 + m$, that is, $N - n + 1$, points on L, and thus contains L as a factor. Hence

$$A' \equiv LA_1$$

and identity (1') becomes

$$L\Omega_{N-1} \equiv B'U + LA_1V,$$

showing that L is a factor in $B'U$, and therefore in B'. Hence writing

$$B' \equiv LB_1,$$

(1′) becomes

$$L\Omega_{N-1} \equiv LB_1 U + LA_1 V,$$

that is, rejecting the factor L,

$$\Omega_{N-1} \equiv B_1 U + A_1 V,$$

the desired result. Thus down to and including the value M for N,

$$\Omega_N \equiv BU + AV.$$

In the next place, consider $\Omega_{N'}$, where $N' = M - l$. Take a general l-ic, L, by means of which points S, T, lm and ln in number, are determined on U, V; the curve L must be chosen so as not to pass through any point common to two of the curves U, V, $\Omega_{N'}$. Then $L\Omega_{N'}$ is an Ω_M, hence

$$(2) \qquad \begin{aligned} L\Omega_{N'} &\equiv B\,U + A\,V \\ &\equiv B'U + A'V, \end{aligned}$$

where $A' = A + kU$, $B' = B - kV$, k being an arbitrary constant. The points S, lm in number, common to A and U, lie on A', and k can be chosen so as to make A' pass through precisely one additional point on L, so making L a factor in A'. Hence $A' = LA_1$, and (2) becomes

$$L\Omega_{N'} \equiv B'U + LA_1 V,$$

showing that B' contains L as a factor, that is, $B' = LB_1$; then

$$L\Omega_{N'} \equiv LB_1 U + LA_1 V,$$

that is

$$\Omega_{N'} \equiv B_1 U + A_1 V.$$

Thus if the theorem holds for some one value of N, it holds for all lower values. All that remains is to show that if N be taken sufficiently great,

$$\Omega_N \equiv BU + AV.$$

§ 2.

It will be shown in § 3 that the conditions imposed on a curve by points of assigned multiplicity become independent when the order of the curve is sufficiently high. Let a curve F, of order N, have a point of multiplicity $Q = q + r - h$, at a point where U, V are of multiplicity q, r, and let A, B, of orders $N - n$, $N - m$, have multiplicity $q - h$, $r - h$ at this point. Let N be chosen so great that the conditions imposed on F, A, B are all independent. Then

I) every curve of the system

$$(3) \qquad BU + AV = 0$$

is seen to have the characteristics of F;

II) the number of independent curves in the system (3) can be shown to be the same as the number of independent curves F.

For the number of independent curves A

$$= \tfrac{1}{2}(N-n+1)(N-n+2) - \tfrac{1}{2}\Sigma(q-h)(q-h+1),$$

and the number of independent curves B

$$= \tfrac{1}{2}(N-m+1)(N-m+2) - \tfrac{1}{2}\Sigma(r-h)(r-h+1);$$

but in enumerating the $A's$ and $B's$, we have counted among the $A's$ all of the form XU, and among the $B's$ all of the form XV; and as these give the same curves of the system (3), namely XUV, where X is the general curve of order $N-m-n$, the number of independent curves of the system (3) becomes

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}(N-n+1)(N-n+2) - \tfrac{1}{2}\Sigma(q-h)(q-h+1)\\
&+\tfrac{1}{2}(N-m+1)(N-m+2) - \tfrac{1}{2}\Sigma(r-h)(r-h+1)\\
&-\tfrac{1}{2}(N-m-n+1)(N-m-n+2)\\
&= \tfrac{1}{2}(N^2+3N+2) - mn + \Sigma qr - \tfrac{1}{2}\Sigma(q+r-h)(q+r-h+1)\\
&\qquad - \tfrac{1}{2}\Sigma h(h-1).
\end{aligned}$$

As $\Sigma qr = mn$, this gives for the number of independent curves in (3)

$$\tfrac{1}{2}(N+1)(N+2) - \tfrac{1}{2}\Sigma Q(Q+1) - \tfrac{1}{2}\Sigma h(h-1).$$

The number of independent curves F

$$= \tfrac{1}{2}(N+1)(N+2) - \tfrac{1}{2}\Sigma Q(Q+1),$$

hence the two are equal if $h=0$ or 1, but not if $h>1$. For negative values of h the proof as here given requires a slight modification, inasmuch as the curve X must now have multiple points; but without going through the proof, the truth of the result is evident, for a negative h simply means a higher multiplicity on F, that is, an additional specialisation in F.

The process used, in the first instance, for reducing the order of Ω by arranging the expression $BU + AV$ so that a factor can be rejected, does not affect the relation of A, B to the intersections of U, V. Hence the theorem follows in the desired form, namely: — if at an intersection of U, V, which is of multiplicity q, r, on these curves, the multiplicity of F be $q + r - 1$, then F has an equation of the form $BU + AV = 0$, where A, B have multiplicity $q - 1$, $r - 1$ at the point: and no lower general value for the multiplicity on F can be assigned, unless it is supplemented by some other conditions.

§ 3.

To show that the conditions imposed by points of assigned multiplicity are independent when the order of the curve exceeds a certain value, it suffices to show that a curve can be found to satisfy all but one of the conditions, if it is shown at the same time that the omitted condition can be made to be any one. Let the set of conditions, q in number, $\frac{\partial^{q-1} f_i}{\partial x^h \partial y^k} = 0$ $(h + k = q - 1)$, be referred to as $E_q^{(i)}$, so that the conditions for a q_1 point at O_1 are $E_1^{(1)}, E_2^{(1)}, \ldots, E_{q_1}^{(1)}$.

Let O_1 be taken as the point xy; let $l_2, l_3, \ldots$, be any straight lines that pass respectively through $O_2, O_3, \ldots$, but not through O_1. Consider the curve*) of order $\geq \Sigma q - 1$,

$$f = x^h y^k l_2^{q_2} l_3^{q_3} \ldots s^p = 0,$$

when $h + k = q_1 - 1$. This satisfies all the conditions for points of multiplicity q_1 at O_1, q_2 at O_2, etc., with one exception; $\frac{\partial^{q_1-1} f}{\partial x^h \partial y^k}$ does not vanish. Thus by a suitable choice of h, k, any one of the conditions $E_{q_1}^{(1)}$ can be omitted; that is to say, no one of the conditions $E_{q_1}^{(1)}$ is linearly connected with any of the other conditions imposed on the curve. Any linear connections must therefore involve the conditions exclusive of $E_{q_1}^{(1)}$. Repeating the argument, it is seen that the conditions of the set $E_{q_1-1}^{(1)}$ are not involved, and similarly for every set relating to any point. Thus if the order of the curve is as great as $\Sigma q - 1$, the conditions are independent.

As a matter of fact, this independence can be proved for a lower order, by choosing the lines l_2, l_3, to join the points $O_2 O_3$ etc. in pairs, the exponents being adjusted so as to give to f at O_2, O_3 etc. points of multiplicity q_2, q_3 etc.

Bryn Mawr, Pennsylvania, March 1899.

*) Cf. Zeuthen, Math. Annalen Bd. 31, pag. 240, 1887.

Die Entdeckung der einseitigen Flächen.

Von

PAUL STÄCKEL in Kiel.

Im Jahre 1865 hat Moebius auf die für die Analysis situs des Raumes fundamentale Thatsache aufmerksam gemacht, dass es Flächen giebt, die nur *eine* Seite haben*). „Wenn man sie von einer beliebigen Stelle aus mit einer Farbe zu überstreichen anfängt und damit fortfährt, ohne mit dem Pinsel über die Grenzlinie hinaus auf die andere Seite überzugehen, so werden nichtsdestoweniger zuletzt an jeder Stelle die zwei daselbst gegenüberliegenden Seiten der Fläche gefärbt sein." Von diesen Flächen, sagt Moebius, kann man sich eine sehr anschauliche Vorstellung verschaffen, indem man einen Papierstreifen von der Form eines Rechtecks $ABB'A'$ (Fig. 1) das Ende AB festlassend und das andere Ende $A'B'$ um die Längenaxe des Streifens haltend derart biegt, dass A' mit B und B' mit A zur Coincidenz gelangt (Fig. 2).

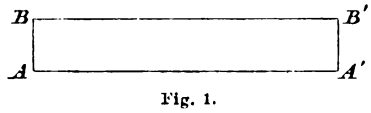


Fig. 1.

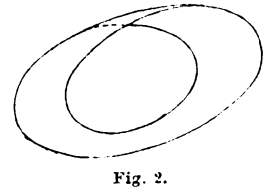


Fig. 2.

Vor kurzem hatte ich Gelegenheit den Nachlass von Listing einzusehen, dem die Analysis situs des Raumes die wichtige 1862 veröffentlichte Abhandlung über den *Census räumlicher Complexe* verdankt**), und fand in dem aus den Jahren 1858 bis 1859 stammen-

*) *Ueber die Bestimmung des Inhaltes eines Polyeders.* Berichte über die Verhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, math. phys. Classe Bd. 17, S. 31—68, 1865, wieder abgedruckt in den gesammelten Werken, Bd. II, S. 473—521.

**) Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissensch. zu Göttingen Bd. 10. Göttingen 1862.

den Vorarbeiten zu dieser Abhandlung genau die Figur 2. Von besonderem Interesse ist dabei eine Notiz, datirt „1858. Juli 24."

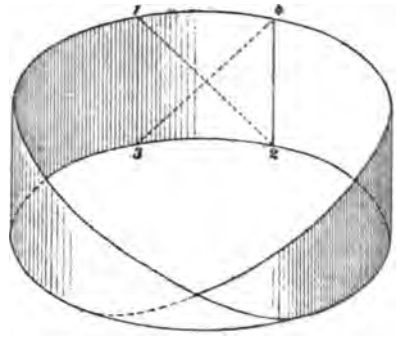


Fig. 3.

„Fläche mit Einer cyklischen Grenze. Auf ihr sind Linien zwischen vier Punkten (1), (2), (3), (4) in consecutiver Ordnung auf der Grenzlinie liegend, so zu ziehen, dass die Linie von (1) nach (2) und die Linie von (3) nach (4) sich einmal kreuzen, und ferner, dass die Linien (1) (3) und (2) (4) sich nirgends kreuzen, was bekanntlich bei einer auf der Oberfläche eines Körpers genommenen cyklisch begrenzten Fläche nicht möglich ist.

Die Fläche ist durch die Linien 1 3 und 2 4 in zwei Vierecke getheilt, deren Umfänge consecutive heissen

1.) 1 4 2 3 1 = 1 3 2 4 1

2.) 1 2 4 3 1 = 1 3 4 2 1.

Im ersten liegen die Seiten 1 4 und 2 3 in der ursprünglichen Grenze der Fläche, im zweiten die Seiten 1 2 und 3 4, im ersten wie im zweiten sind die Seiten 1 3 und 2 4 Querschnitte der Fläche, welche (nach Riemann?) zweifach zusammenhängend ist.

Im ersten sind die Diagonalen 1 2, 3 4

„ zweiten „ „ „ 2 3, 1 4.

Bei dieser Fläche gehen die beiden Seiten jedes ihrer begrenzten Stücke mittelst der restirenden Flächentheile continuirlich in einander über."

Aber auch in der Abhandlung über den Census ist die Figur 2 enthalten: Sie ist daselbst die Figur Nr. 3. In der zugehörigen Stelle des Textes, S. 13—14, definirt Listing als *Diaphragma* eine einfach zusammenhängende Fläche, die von einer einfachen, unverknoteten und unverschlungenen Ringlinie begrenzt ist. Bei einer solchen Fläche, heisst es daselbst, ist diese Ringlinie *„die alleinige Scheidelinie zwischen*

den zwei vollständig von einander getrennten (gleich grossen) Arealgebieten ihrer zwei Seiten" und dazu wird angemerkt:

„Es mag nicht überflüssig erscheinen, schon bei dieser Gelegenheit darauf aufmerksam zu machen, dass *eine von einer cyklischen unverknoteten Curve vollständig begrenzte Fläche ganz andere Eigenschaften haben kann, als die eben angeführten*, Figur 3 und 4 stellen solche Beispiele dar."

Wie Herr C. Reinhardt bemerkt*), kann man Moebius' Entdeckung der einseitigen Polyeder „mit ziemlicher Bestimmtheit auf das letzte Viertel des Jahres 1858 verlegen" und „in dieselbe Zeit ist auch die Auffindung des sogenannten Moebius'schen Blattes zu setzen." Demnach sind Listing und Moebius, beide mit der Verallgemeinerung des Euler'schen Satzes von den Polyedern beschäftigt, fast gleichzeitig unabhängig von einander zu der Entdeckung der einseitigen Flächen gelangt, während Listing die Priorität der Veröffentlichung zuerkannt werden muss.

Kiel, im April 1899.

*) Moebius, Gesammelte Werke, Bd. II, S. 519.

Berichtigung.

Seite 127 Zeile 7 v. o. lies bilinearen statt trilinearen.

Neuester Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Bianchi, Luigi, Vorlesungen über Differentialgeometrie. Autorisierte deutsche Übersetzung von Max Lukat, Oberlehrer in Hamburg. 3 Lieferungen. gr. 8. geh.

I. Lieferung: [IV u. 336 S.] 1899. n. ℳ 12.—
II. Lieferung: [S. 337—528.] 1898. n. ℳ 6.60. — III. Lieferung: [U. d. Pr.]

... über Geschichte der Mathematik.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, DAVID HILBERT, CARL NEUMANN, MAX NOETHER, KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther Dyck
in München

Adolph Mayer
in Leipzig

52 Band. 1. Heft.

Ausgegeben am 4. Mai

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1899.

den zwei vollständig von einander getrennten (gleich grossen) Arealgebieten ihrer zwei Seiten“ und dazu wird angemerkt:

„Es mag nicht überflüssig erscheinen, schon bei dieser Gelegenheit darauf aufmerksam zu machen, dass *eine von einer cyklischen unverknoteten Curve vollständig begrenzte Fläche ganz andere Eigenschaften haben kann, als die eben angeführten*. Figur 3 und 4 stellen solche

Abzahlung gestattet. Bar: Rabatt und Preisendung.

Fabrik: W. Emmer, Berlin C,

Seydelstr. 20, Preisliste, Musterbuch umsonst.

= Die Herren Geistlichen u. Lehrer erhalten Extrapreise. =

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Hettner's Geographische Zeitschrift.

Monatlich 1 Heft. **Aus dem Inhalt der letzten Hefte:** Halbjährlich 9 Mk.

Der Mittelland-Kanal: Major z. D. V. Kors. M. 1 Karte.
D. geograph. Ursachen v. Spaniens Niedergang: Prof. J. Maerker.
Bemerkungen zur Siedelungsgeographie: Dr. O. Schlüter.
Die Gletscher des Kilimandjaro: Dr. Hans Meyer. M. 1 Tafel.

Kleinere Mitteilungen — Geographische Neuigkeiten — Bücherbesprechungen — Eingesandte Bücher, Aufsätze und Karten — Zeitschriftenschau.

Prospekte und Probehefte gratis und franko

von der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig, Poststrasse 3.

Abonnements nehmen alle Postanstalten und Buchhandlungen an.

☛ **In Vorbereitung befindet sich:** * **Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.** *

Dr. E. Bardey's methodisch geordnete Aufgabensammlung,

mehr als 8000 Aufgaben enthaltend, über alle Teile der Elementar-Arithmetik, vorzugsweise für Gymnasien, Realgymnasien und Oberrealschulen.

☛ **Neubearbeitung von Prof. Pietzker und Oberl. Presler.**

Dr. E. Bardey's arithmetische Aufgaben nebst Lehrbuch d. Arithmetik,

vorzugsweise für höhere Bürgerschulen, Realschulen, Progymnasien u. Realgymnasien.

☛ **Neubearbeitung von Prof. Pietzker und Oberl. Presler.**

☛ Bei dieser Neubearbeitung besteht die Absicht, nach Möglichkeit die Forderungen zu berücksichtigen, die in den letzten Jahren aus den Kreisen der Fachlehrer heraus vielfach zum Ausdruck gekommen sind, insbesondere auch hinsichtlich einer etwas stärkeren Verwertung der Verhältnisse des wirklichen Lebens und der thatsächlich stattfindenden Naturvorgänge in den eingekleideten Aufgaben. Doch wird dies möglich sein ohne wesentliche Änderungen im Zuschnitt der beiden Bücher und ohne Verzicht auf die Vorzüge, die dieselben bis an den Schulunterricht so verdienten Verfassers ihre weite Verbreitung an den höheren Lehranstalten verschafft haben. Namentlich wird dafür gesorgt werden, daß die gegenwärtigen Auflagen beider Bücher auch neben der Neubearbeitung weiter benutzt werden können. Die ursprüngliche Fassung der Bücher soll also auch selbstverständlich zunächst neben der neuen noch weiter zur Ausgabe gelangen.

Neuester Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Bianchi, Luigi, Vorlesungen über Differentialgeometrie. Autorisierte deutsche Übersetzung von Max Lukat, Oberlehrer in Hamburg. 3 Lieferungen. gr. 8. geh.

I. Lieferung: [IV u. 336 S.] 1896. n. ℳ 12.—
II. Lieferung: [S. 337—528.] 1898. n. ℳ 6.60. — III. Lieferung: [U. d. Pr.]

Cantor, Moritz, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. In 3 Bänden. III. Band: Vom Jahre 1668 bis zum Jahre 1758. In 3 Abteilungen. [XIV u. 893 S.] gr. 8. 1894—98. geh. n. ℳ 24.—

I. Abt.: 1668—1699. Mit 45 Figuren im Text. [251 S.] 1894. n. ℳ 6.—
II. Abt.: 1700—1726. Mit 30 Figuren im Text. S. 253—472.] 1896. n. ℳ 6.—
III. Abt.: 1727—1758. Mit 70 Fig. im Text. [XIV u. S. 473—893.] 1898. n. ℳ 12.—

Czuber, E., Vorlesungen über Differential- und Integral-Rechnung. 2 Bde. gr. 8. 1898. In Leinwand geb. n. ℳ 22.—

I. Band: [XIII u. 526 S.] n. ℳ 12.— — II. Band: [X u. 428 S.] n. ℳ 10.—

Föppl, Dr. **A.,** Professor an der Technischen Hochschule zu München, Vorlesungen über technische Mechanik. 4 Bde. gr. 8. In Leinwand geb.

I. Band: Einführung in d. Mechanik. M. 78 Fig. i. T. [XV u. 412 S.] 1898. n. ℳ 10.—
III. Band: Festigkeitslehre. Mit 70 Figuren im Text. [XVI u. 472 S.] 1897. n. ℳ 12.—
II. Band: Graphische Statik u. IV. Band: Dynamik. [In Vorbereitung.]

Holzmüller, Prof. Dr. **Gustav,** Direktor der Kgl. Maschinenbauschule zu Hagen, Mitglied der Leopoldinisch-Karolinischen Akademie, die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung. 2 Teile. II. Teil, enthaltend das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektricität, der Wärme und der Hydrodynamik. Mit 237 Figuren, zahlreichen Übungsbeispielen und einem Anhange über die Maßeinheiten. [XVII u. 440 S.] gr. 8. 1898. In Lnw. geb. n. ℳ 6.—

Klein, F., und **A. Sommerfeld,** über die Theorie des Kreisels. 3 Hefte. gr. 8. geh.

I Heft: Die kinemat u. kinet. Grundlagen d. Theorie [IV u. 196 S.] 1897. n. ℳ 5.60.
II Heft: Durchführung der Theorie im Falle des schweren symmetrischen Kreisels. [IV u. 315 S.] 1898. n. ℳ 10.—
III. Heft in Vorbereitung

Netto, Dr. **Eugen,** o. ö. Professor der Mathematik an der Universität zu Giessen, Vorlesungen über Algebra. In zwei Bänden. gr. 8. geh.

I. Band. Mit Holzschnitten im Text. [X u. 388 S.] 1896. n. ℳ 12.
II. Band. 1. Lieferung. Mit Holzschnitten im Text. [192 S.] 1898. n. ℳ 6.
II. Band. 2. Lieferung. [Soll baldmöglichst folgen.]

Neumann, Dr. **C.,** Professor der Mathematik an der Universität zu Leipzig, die elektrischen Kräfte. Darlegung und genauere Betrachtung der von hervorragenden Physikern entwickelten mathematischen Theorieen. Zweiter Theil: Ueber die von Hermann von Helmholtz in seinen älteren und in seinen neueren Arbeiten angestellten Untersuchungen. [XXXVIII u. 462 S.] gr. 8. 1898. geh. n. ℳ 14.—

Routh, John Edward, Sc. D., LL. D., F. R. S., etc.; Ehrenmitglied von Peterhouse, Cambridge; Mitglied des Senats der Universität London, die Dynamik der Systeme starrer Körper. In zwei Bänden mit zahlreichen Beispielen. Autorisierte deutsche Ausgabe von Adolf Schepp. Mit einem Vorwort von Felix Klein. 2 Bände. gr. 8. In Leinwand geb. n. ℳ 21.—

I. Band: Die Elemente. Mit 71 Figuren im Text. [XII u. 472 S.] 1897. n. ℳ 10.—
II. Band: Höhere Dynamik. Mit 83 Figuren im Text. [X u. 544 S.] 1898. n. ℳ 11.—

Salmon, George, analytische Geometrie des Raumes. Deutsch bearbeitet von Dr. Wilhelm Fiedler, Professor am Eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich. Zwei Theile. I. Theil: Die Elemente und die Theorie der Flächen zweiten Grades. Vierte [illegible] Auflage. XXIV u. 448 S. gr. 8. 1898. geh. n. [illegible]

INHALT.

Zur Theorie der Modeln. Von Ernst Steinitz in Charlottenburg . . . 1
Stetigkeit und Differentialquotient. Von Ernst Steinitz in Charlottenburg 28
Zur Functionen- und Invariantentheorie der binomischen Gebilde. Von J. Wellstein in Strassburg i. E. 70
Ueber einige, bei Schwingungsproblemen auftretende, Differentialgleichungen. Von Max Abraham in Berlin 81
Ueber die verschiedenen Wurzeln einer algebraischen Gleichung und deren Ordnungen. Von L. Bauer in Darmstadt 113
Kürzeste und geradeste Linien im Möbius'schen Nullsystem. Von H. Liebmann in Göttingen 120
Ueber eine Invariante der trilinearen ternären Form. Von M. Pasch in Giessen 127
Ueber bilineare Relationen zwischen hypergeometrischen Integralen höherer Ordnung. Von Arthur Hirsch in Zürich 130
Ueber die Constantenbestimmung bei einer cyklischen Minimalfläche. Von Georg Juga in Bukarest 167
Zur Theorie der Bernoulli'schen Zahlen. Von K. Schwering in Trier . 171
Note on the simple group of order 504. By W. Burnside, Greenwich . 174

Wir ersuchen unsere geehrten Herren Mitarbeiter, etwaige, den Abhandlungen beizufügende Figuren — gleichviel ob dieselben im Texte selbst oder auf besonderen Tafeln veröffentlicht werden sollen — im Interesse einer raschen und exacten Ausführung stets auf besonderen Blättern, wenn möglich in der gewünschten Grösse und in thunlichst präciser Zeichnung den Manuscripte beilegen zu wollen. **Ausserdem wird um möglichst genaue Angabe der Adresse gebeten.**

Die Redaction.

☞ **Jeder Band der Annalen besteht aus 4 Heften und umfasst 36—38 Druckbogen. Um jedoch in jedem Heft nur abgeschlossene Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter von ungleicher Stärke sein.**

Der Preis für den Band von 4 Heften beträgt 20 Mark; jährlich erscheinen etwa 4—6 Hefte. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Verantwortliche Redaction: **W. Dyck**, München, Hildegardstr. 1½, **F. Klein**, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 3, **A. Mayer**, Leipzig, Königstr. 1, II.

Hierzu eine Beilage von **B. G. Teubner** in **Leipzig.**

Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig, Poststrasse 3.

MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, DAVID HILBERT, CARL NEUMANN, MAX NOETHER,
KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther Dyck
in München

Adolph Mayer
in Leipzig

52. Band 2. u. 3. Heft.

Ausgegeben am 27. Juli

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1899.

Soeben erschien im Verlage von B. G. Teubner in Leipzig:

ABHANDLUNGEN
ZUR
GESCHICHTE DER MATHEMATIK.

VIII. Heft. [Mit 3 Tafeln.] gr. 8. geh. n. 8 ℳ

Inhalt: Curtze, über eine Algorismus-Schrift des XII. Jahrhunderts. — De Inquisicione Capacitatis Figurarum. Anonyme Abhandlung a. d. 15. Jahrh., hrsg. v. Curtze. — Rosenberger, die erste Entwicklung der Elektrisirmaschine. — Die ersten Beobachtungen über Elektrische Entladungen. — Simon, zur Geschichte und Philosophie der Differentialrechnung. — Schmidt, Lebensgeschichte d. ungarischen Mathematikers Joh. Bolyai de Bolya, k. k. Hauptmann im Geniecorps (1802—1860). — Wertheim, die Berechnung d. irrationalen Quadratwurzeln u. d. Erfindung d. Kettenbrüche. — Schmidt, zur Geschichte des Thermoskops. — Heron von Alexandria, Kerns Dasypodius u. d. Strassburger astronom. Münsteruhr. — Heron von Alexandria d. 17. Jahrhundert.

Allerhöchste Auszeichnungen: Orden, Staatsmedaillen etc.

EMMER &c.

Pianinos 450 Mk. an, Flügel 10jährige Garantie,
Harmoniums 95 Mk. an.
Abzahlung gestattet. Bar: Rabatt und Freisendung.
Fabrik: W. Emmer, Berlin C,
Seydelstr. 20, Preisliste, Musterbuch umsonst.
= Die Herren Geistlichen u. Lehrer erhalten Extrapreise. =

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Hettner's Geographische Zeitschrift.

Monatlich 1 Heft von circa 60 Seiten. Halbjährlich 9 Mk.

Jedem **Gebildeten** wie allen **Schulen**
zum Abonnement empfohlen.

Aus dem Inhalt der letzten Hefte:

Der Mittelland-Kanal: Major z. D. V. Kurs. Mit 1 Karte.

Die Völkerstämme Österreich-Ungarns: Dr. J. Zemmrich.

Bemerkungen zur Siedelungsgeographie: Dr. O. Schlüter.

D. gegenw. Stand unser. Kenntnis v. d. ursprünglich. Verbreit. d. angebaut. Nutzpflanzen: Dr. F. Höck.

Kleinere Mitteilungen — Geographische Neuigkeiten — Bücherbesprechungen — Eingesandte Bücher, Aufsätze und Karten — Zeitschriftenschau.

Prospekte und Probehefte gratis und franko
von der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig, Poststrasse 3.
Abonnements nehmen alle Postanstalten und Buchhandlungen an.

Neuerer Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Cantor, Moritz, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik In 3 Bänden. III. Band: Vom Jahre 1668 bis zum Jahre 1758. In 3 Abteilungen. [XIV u. 893 S.] gr. 8. 1894—98. geh. n. ℳ 24.—

I. Abt.: 1668—1699. Mit 45 Figuren im Text. [251 S.] 1894. n. ℳ 6.—
II. Abt.: 1700—1726. Mit 30 Figuren im Text. [S. 253—472.] 1896. n. ℳ 6.—
III. Abt.: 1727—1758. Mit 70 Fig. im Text. [XIV u. S. 473—893.] 1898. n. ℳ 12 —

Czuber, E., Vorlesungen über Differential- und Integral-Rechnung. 2 Bde. gr. 8. 1898. In Leinwand geb. n. ℳ 22.—

I. Band: [XIII u. 526 S.] n. ℳ 12.— — II. Band: [X u. 428 S.] n. ℳ 10.—

Engel, Dr. **Friedrich,** Prof. a. d. Universität Leipzig, und Dr. **Paul Stäckel,** Prof. a. d. Universität Kiel, Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie. In 2 Bänden. gr. 8. geh.

I. Band. Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij, zwei geometrische Abhandlungen, aus dem Russischen übersetzt, mit Anmerkungen und mit einer Biographie des Verfassers von Fr. Engel. I. Teil: Die Übersetzung. Mit einem Bildnisse Lobatschefskijs und mit 101 Figuren im Text. II. Teil: Anmerkungen. Lobatschefskijs Leben und Schriften. Register. Mit 67 Figuren im Text. [XVI, IV u. 176 S.] 1899. n. ℳ 14 —

II. Band. Wolfgang und Johann Bolyai, geometrische Untersuchungen, herausgegeben von Paul Stäckel. Mit einem Bildnisse Wolfgang Bolyais. [In Vorbereitung.]

Föppl, Dr. **A.,** Professor an der Technischen Hochschule zu München, Vorlesungen über technische Mechanik. 4 Bde. gr. 8. In Leinwand geb.

I. Band: Einführung in d. Mechanik. M. 78 Fig. i. T. [XV u. 412 S.] 1898. n. ℳ 10 —
II. Band: Graphische Statik. [In Vorbereitung.]
III. Band: Festigkeitslehre. Mit 70 Figuren im Text. [XVI u. 472 S.] 1897. n. ℳ 12 —
IV. Band: Dynamik. Mit 69 Fig. im Texte. [XIV u. 456 S.] 1899. n. ℳ 12

Holzmüller, Prof. Dr. **Gustav,** Direktor der Kgl. Maschinenbauschule zu Hagen, Mitglied der Leopoldinisch-Karolinischen Akademie, die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung. 2 Teile. II. Teil, enthaltend das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektricität, der Wärme und der Hydrodynamik. Mit 237 Figuren, zahlreichen Übungsbeispielen und einem Anhange über die Maßeinheiten. [XVII u. 440 S.] gr. 8. 1898. In Lnw. geb. n. ℳ 6.—

Januschke, Hans, k. k. Direktor der Staats-Oberrealschule in Teschen, das Prinzip der Erhaltung der Energie und seine Anwendung in der Naturlehre. Ein Hilfsbuch für den höheren Unterricht. Mit 95 Figuren im Text. [X u. 456 S.] gr. 8. 1897. Gebunden n. ℳ 12.—

Klein, F., und **A. Sommerfeld,** über die Theorie des Kreisels. 3 Hefte. gr. 8. geh.

I. Heft: Die kinemat. u. kinet. Grundlagen d. Theorie. [IV u. 196 S.] 1897. n. ℳ 5.60
II. Heft: Durchführung der Theorie im Falle des schweren symmetrischen Kreisels. [IV u. 315 S.] 1898. n. ℳ 10.—
III. Heft in Vorbereitung.

Routh, John Edward, Sc. D., LL. D., F. R. S., etc.; Ehrenmitglied von Peterhouse, Cambridge; Mitglied des Senats der Universität London, die Dynamik der Systeme starrer Körper. In zwei Bänden mit zahlreichen Beispielen. Autorisierte deutsche Ausgabe von Adolf Schepp. Mit einem Vorwort von Felix Klein. 2 Bände gr. 8. In Leinwand geb. n. ℳ 24.—

I. Band: Die Bewegung. Mit [illegible] Text. [XII u. 432 S.] [illegible] ℳ 10
II. Band: Die [illegible] Dynamik. Mit [illegible] Text. [X u. 448 S.] [illegible] ℳ 14

Wüllner, Adolph, Lehrbuch der Experimentalphysik. 4 Bände. IV. Band: Die Lehren von der Strahlung. Erste Hälfte, vielfach umgearbeitete und vermehrte Auflage. Mit [illegible] in den Text gedruckten Abbildungen, drei Farbendruck- und [illegible] graphierten Tafeln. [illegible] gr. 8. 1899. [illegible] zweite Hälfte [illegible] 1899

Internationaler Verein zur Beförderung des Studiums der Quaternionen und verwandter Systeme der Mathematik.

Auszug aus den Satzungen.

Zweck des Vereins ist, das Studium der Rechnungen mit Vektoren und verwandten Größen nach Möglichkeit zu fördern. — Geleitet wird derselbe von dem Vorsitzenden (zur Zeit Prof. Robert S. Ball in Cambridge), dem General-Schriftführer und Schatzmeister (z. Z. Prof. Alexander Macfarlane, Lehigh University, South-Bethlehem Pa. U. S.) und den für die einzelnen Länder fungirenden National-Schriftführern (z. Z. Prof. H. Schlegel in Hagen i./W. für Deutschland). Die beiden ersten werden durch Stimmenmehrheit aller, die letzteren durch Stimmenmehrheit der Mitglieder ihres Landes für zwei Jahre unter Offenhaltung der Wiederwahl gewählt. — Die Meldung zur Mitgliedschaft, wie auch die event. Anzeige des Austritts, erfolgt bei den National-Schriftführern, an die auch der Jahresbeitrag in Höhe von 12 frs. (= 10 ℳ) zu entrichten ist. Ehrenmitgliedschaft ist vorgesehen. Vorsitzender und General-Schriftführer sind die verantwortlichen Herausgeber der Vereinspublikationen. Die National-Schriftführer berichten jährlich über die in ihrem Lande erfolgte Veröffentlichungen aus den die Vereins-Interessen berührenden Gebieten der Mathematik. Die Mitglieder werden um Einsendung von Separatabzügen derartiger von ihnen veröffentlichter Arbeiten ersucht. Ein ausführlicher Prospekt wird auf Verlangen vom National-Schriftführer versandt. Meldungen zum Beitritt werden baldigst erbeten.

Hagen i./W. im Juli 1899. **Prof. Dr. Schlegel.**

Neuester Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Cantor, Moritz, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. In 3 Bänden. III. Band: Vom Jahre 1668 bis zum Jahre 1758. In 3 Abteilungen. [XIV u. 893 S.] gr. 8. 1894—98. geh. n. ℳ 24.—

I. Abt.: 1668—1699. Mit 43 Figuren im Text. [251 S.] 1894. n. ℳ 6.—
II. Abt.: 1700—1726. Mit 50 Figuren im Text. [S. 253—472.] 1896. n. ℳ 6.—
III. Abt.: 1727—1758. Mit 70 Fig. im Text. [XIV u. S. 473—893.] 1898. n. ℳ 12.—

Fricke, Robert, und **Felix Klein,** Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen. I. Band: Die gruppentheoretischen Grundlagen. Mit 192 in den Text gedruckten Figuren. [XIV u. 634 S.] gr. 8. 1897. geh. n. ℳ 24.—

Grassmann's, Hermann, gesammelte mathematische und physikalische Werke. Auf Veranlassung der mathematisch-physischen Klasse der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften und unter Mitwirkung der Herren: Jakob Lüroth, Eduard Study, Justus Grassmann, Hermann Grassmann der Jüngere, Georg Scheffers herausgegeben von Friedrich Engel. In 3 Bänden. I. Band. II. Theil: Die Ausdehnungslehre von 1862. Mit 37 Figuren im Text. [VIII u. 511 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 16.—

Bibliotheca Mathematica

Zeitschrift für Geschichte der Mathematischen Wissenschaften

Dritte Folge.

Im Herbst 1899.

Hochgeehrter Herr!

Wir erlauben uns, Ihnen mitzuteilen, dafs die mathematisch-historische Zeitschrift

Bibliotheca Mathematica,

welche der mitunterzeichnete G. Eneström seit dem Jahre 1887 in Stockholm herausgegeben hat, jetzt in den Verlag von B. G. Teubner in Leipzig übergeht und gleichzeitig mit diesem Verlagswechsel wesentlich erweitert werden wird.

Als der Herausgeber vor 13 Jahren sich entschlofs, eine neue Zeitschrift für Geschichte der Mathematik zu begründen, war es aus finanziellen Gründen nötig, den Umfang derselben auf acht Druckbogen pro Jahr zu beschränken. Freilich führte diese Beschränkung Übelstände mit sich, welche der Herausgeber mehr als einmal zu bedauern gehabt hat. Da nämlich die Zeitschrift dem Programme nach sowohl Originalaufsätze als Recensionen, Schriftverzeichnisse und Anfragen mit Antworten enthalten mufste, so konnten längere Abhandlungen darin nicht veröffentlicht werden und Beiträge zur Geschichte der angewandten Mathematik nur ausnahmsweise Platz finden; auch für die Recensionen war der Raum so beschränkt, dafs in jedem Hefte nur ein paar Schriften besprochen werden konnten.

Im Laufe der Jahre sind diese Übelstände noch fühlbarer geworden und von seiten der Fachgenossen ist an den Herausgeber oft die Aufforderung ergangen, den Umfang der Bibliotheca Mathematica zu erweitern. Da auch der Herausgeber selbst seit längerer

Zeit eine solche Erweiterung als notwendig erachtete, so war nur die Art und der Zeitpunkt derselben noch festzustellen.

Wie oben angedeutet, haben diese bisher schwebenden Fragen jetzt ihre Lösung gefunden, und zwar durch ein Anerbieten von seiten der Teubnerschen Verlagsbuchhandlung, welche sich bereit erklärt hat, den Verlag dieser Zeitschrift, die unter dem Titel

Bibliotheca Mathematica

Zeitschrift für Geschichte der Mathematischen Wissenschaften

Dritte Folge

erscheinen wird, zu übernehmen, und dabei eine wesentliche Erweiterung des Umfanges gestattete, sodafs jährlich statt 8 etwa 35 Druckbogen, die sich in Format und Ausstattung den Mathematischen Annalen anschliefsen werden, herausgegeben werden können.

Vom Jahre 1900 an wird also die Bibliotheca Mathematica im stande sein, viel kräftiger als bisher als Organ für die mathematisch-historische Forschung zu wirken. Und in der That ist ein solches Organ jetzt für das Gedeihen dieser Forschung fast unentbehrlich, teils um neue Untersuchungen hervorzurufen und zum Druck zu befördern, teils um von anderswo herausgegebenen Arbeiten Kenntnis zu geben. Zwar könnte es scheinen, als ob die Resultate der mathematisch-historischen Forschung schon so belangreich wären, dafs verhältnismäfsig wenig noch zu thun wäre. Aber in Wirklichkeit verhält es sich ganz anders. Was zunächst die Geschichte der reinen Mathematik betrifft, so haben wir ja jetzt in den Cantorschen „Vorlesungen“ eine vorzügliche Darstellung derselben bekommen, welche uns unser Gesamtwissen von einem hohen Standpunkte aus zu überblicken gestattet, aber gerade dieser Überblick zeigt uns, dafs noch gar manche Lücken auszufüllen und noch viele Untersuchungen auf diesem Gebiete nötig sind. Hierzu kommt weiter, dafs Cantor seine „Vorlesungen“ mit dem Jahre 1759 abbricht, sodafs wir für die zweite Hälfte des 18. Jahrhunderts und das ganze 19. Jahrhundert noch keine befriedigende Gesamtdarstellung besitzen.

Diese Umstände sind umsomehr hervorzuheben, als die Geschichte der Mathematik in der letzten Zeit eine ganz andere Bedeutung als früher bekommen hat. Während noch vor 30 Jahren eine Arbeit auf diesem Gebiete von gar manchem Mathematiker nicht nur nicht

als verdienstlich, sondern sogar als eine unnütze Verschwendung der Zeit und deshalb verwerflich angesehen wurde, dürfte eine solche Ansicht jetzt kaum mehr sich hervorwagen, und hervorragende Mathematiker geben sich besondere Mühe, um in ihre theoretischen Abhandlungen historische Notizen einflechten zu können; so z. B. sind in den schon erschienenen Heften der neuen „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften" nicht nur die historischen Bemerkungen sehr zahlreich vertreten, sondern auch zum Teil Resultate selbständiger historischer Forschungen enthalten.

Was soeben mit Bezug auf die Geschichte der reinen Mathematik bemerkt wurde, gilt auch im grofsen und ganzen von der Geschichte der Physik, Astronomie und Geodäsie, wenn auch die Verhältnisse auf diesen Gebieten sich zum Teil etwas günstiger gestaltet haben. Für alle Gebiete aber gilt in gleichem Mafse, dafs es von grofsem Interesse sein mufs, eine Zeitschrift zu besitzen, durch die man schnell und bequem die neueste mathematisch-historische Litteratur kennen lernt und wo man im Bedarfsfalle Aufschlüsse über hierher gehörende Fragen bekommen kann.

Als Organ für die mathematisch-historische Forschung soll die Bibliotheca Mathematica also in erster Linie neue Untersuchungen auf den einschlägigen Gebieten anregen und veröffentlichen; mit Bezug auf die neueste Geschichte wird besonderes Gewicht darauf gelegt werden, ausführliche Biographien hervorragender Mathematiker, Physiker und Astronomen mitteilen zu können. Dann soll die

BESTELL-ZETTEL.

Bei der Buchhandlung von in

bestelle ich hiermit Exemplar der

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

EITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFT

III. FOLGE

HERAUSGEGEBEN VON G. ENESTRÖM IN STOCKHOLM

(Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.)

anglosen Heften, von denen je 4 einen Band von 35 Druckbogen bilden. gr. 8

Preis des Bandes n. ℳ 20.— I. Band. 1900.

Unterschrift:

Ort, Datum, Wohnung:

Zeit eine solche Erweiterung als notwendig erachtete, so war nur die Art und der Zeitpunkt derselben noch festzustellen.

Wie oben angedeutet, haben diese bisher schwebenden Fragen jetzt ihre Lösung gefunden, und zwar durch ein Anerbieten von seiten der Teubnerschen Verlagsbuchhandlung, welche sich bereit erklärt hat, den Verlag dieser Zeitschrift, die unter dem Titel

Bibliotheca Mathematica

Zeitschrift für Geschichte der Mathematischen Wissenschaften

Dritte Folge

erscheinen wird, zu übernehmen, und dabei eine wesentliche Erweiterung des Umfanges gestattete, sodafs jährlich statt 8 etwa 35 Druckbogen, die sich in Format und Ausstattung den Mathematischen Annalen anschliefsen werden, herausgegeben werden können.

Vom Jahre 1900 an wird also die Bibliotheca Mathematica im stande sein, viel kräftiger als bisher als Organ für die mathematisch-historische Forschung zu wirken. Und in der That ist ein solches Organ jetzt für das Gedeihen dieser Forschung fast unentbehrlich, teils um neue Untersuchungen hervorzurufen und zum Druck zu befördern, teils um von anderswo herausgegebenen Arbeiten Kenntnis zu geben. Zwar könnte es scheinen, als ob die Resultate

---

Bücherzettel.

Freimarke:
3
Pfennig.

An

Buchhandlung

in _____

s verdienstlich, sondern sogar als eine unnütze Verschwendung der it und deshalb verwerflich angesehen wurde, dürfte eine solche nsicht jetzt kaum mehr sich hervorwagen, und hervorragende athematiker geben sich besondere Mühe, um in ihre theoretischen bhandlungen historische Notizen einflechten zu können; so z. B. sind den schon erschienenen Heften der neuen „Encyklopädie der athematischen Wissenschaften" nicht nur die historischen Bemerngen sehr zahlreich vertreten, sondern auch zum Teil Resultate lbständiger historischer Forschungen enthalten.

Was soeben mit Bezug auf die Geschichte der reinen Mathetik bemerkt wurde, gilt auch im grofsen und ganzen von der eschichte der Physik, Astronomie und Geodäsie, wenn auch die erhältnisse auf diesen Gebieten sich zum Teil etwas günstiger gealtet haben. Für alle Gebiete aber gilt in gleichem Mafse, dafs von grofsem Interesse sein mufs, eine Zeitschrift zu besitzen, rch die man schnell und bequem die neueste mathematisch-storische Litteratur kennen lernt und wo man im Bedarfsfalle Aufhlüsse über hierher gehörende Fragen bekommen kann.

Als Organ für die mathematisch-historische Forschung soll die Bibliotheca Mathematica also in erster Linie neue Untersuchungen f den einschlägigen Gebieten anregen und veröffentlichen; mit ezug auf die neueste Geschichte wird besonderes Gewicht darauf legt werden, ausführliche Biographien hervorragender Mathemaer, Physiker und Astronomen mitteilen zu können. Dann soll die itschrift Verzeichnisse neu erschienener Schriften und Berichte über wichtigsten unter diesen mitteilen, sowie noch eine Abteilung Anfragen und Antworten enthalten.

Aber das künftige Programm der Bibliotheca Mathematica ıfafst noch einen anderen Punkt. In neuerer Zeit giebt es bekanntn eine ganze Reihe von Fragen, deren Erörterung oder Erledigung die Mathematik und die Mathematiker von grofsem Interesse sind, gleich sie sich nicht direkt auf die Fortbildung der mathematischen ıeorien beziehen, und darum von den Fachzeitschriften nur aushmsweise behandelt werden. Einige dieser Fragen sind litterarischer ıtur und mit der Geschichte der Mathematik so nahe verwandt, fs sie recht eigentlich in das bisherige Programm der Bibliotheca athematica mit einbezogen werden können; sie betreffen u. a. die erstellung einer allgemeinen mathematischen Bibliographie mit ırlichen Fortsetzungen, die Veröffentlichung eines mathematischen örterbuches, die Vorbereitung von Berichten über den gegenırtigen Stand einzelner mathematischer Theorien und die Heraus-

gabe verschiedener Nachschlagebücher. Andere Fragen ähnlicher Art, welche dem alten Programm etwas ferner liegen, beziehen sich auf wissenschaftliche Kongresse und Ausstellungen, Klassifikation der mathematischen Wissenschaften, mathematische Terminologie und mathematischen Hochschul-Unterricht u. s. w.

Solche Fragen werden jetzt in den Bereich der Bibliotheca Mathematica hineingezogen werden, und die Zeitschrift soll also künftighin auch allerlei aktuelle Fragen auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften behandeln, um zu deren unmittelbarer oder allmählicher Erledigung beizutragen. Des weiteren wird die Zeitschrift in einer besonderen Chronik Notizen aus dem jetzigen wissenschaftlichen Leben auf den einschlägigen Gebieten mitteilen. Doch soll in jedem Hefte zum mindesten die Hälfte dem rein geschichtlichen Teile (biographische Artikel und Nekrologe selbstverständlich eingeschlossen) vorbehalten bleiben.

Was den zweiten Punkt des Programms, dessen vielseitige Schwierigkeiten der Herausgeber sich keineswegs verhehlt hat, betrifft, so kann er natürlich nicht durchgeführt werden ohne Beihilfe einer grofsen Anzahl von Fachmännern, und derselbe erlaubt sich deshalb Sie zu bitten, die Zeitschrift auch Ihrerseits so viel als möglich unterstützen zu wollen; besonders willkommen sind dabei kürzere Mitteilungen zur Chronik, z. B. betreffend Todesfälle (mit einigen biographischen Notizen über die Verstorbenen), demnächst erscheinende wichtigere Arbeiten, bemerkenswerte Vorlesungen, Preisfragen gelehrter Gesellschaften u. s. w.

Aufsätze, die sich zur Aufnahme in die Bibliotheca Mathematica eignen und in deutscher, französischer, englischer oder italienischer Sprache abgefafst sind, werden mit einem Honorar von 20 Mark für den Druckbogen von 16 Seiten bezahlt; dazu erhalten die Herren Verfasser 10—20 Separatabzüge unentgeltlich.

Für den Anfang sollen jährlich etwa 4 Hefte erscheinen, die einen Band von 35 Druckbogen bilden. Der Preis des Bandes beträgt 20 Mark. Das erste Heft wird voraussichtlich im Januar 1900 erscheinen. Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen sind an einen der beiden Unterzeichneten zu richten.

Mit vorzüglicher Hochachtung

ergebenst

G. Eneström
in Stockholm, Brahegatan 43,
als Herausgeber.

B. G. Teubner
in Leipzig, Poststrafse 3,
als Verleger.

Verlag von **B. G. Teubner** in Leipzig.

Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

Im Auftrage des Vorstandes bisher herausgegeben von

G. Cantor, W. Dyck, A. Gutzmer, G. Hauck, E. Lampe, A. Wangerin.

Jährlich ein Band. gr. 8. geh.

Hervorgegangen aus dem seit Jahren empfundenen Bedürfnisse nach einem engeren wissenschaftlichen und persönlichen Zusammenschlufs der Fachgenossen, hat sich die Deutsche Mathematiker-Vereinigung gebildet mit der Aufgabe: „in gemeinsamer Arbeit die Wissenschaft nach allen Richtungen zu fördern und auszubauen, ihre verschiedenen Teile und zerstreuten Organe in lebensvolle Verbindung und Wechselwirkung zu setzen, ihre Stellung im geistigen Leben der Nation nach Gebühr zu heben, ihren Vertretern und Jüngern Gelegenheit zu ungezwungenem kollegialischen Verkehr und zum Austausch von Ideen, Erfahrungen und Wünschen zu bieten".

Dementsprechend bringen die Jahresberichte u. a. über die geschäftlichen Angelegenheiten und über die auf den Jahresversammlungen gehaltenen Vorträge Berichte, ferner alljährlich ein Verzeichnis der Mitglieder mit genauer Adressenangabe, Nekrologe über die im letzten Vereinsjahre verstorbenen Mitglieder und enthalten aufserdem gröfsere Referate über einzelne Zweige der gesamten mathematischen Wissenschaften. Diese Referate, welche den gegenwärtigen Stand unserer bez. Kenntnisse in historisch-kritischer Darstellung zusammenfassen, dürften von besonderem wissenschaftlichen Werte sein; sie bietem jedem die Möglichkeit, einen Einblick in die geistigen Bestrebungen der Gegenwart zu gewinnen, wie ihn auch derjenige besitzen sollte, der durch seinen Beruf mehr oder weniger an der selbstthätigen Fortbildung der Wissenschaft gehindert ist.

In den bisher im Verlage von B. G. Teubner in Leipzig erschienenen Bänden [V. 1897/98. *M.* 7.20; VI. 1899. *M.* 8.—; VII. 1899. *M.* 12.80] kamen folgende gröfsere Referate zum Abdruck:

W. Frz. Meyer: Die Fortschritte der projectiven Invariantentheorie im letzten Vierteljahrhundert. 1892.
Fr. Kötter: Die Entwicklung der Lehre vom Erddruck. 1893.
A. Brill und M. Noether: Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit. 1894.
L. Henneberg: Über die Entwicklung und die Hauptaufgaben der Theorie der einfachen Fachwerke. 1894.
D. Hilbert: Die Theorie der algebraischen Zahlkörper. 1897.
E. Kötter: Die Entwicklung der synthetischen Geometrie. 1898.
G. Bohlmann: Übersicht über die wichtigsten Lehrbücher der Infinitesimal-Rechnung von Euler bis auf die heutige Zeit. 1899.
S. Finsterwalder: 1) Die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie. 2) Mechanische Beziehungen bei der Flächen-Deformation. 1899.
E. Czuber: Wahrscheinlichkeitsrechnung. 1899.

In Vorbereitung für die nächsten Bände:

R. Haussner: Numerische Auflösung von Gleichungen.
K. Heun: Die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik.
A. Kneser: Variationsrechnung.
R. Mehmke: Graphische Methoden.
A. Schoenflies: Die Mannigfaltigkeitslehre.
P. Stäckel: Allgemeine Dynamik.
E. Steinitz: Die Theorie der endlichen Gruppen.

Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung zählt z. Z. 410 Mitglieder, von denen fast ein Drittel Ausländer sind. Die Mitglieder erhalten obige Publikation zu einem Vorzugspreise, worüber die Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig Näheres mitteilt. Anmeldungen zur Mitgliedschaft nimmt Prof. Dr. **A. Gutzmer** in Jena, Schäferstraße 8, entgegen. Der jährliche *Mitgliedsbeitrag* beträgt 2 Mark.

Neuester Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Bianchi, Luigi, Professor a. d. Universität Pisa, Vorlesungen über Differentialgeometrie. Autorisierte deutsche Übersetzung von Max Lukat, Oberlehrer in Hamburg. [XII u. 659 S.] gr. 8. 1899. geh. n. ℳ 22.60.

Bolyai de Bolya, W., Tentamen. Juventutem studiosam in elementa matheseos purae elementaris ac sublimioris methodo intuitiva evidentiaque huic propria introducendi, cum appendice triplici. Editio secunda. Tomus I: Conspectus arithmeticae generalis. Mandato academiae scientiarum hungaricae suis adnotationibus adiectis ediderunt Iulius König et Mauritius Réthy, academiae scientiarum hungaricae sodales. Mit dem Bildnis des Verf. u. 11 lithogr. Tafeln. [XII u. 679 S.] 4. 1899. In Halbkalbleder geb. n. ℳ 40.—

von Braunmühl, Prof. Dr. **A.,** München, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. 2 Teile. I. Teil: Von den ältesten Zeiten bis zur Erfindung der Logarithmen. Mit 62 Figuren im Text. [VII u. 260 S.] gr. 8. 1899. geh. n. ℳ 9.—

Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauss und Wolfgang Bolyai. Mit Unterstützung der Königl. ungar. Akademie d. Wissenschaften herausg. von F. Schmidt u. P. Stäckel. [XVI u. 208 S.] 4. 1899. Geschmackvoll geb. n. ℳ 16.—

Czuber, E., Vorlesungen über Differential- und Integral-Rechnung. 2 Bde. gr. 8. 1898. In Leinwand geb. n. ℳ 22.— I. Band: [XIII u. 526 S.] n. ℳ 12.— — II. Band. [X u. 428 S.] n. ℳ 10.—

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, mit Einschluss ihrer Anwendungen. Mit Unterstützung der Akademieen der Wissenschaften zu München und Wien und der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, sowie unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen hrsg. von Dr. H. Burkhardt, o. Prof. der Mathematik a. d. Univ. Zürich, u. Dr. W. Fr. Meyer, o. Prof. der Mathematik a. d. Univ. Königsberg i. Pr. 2 Teile in 6 Bänden zu je 4—5 Heften. I. Teil: Reine Mathematik. [...] 4. Heft. [S. 353—512.] gr. 8. 1899. geh. n. ℳ 4.80

Engel, Dr. **Friedrich,** Prof. a. d. Universität Leipzig, und Dr. **Paul Stäckel,** Prof. [...] d. Universität Kiel, Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie. In 2 Bänden. gr. 8. geh.

I. Band: Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij, [...] geometrische Abhandlungen, aus d. [...] übers. u. mit Anmerkungen und einer [...] Biographie [...] Verf. hrsg. von Fr. Engel. I. Teil: [...] mit einem Porträt [...] und mit 124 Figuren im Text. [...] Anmerkungen [...] Figuren [...] [XV u. 616 S.] gr. 8. 1899. geh. n. ℳ 14.—

II. Band: Wolfgang Bolyai [...] hrsg. von Fr. Stäckel. [...] Bolyai [...] [XII u. 112 S.] gr. 8. 1899. geh. n. ℳ 4.—

Festschrift zu M[...] Cantors 70. Geburtstage. [...] d. Abhandl. z. Gesch. d. Mathem. 8. Supplementbd. [...] Zeitschr. f. Mathem. u. Physik. [...] [VI u. 657 S.] gr. 8. 1899. geh. n. ℳ 20.—

[...] [...] [...] [

Föppl, Dr. **A.**, Professor an der Technischen Hochschule zu München, Vorlesungen über technische Mechanik. 4 Bde. gr. 8. In Leinwand geb.

I. Band: Einführung in d. Mechanik. M. 78 Fig. i. T. [XV u. 412 S.] 1898. n. ℳ 10.—
II. Band: Graphische Statik. [In Vorbereitung.]
III. Band: Festigkeitslehre. Mit 70 Figuren im Text. [XVI u. 412 S.] 1897. n. ℳ 12.—
IV. Band: Dynamik. Mit 69 Figuren im Text. [XIV u. 466 S.] 1899. n. ℳ 12.—

Genocchi, Angelo, Differentialrechnung und Grundzüge der Integralrechnung, herausgegeben von Giuseppe Peano. Autorisierte deutsche Uebersetzung von G. Bohlmann und A. Schepp. Mit einem Vorwort von A. Mayer. [VIII u. 390 S.] gr. 8. 1899. In Leinw. geb. n. ℳ 12.—

Hochheim, Oberl. Dr. **F.**, Kiel, über eine Art der Erzeugung der Kurven dritter Klasse mit einer Doppeltangente. [IV u. 50 S.] gr. 8. 1899. geh. n. ℳ 1.60.

Holzmüller, Prof. Dr. **Gustav**, Direktor der Kgl. Maschinenbauschule zu Hagen, Mitglied der Leopoldinisch-Carolinischen Akademie, die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung. 2 Teile. II. Teil, enthaltend das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektricität, der Wärme und der Hydrodynamik. Mit 207 Figuren, zahlreichen Übungsbeispielen und einem Anhange über die Maßeinheiten. [XVII u. 440 S.] gr. 8. 1898. In Lnw. geb. n. ℳ 6.—

Karntler, **F.**, die Unität des absoluten Maass-Systems auf magnetische und elektrische Grössen. [VIII u. 46 S.] gr. 8. 1899. geh. n. ℳ 1.50.

Kohlrausch, Professor Dr. **F.**, Präsident der physikalisch-technischen Reichsanstalt in Charlottenburg, kleiner Leitfaden der praktischen Physik. Für den Unterricht in den physikalischen Übungen. Mit in den Text gedruckten Figuren. [XIX u. 260 S.] gr. 8. 1899. In Leinw. geb. n. ℳ 4.—

Krause, Dr. **Martin**, Professor an der Königl. Sächs. Technischen Hochschule zu Dresden, Theorie der doppeltperiodischen Functionen einer veränderlichen Grösse. (In 2 Bänden.) Zweiter Band. [XII u. 506 S.] gr. 8. 1897. geh. n. ℳ 12.—

Kronecker's, **Leopold**, Werke. Herausgegeben auf Veranlassung der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften von K. Hensel. (In 4 Bänden.) Dritter Band. I. Hälfband. [VIII u. 474 S.] gr. 4. 1899. geh. n. ℳ 36.— [Der zweite Halbband befindet sich u. d. Pr.]

Mansion, Prof. Dr. P., Gent, Einleitung in die Theorie der Determinanten. Für Gymnasien und Realschulen. Aus der 3. franz. Aufl. übersetzt. [40 S.] gr. 8. 1899. geh. n. ℳ 1.—

Muth, Dr. **P.** in Osthofen, Theorie und Anwendung der Elementarteiler. [XVI u. 236 S.] gr. 8. 1899. geh. n. ℳ 8.—

Neumann, Dr. **C.**, Professor der Mathematik an der Universität zu Leipzig, die elektrischen Kräfte. Darlegung und genauere Betrachtung der von hervorragenden Physikern entwickelten mathematischen Theorieen. Zweiter Theil: Ueber die von Hermann von Helmholtz in seinen älteren und in seinen neueren Arbeiten angestellten Untersuchungen. [XXXVIII u. 462 S.] gr. 8. 1898. geh. n. ℳ 14.—

Pascal, **Ernst**, o. Prof. a. d. Univ. zu Pavia, die Variationsrechnung. Autorisierte deutsche Ausgabe von Adolf Schepp, Ingenieur und Oberleutnant a. D. zu Wiesbaden. [VI u. 146 S.] gr. 8. 1899. In Leinwand geb. n. ℳ 5.60.

Riemann, **B.**, elliptische Funktionen. Vorlesungen herausg. von Prof. Dr. H. Stahl, Tübingen. Mit Figuren im Text. [VIII u. 144 S.] gr. 8. 1899. geh. n. ℳ 5.60.

Routh, John Edward, Sc. D., Ll. D., F. R. S., etc.; Ehrenmitglied von Peterhouse, Cambridge; Mitglied des Senats der Universität London, die Dynamik der Systeme starrer Körper. In zwei Bänden mit zahlreichen Beispielen. Autorisierte deutsche Ausgabe von Adolf Schepp. Mit einem Vorwort von Felix Klein. 2 Bände. gr. 8. In Leinwand geb. n. *M* 24.—

I. Band: Die Elemente. Mit 57 Fig. im Text. [XII u. 472 S.] 1897. n. *M* 10.—

II. Band: Die höhere Dynamik. Mit 38 Fig. im Text. [X u. 544 S.] 1898. n. *M* 14.—

Rudio, Dr. Ferd., Prof. am Polytechnikum in Zürich, die Elemente der analytischen Geometrie. Zum Gebrauche an höheren Lehranstalten sowie zum Selbststudium. Mit zahlreichen Uebungsbeispielen. Zweiter Teil: Die analytische Geometrie des Raumes. Mit 12 Fig. im Text. Zweite verbesserte Auflage. [X u. 184 S.] gr. 8. 1899. geh. n. *M* 2.40.

Salmon, George, analytische Geometrie des Raumes. Deutsch bearbeitet von Dr. Wilhelm Fiedler, Professor am Eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich. Zwei Teile. I. Teil: Die Elemente und die Theorie der Flächen zweiten Grades. Vierte verbesserte Auflage. [XXIV u. 448 S.] gr. 8. 1898. geh. n. *M* 8.—

———— analytische Geometrie der Kegelschnitte mit besonderer Berücksichtigung der neueren Methoden. Nach George Salmon frei bearbeitet von Dr. Wilhelm Fiedler, Professor am Eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich. In 2 Teilen. I. Teil. Sechste verbess. Aufl. [XXV u. 442 S.] gr. 8. 1898. geh. n. *M* 9.—

Schell, W., allgemeine Theorie der Curven doppelter Krümmung in rein geometrischer Darstellung. Zur Einführung in das Studium der Curventheorie. 2. erweiterte Auflage. [VIII u. 163 S.] gr. 8. 1898. geh. n. *M* 5.—

Schuster, Prof. Dr. **M.,** Oldenburg i/Gr., geometrische Aufgaben. Ein Lehr- und Übungsbuch zum Gebrauch beim Unterricht an höheren Schulen. Ausgabe **A.** Für Vollanstalten. Mit 2 lithogr. Tafeln. [VIII u 147 S.] gr. 8. 1899. geb. n *M* 2.—

———— Ausgabe **B.** Für Realanstalten. Mit 2 lithogr. Tafeln. [VII u 111 S.] gr. 8. 1899. geb. n. *M* 1.60.

Serret, J.-A., † Membre de l'Institut et de Bureau des Longitudes à Paris, Lehrbuch der Differential- u. Integral-Rechnung. Mit Genehmigung des Verfassers deutsch bearbeitet von Dr. Axel Harnack, † Prof. an der Technischen Hochschule zu Dresden Zweite, durchgesehene Auflage mit Unterstützung der Herren H. Liebmann u. E. Zermelo herausgegeben von Dr. G. Bohlmann, Privatdocent an der Universität zu Göttingen. In drei Bänden gr. 8 geh.

I. Band: Differentialrechnung. Mit 85 Fig im Text. [X u 570 S.] 1897. n. *M* 10.—

II. Band: Integralrechnung. Mit 55 Fig. im Text. [XII u. 428 S.] 1899. n. *M* 8.—

III. Band: Differentialgleichungen und Variationsrechnung. [In Vorbereitung.]

Steiner's, Jacob, Vorlesungen über synthetische Geometrie. 2 Teile. II. Teil: Die Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projektive Eigenschaften. Auf Grund von Universitätsvorträgen und mit Benutzung hinterlassener Manuscripte Jacob Steiner's bearb. von Heinrich Schröter. 3. Aufl. von Rudolf Sturm Mit 103 Figuren im Text. [XVII u. 538 S.] gr. 8. 1898. geh. n. *M* 14.—

Stolz, Dr. Otto, ord. Professor an der Universität zu Innsbruck, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. In 3 Teilen. III. Teil: Die Lehre von den Doppelintegralen. Eine Ergänzung zum I. Teile des Werkes. Mit 11 Figuren im Text. [VIII u. 206 S.] gr. 8. 1899. geh. n. *M* 8.—

Wüllner, Prof. Dr. **A.** in Aachen, Lehrbuch der Experimentalphysik. 4 Bände. Fünfte, vielfach umgearbeitete und verbesserte Auflage. IV. Band: Die Lehre von der Strahlung gr. 8. 1899. geh. n. *M* 11.—

I. Halbband. Mit 147 in den Text gedr. Abb. u. Fig. und einer farbigen Tafel. [512 S.] n. *M* 7.—

II. Halbband. Mit 72 in den Text gedr. Abb. u. Fig. und drei lithogr. Tafeln. [XI u. 513 S.] n. *M* 7.—

Allerhöchste Auszeichnungen: Orden, Staatsmedaillen etc.

EMMER &c.

Pianinos 450 Mk. an, Flügel 10jährige Garantie,
Harmoniums 95 Mk. an.
Abzahlung gestattet. Bar: Rabatt und Freisendung
Fabrik: W. Emmer, Berlin C.
Seydelstr. 20. Preisliste, Musterbuch umsonst.
= Die Herren Geistlichen u. Lehrer erhalten Extrapreise. =

INHALT.

The Elastic Curve, under uniform normal pressure. By A G [illegible]
of Woodwich England . . . . . [illegible]
Symmetrische Functionen. Von P. Gordan in Erlangen . . . . . [illegible]
Sur la theorie des series. Par J Franel à Zurich . . . . . [illegible]
Die algebraische Lösung des Problems der Substitutionsgruppen. V
P. Hoyer in Burg b. Magdeburg . . . . . [illegible]
The Structure of the Linear Homogeneous Groups Defined by the Inv
$\lambda_1 \xi'_1 : \lambda \xi'_2 : \ldots : \lambda \xi'_m$. By Leonard Eugene Dick
Austin, Texas . . . . . [illegible]
[illegible] développement de zéro en séries de fonctions cylindri
[illegible] par [illegible] . . . . . [illegible]
[illegible] reellen quadratischen Form [illegible]
[illegible] Von Alfred Loewy in Freib
[illegible] By Charlotte A
[illegible]
[illegible] Von Paul Stäckel in
[illegible]
[illegible] wird um möglichst genaue Ang
Die Redaction

[illegible] besteht aus 4 Heften [illegible]
[illegible] jedem Heft nur abg
[illegible] Hefte mitunter von

[illegible] Heften beträgt 20 Mark;
[illegible] Buchhandlungen und Postanst

[illegible], Hildegardstr. 1 [illegible]
[illegible] Mayer, Leipzig, Königs
[illegible]
[illegible] Teubner in Leipzig.
[illegible] in Leipzig, Poststr

MATHEMATICS-STATISTICS
LIBRARY

STORAGE AREA

To avoid fine, this book should be returned on
or before the date last stamped below

50M-12-60-96455

JUL 4 1972

MAR 1 2 1976

510.5
M480
43943 v.58 1899
Mathematische annalen
STORAGE AREA
NAME
DATE
NAME
DATE
K. McIver JUN
Drake
Drake 155 Helen Dr., Sunnyvale
Dzbach Vol-312
MAR 1 2 1976
Stanford University Libraries
3 6105 001 021 943
43943
510
M4
Vol 58
1899
MATHEMATICS-STATISTICS
LIBRARY